PAUL KRÉE

Remarques sur la théorie des champs de bosons

Séminaire Paul Krée, tome 1 (1974-1975), exp. nº 12, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1974-1975__1__A13_0>

Séminaire Paul KRÉE
Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie
1re année, 1974/75, n° 12, 9 p.

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES CHAMPS DE BOSONS

par Paul KRÉE

On montre comment ce formalisme s'applique à la théorie des champs de bosons et à l'électrodynamique quantique. Des applications à la théorie relativiste des champs quantiques avec interaction sont en cours d'élaboration en collaboration avec R. RACZKA.

1. Le formalisme de I. SEGAL [6].

(1.1) Pour quantifier un système à n degrés de liberté, on introduit classiquement l'espace $H = L^2(X_n)$ des classes de Lebesgue relatives à la mesure dx sur X_n. Dans cet espace, on a les représentations unitaires $t \longrightarrow Q(t)$ et $t \longrightarrow P(t)$ du groupe additif X_n. Ces représentations sont telles que, pour toute $g = g(q)$ dans $H = L^2(\mathbb{R}^n_q)$, on a

(1.1.1) $$Q(t)g = e^{i(t,q)}\, g(q)$$

(1.1.2) $$P(t)g = g(q + t)$$

On a

$$P(t)\; Q(s) = e^{i(t,s)}\; Q(s)\; P(t) .$$

On peut rapporter X_n à une base orthonormée, et introduire les restrictions des groupes $Q(t)$ et $P(t)$ au k-ième axe de coordonnée avec $1 \leq k \leq n$. Notant iq_k et ip_k les générateurs infinitésimaux de ces groupes, on a

(1.1.3) q_k = opérateur de multiplication par la coordonnée x_k

(1.1.4) $p_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$

et

$$[q_k , p_k] = iI\delta_{k\ell} \quad \text{pour } k \text{ et } \ell = 1 ,\dots, n ,$$

où I est l'identité, et où $\delta_{k\ell}$ est le symbole de Kronecker.

Si l'on introduit le groupe de Weyl de dimension $2n + 1$:

$$W_n = X_n \times X_n \times T ,$$

muni de la loi de composition

(1.1.5) $$(x,y,\alpha)(x',y',\alpha') = (x+x' , y+y' , \alpha\alpha' e^{-i(x',y)}) ,$$

on en déduit une représentation unitaire du groupe de Weyl en posant

(1.1.6) $T_g = \alpha P(x)\; Q(y)$, pour tout $g = (x , y , \alpha)$ de W_n .

D'ailleurs, si l'on pose $z = t + is$ et $W(t + is) = P(t)\, Q(s) \exp(-(i/2)(t,s))$, on a

(1.1.7) $$W(z)\, W(z') = \exp(- (i/2) \operatorname{Im}(z , \bar{z}'))\, W(z + z') .$$

Comme il n'y a pas de mesure de Lebesgue en dimension infinie, ces résultats ne se transposent pas directement en dimension infinie. Pour effectuer cette transposition, I. SEGAL utilise l'isométrie naturelle de $H = L^2(\underset{\sim}{R}^n)$ sur

$$H_1 = \{g_1 \ ; \ \pi^{-n/2} \int_{X_n} |g_1(q)|^2 \exp(- |q|^2)\, dq < \infty\} ,$$

et il transporte par cette isométrie, les représentations P et Q de Schrödinger. Plus précisément, l'application α : $f_1 \longrightarrow \pi^{-n/4} f_1(x) \exp(- |x|^2/2)$ réalise une isométrie de H_1 sur H, et α^{-1} transporte les représentations unitaires P et Q de X_n en les représentations unitaires P^1 et Q^1 avec

(1.1.8) $$Q^1(t) = \alpha^{-1} Q(t)\alpha : \ g_1 \longrightarrow g_1(q) \exp(i(g , t))$$

(1.1.9) $$P^1(t) = \alpha^{-1} P(t)\alpha : \ g_1 \longrightarrow g_1(q + t) \exp(-(|t|^2/2)-(t,q)) .$$

Naturellement ceci fournit une représentation équivalente du groupe de Weyl.

On peut rapporter X_n à une base orthonormée, et introduire les restrictions Q'_k et P'_k des représentaires unitaires Q' et P' au k-ième axe de coordonnée. Alors les générateurs infinitésimaux de ces groupes sont iq^1_k et ip^1_k avec

(1.1.10) (q^1_k) = opérateur de multiplication par la coordonnée q_k

(1.1.11) $$(p^1_k) \ : \ g \longmapsto \frac{1}{\sqrt{-1}} \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} - q_k\, g\right) .$$

On voit à présent que l'extension en dimension infinie est possible : c'est le résultat fondamental de [6]. Formulons ces résultats dans notre langage.

On remplace X_n par un espace de Hilbert réel séparable X que l'on équipe de la bonne famille maximale et de la promesure normale $\nu_{1/2}$ de variance $1/2$. On travaille avec l'espace $L^2(X)$. On voit que l'on peut définir les représentations unitaires Q_1 et P_1 à valeurs dans $L^2(X)$ du groupe additif de X par les formules (1.1.8) et (1.1.9). En effet :

$Q^1(t)$ est naturellement définie par (1.1.8) pour g polynomiale cylindrique. Comme $Q^1(t)$ est alors isométrique inversible, on obtient l'extension unitaire à $L^2(X)$ par prolongement continu ;

Le fait que $P^1(t)$, définie par (1.1.9), se prolonge en un opérateur unitaire de $L^2(X)$, résulte de la proposition (2.8.26) de l'exposé 10.

D'ailleurs en utilisant le lemme (1.4) de l'exposé 8, on obtient les expressions explicites quelconques de $Q^1(t)g$ et $P^1(t)g$ pour g quelconque dans $L^2(\Omega)$

(1.1.12) $$Q^1(t) \ : \ g \longrightarrow g(\omega) \exp(i(t , w))$$

(1.1.13) $$P^1(t) \ : \ g \rightsquigarrow g(\omega + t) \exp(-(\|t\|^2/2) - (t , w)) .$$

Si l'on rapporte X à une base orthonormée, on voit que la théorie des prodistributions permet de donner un sens aux opérateurs p_k^1 , définis par (1.1.11), et ceci pour tout g dans $L^2(\Omega)$.

De plus, la théorie des prodistributions et des espaces de Sobolev permet de trouver un domaine non trivial pour l'hamiltonien quantique

$$(1.1.14) \qquad \tilde{\Delta} = -\sum\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) + \sum x_j\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) .$$

Il suffit de prendre $K^2(X)$.

Il nous semble important de noter que la règle pratique du "normal ordering" consiste à faire d'abord l'opérateur de dérivation de densité, puis l'opérateur de divergence. Evidemment, s'il n'intervenait en théorie quantique des champs que des opérateurs auto-adjoints ou des générateurs infinitésimaux de semi-groupes, le formalisme des prodistributions serait peu utile, car on pourrait utiliser la théorie des opérateurs non bornés. Mais ce n'est pas le cas, et par exemple, il faut faire un raisonnement pour prouver que l'adjoint de

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(q_k^1 + ip_k^1) \quad \text{est} \quad a_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(q_k^1 - ip_k^1) .$$

2. Etude d'un espace de fonctions holomorphes.

2A. Opérateurs d' et d" .

(2A.1) On se limite à la considération de X^c , complexifié de l'espace de Hilbert réel séparable. X . Comme X^c a aussi une structure réelle, tout ce qui a été fait jusqu'ici peut être appliqué à X^c . Munissons X^c de la promesure ν^d de transformée de Fourier

$$(2A.1.1) \qquad z \longrightarrow \widehat{\nu^d}(z) = \exp\left(-\frac{1}{4d}\,\|z\|^2\right) ,$$

où d est un nombre positif fixé. On considère ν^d comme une u-promesure, où la bonne famille $F_u(X^c)$ est obtenue par complexification d'une bonne famille relative à X . Si $s_{ij}^c : X_i^c \longrightarrow X_j^c$ est une surjection canonique, les bases orthonormées de X_i et X_j , introduites au point (1.1) de l'exposé 6 sont aussi des bases orthonormées des complexifiées X_i^c et X_j^c de X_i et X_j . Les coordonnées complexes correspondantes sont notées $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \dots, n$. On pose $\bar{z}_k = x_k - iy_k$. On a

$$s_i^c(\nu^d) = \bigotimes_1^n m = \beta_i\, dx\, dy \; ; \qquad s_j^c(\nu^d) = \bigotimes_1^{n'} m = \beta_j\, dx'\, dy' ,$$

où m est la mesure gaussienne sur la droite complexe $u + iv = p$

$$(2A.1.2) \qquad m = d\pi^{-1} \exp(-dp\bar{p})\, du\, dv .$$

On pose comme d'habitude

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\,\frac{\partial}{\partial y_k}\right) \; ; \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\,\frac{\partial}{\partial y_k}\right) .$$

L'opérateur D se scinde en deux opérateurs d' et d" que l'on explicite par exemple dans le cas des fonctions

$$\mathcal{O}(X_i^c) \xrightarrow{d'} \mathcal{O}(X_i^c) \otimes X_i^c \; ; \quad \mathcal{O}(X_i^c) \xrightarrow{d''} \mathcal{O}(X_i^c) \otimes X_i^c$$

$$\varphi \longrightarrow \sum_k \frac{\partial\varphi}{\partial z_k} dz_k \quad ; \qquad \varphi \longmapsto \sum \frac{\partial\varphi}{\partial z_k} \overline{dz}_k \; .$$

On introduit les opérateurs de divergence $\check{\operatorname{div}}'$ et $\check{\operatorname{div}}''$

$$\mathcal{O}(X_i^c) \xleftarrow{\check{\operatorname{div}}'} \mathcal{O}(X_i^c) \otimes X_i^c \; ; \quad \mathcal{O}(X_i^c) \xleftarrow{\check{\operatorname{div}}''} \mathcal{O}(X_i^c) \otimes X_i^c$$

$$\sum \frac{\check{\partial}\psi_k}{\partial z_k} \longleftarrow\!\!\!\dashv \psi = \sum \psi_k \, dz_k \quad ; \quad \sum \frac{\check{\partial}\psi}{\partial \bar{z}_k} \longleftarrow\!\!\!\dashv \sum_k \psi_k \, dz_k$$

avec $(\check{\partial}/\partial z_k) = \beta_i^{-1} \, (\partial/\partial z_k)\beta_i$ et $(\check{\partial}/\partial \bar{z}_k) = \beta_i^{-1} \, (\partial/\partial \bar{z}_k)\beta_i$.

On obtient les formules d'intégration par parties

$$(\psi \, , \, d' \, \varphi) = - \, (\check{\operatorname{div}}' \, \psi \, , \, \varphi)(\psi \, , \, d'' \, \varphi) = - \, (\check{\operatorname{div}}'' \, \psi \, , \, \varphi) \; .$$

En procédant par transposition (comme au §2 de l'exposé 9), on étend les opérateurs d' , d'' , $\check{\operatorname{div}}'$, $\check{\operatorname{div}}''$ aux distributions. Ces extensions sont notées $\tilde{d}'$, $\tilde{d}''$, div' , div'' . On fait maintenant varier i . Soit $T = (T_i)$ une u-prodistribution sur X^c . On définit $\tilde{d}'' \, T$ comme le u-protenseur distribution de bidegré $(0 \, , \, 1)$ représenté, pour tout i , par le tenseur distribution, $\tilde{d}'' \, T_i$, de coordonnées $(\partial/\partial \bar{z}_k)T$; $1 \leq k \leq n$.

On dit que T est holomorphe au sens des prodistributions si $\tilde{d}'' \, T = 0$; autrement dit, si chaque T_i a une densité holomorphe par rapport à la mesure $\nu_i^d = \bigotimes_1^n m$.

2B. Relation entre deux notions d'holomorphie.

On utilise les notations de l'exposé 8, et l'on travaille avec la bonne famille maximale de X . La complexifiée ℓ^c de ℓ transforme la promesure ν^d sur X^c en une probabilité p^d sur Ω^c . On rappelle d'abord la définition des classes $F^\rho(X^c)$ de fonctions holomorphes introduites par DWYER [2]. Comme les restrictions aux espaces X_i^c de toute fonction de $F^\rho(X^c)$ définissent un système cohérent de mesures, on peut montrer que $F^\rho(X^c)$ est isométrique à une classe de fonctions holomorphes, introduites par I. E. SEGAL [7]. D'où l'existence de prodistributions holomorphes sur X^c qui sont définies par des fonctions non continues sur Ω^c .

(2B.2) Définition des classes $F_s^\rho(X^c)$ de fonctions holomorphes du type Fock : Soient $\rho > 0$, et s réel. On définit $F_s^\rho(X^c)$ comme l'espace des fonctions entières f sur X^c telles que

$$f(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{D^\ell \, f(0 \, , \, z)}{\ell!} \tag{2B.2.1}$$

la suite des dérivées à l'origine de f vérifiant

$$\|f\|_{\rho,s} = \Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\|D^\ell \, f(0)\|^2}{\ell!} \, \rho^\ell (1 + \ell)^s\Big)^{1/2} < \infty \; ,$$

où $\|D^\ell \, f(0)\|$ désigne la norme de $D^\ell \, f(0)$ dans le produit tensoriel symétrique hilbertien complété $\hat{\odot}_\ell \, X^c$.

Pour simplifier l'écriture, on écrit $F^{\rho}(X^c)$ au lieu de $F_0^{\rho}(X^c)$.

(2B.3). Remarques.

(a) La série (2B.2.1) converge car, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\|D^{\ell} f(0,z)\|}{\ell!} = \sum \frac{\|D^{\ell} f(0)\|}{\ell!^{1/2}} \rho^{\ell/2}(1+\ell)^{s/2} \times \frac{\|z\|^{\ell}}{\ell!^{1/2} \rho^{\ell/2}(1+\ell)^{s/2}}$$

$$= \|f\|_{\rho,s}\Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\|z\|^{2\ell}}{\ell!\, \rho^{\ell}(1+\ell)^{s}}\Big)^{1/2} .$$

La somme $f(z)$ de la série (2B.2.1) définit une fonction holomorphe sur tout X^c car f est bornée sur tout borné, et sa restriction à toute droite affine est holomorphe.

(b) Notons que $F_s^{\rho}(X^c)$ est un espace de Hilbert complexe dans lequel les fonctions polynomiales cylindriques sont partout denses.

(c) Soient $\tilde{P} = P \circ s_i$ et $\tilde{Q} = Q \circ s_i$ deux fonctions polynomiales cylindriques sur X^c se factorisant à travers X_i^c . Cet espace étant rapporté à une base orthonormée, les polynômes P et Q peuvent s'écrire

$$P(z) = \sum a_{\alpha} \frac{(-i)^{|\alpha|}\, d^{|\alpha|/2}}{\alpha!^{1/2}} z^{\alpha} \;; \qquad Q(z) = \sum b_{\beta} \frac{(-i)^{|\beta|}\, d^{|\beta|/2}}{\beta!^{1/2}} z^{\beta}$$

avec $d > 0$, les a_{α} et b_{β} étant des coefficients. Il résulte du lemme (2.7) de l'exposé 8 que le produit scalaire dans $F^{1/d}(X^c)$ de $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ est égal à

$$(\tilde{P}|\tilde{Q}) = \sum a_{\alpha}\, \overline{b}_{\alpha} .$$

(d) Soient k et ℓ deux entiers $\geqslant 0$. Dans $L_m^2(\underset{\sim}{C})$ le produit scalaire des monômes p^k et p^{ℓ} est égal à

$$\iint_C p^k\, \overline{p}^{\ell}\, dm(p) = \frac{d}{\pi} \iint r^{k-\ell+1} \exp(-dr^2 + i(k-\ell)\theta)\, dr\, d\theta = d^{-k}\, k!\, \delta_k^{\ell} .$$

(e) Avec cette relation, on peut calculer le produit scalaire dans $L^2_{\nu^d}(X^c)$ des promesures $\tilde{P}\nu^d$ et $\tilde{Q}\nu^d$,

$$(\tilde{P}\nu^d|\tilde{Q}\nu^d) = \int_{X_i^c} P(z)\, \overline{Q(z)}\, d\nu^d(z) = \sum a_{\alpha}\, \overline{b}_{\alpha} .$$

Donc

(2B.3.2) $$(\tilde{P}|\tilde{Q})_{F^{1/d}} = (\tilde{P}\nu^d|\tilde{Q}\nu^d)_{L^2_{\nu^d}(X^c)} .$$

Comme les fonctions polynomiales cylindriques sont denses dans $F^{1/d}(X^c)$, on voit que cet espace est isométrique à un sous-espace fermé de $L^2_{\nu^d}(X^c)$.

(2B.4) Proposition et définition de $W^d(X^c)$.

(a) Soit $d > 0$. On note $W^d(X^c)$ l'adhérence dans $L^2_{\nu^d}(X^c)$ du sous-espace décrit par les $\tilde{P}\nu^d$, $\tilde{P}$ décrivant les fonctions polynomiales cylindriques sur X^c .

(b) L'application $\tilde{P} \longrightarrow \tilde{P}\nu^d$ définit par prolongement continu une isométrie I de $F^{1/d}(X^c)$ sur $W^d(X^c)$.

La proposition suivante donne une définition plus complète de l'isométrie I et une caractérisation des éléments de $F^{1/d}(X^c)$ appartenant à $W^d(X^c)$.

(2B.5) PROPOSITION.

(a) Soient $\Phi \in F^{1/d}(X^c)$, et Φ_i la restriction de Φ à X_i^c . Alors la famille de mesures $(\Phi_i\, \nu_i^d)_i$ est cohérente, et elle définit la promesure $I(\Phi)$.

(b) Soit $g \in L^2_{\nu^d}(X^c)$. Alors, pour que g $W^d(X^c)$, il faut et il suffit que g soit holomorphe au sens des prodistributions.

Démonstration.

(a) La cohérence se démontre en utilisant (28.3.d). On remarque que

$$\sup_i \int |\Phi_i(z)|^2 \, d\nu_i^d(z) = \|\Phi\|^2_{F^{1/d}} < \infty .$$

Vu la proposition (2.8) de l'exposé 8, la promesure $T = (\Phi_i \nu_i^d)$ appartient à $L^2_{\nu^d}(X^c)$, et l'application $\Phi \longrightarrow T$ est une isométrie J de $F^{1/d}$ sur W^d . On a $J = I$, car ces isométries coïncident sur une partie dense de $F^{1/d}$.

(b) Tout $g \in W^d$ définit une promesure $(\Phi_i\, \nu_i^d)$ telle que les Φ_i soient holomorphes, donc g est holomorphe au sens des prodistributions. Réciproquement, tout g de $L^2_{\nu^d}$ définit une promesure $(\varphi_i\, \nu_i^d)$ sur X telle que

(2B.5.1) $$\sup_i \int |\varphi_i|^2 \, d\nu_i^d < \infty .$$

Si g est holomorphe, les φ_i sont holomorphes. La cohérence des $\varphi_i\, \nu_i^d$ entraîne que les φ_i se raccordent et définissent ainsi une fonction Φ sur X^c . La condition (2B.5.1) entraîne $\Phi \in F^{1/d}$.

(2B.6) Remarque : Utilisons une notation définie au lemme 1.4' de l'exposé 8. On voit que la fonction $z(w)$ de $L^2(\Omega^c)$, associée à tout point z de $X^c \setminus (\Omega^c)'$, est holomorphe au sens des prodistributions, sans être continue.

3. La représentation de Fock-Cook et la représentation de Bargmann-Segal des relations de commutation.

(3.7) FOCK avait donné le principe de construction d'une autre représentation des relations de commutation. Cette construction effectuée par COOK utilise l'espace de Fock

(3.7.1) $$H' = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\hat{\bigodot}_n X^c) .$$

Le passage de la représentation de Fock-Cook à la représentation de Segal a été donné par I. SEGAL en utilisant une construction imaginée par WIENER pour l'étude du mouvement brownien.

Cette construction est basée sur des méthodes probabilistes, et elle est encore utilisée aujourd'hui en théorie constructive des champs : (voir, par exemple [4]) pour obtenir une isométrie de H^1 sur H'.

<u>Nous allons voir que cette isométrie de l'espace de Segal</u> $H^1 = L^2(X)$ <u>sur l'espace de Fock</u> H' <u>est tout simplement fournie par la transformation de Fourier</u>.

En effet, il suffit de poser, pour toute g cylindrique de $L^2(X)$,

$$(\theta g)(\overline{z}) = \int_X g(q) \exp(-\tfrac{1}{2}\overline{z}^2 + \sqrt{2}(\overline{z}, q))\, d\nu_{1/2}(q). \tag{3.7.2}$$

Vu la proposition (2-3.19) de l'exposé 10, θ se prolonge en une isométrie de $L^2(X)$ sur $F(\overline{X}^c)$. En transportant par θ les groupes unitaires P' et Q' de $L^2(X^c)$, on obtient les représentations unitaires suivantes P^2 et Q^2 du groupe additif de X :

$$P^2(t) = \theta^{-1} P'(t)\theta : \quad \Phi \longrightarrow \exp(-\frac{|t|^2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{z}, t))\, \Phi(\overline{z} + \frac{t}{\sqrt{2}})$$

$$Q^2(t) = \theta^{-1} Q'(t)\theta : \quad \Phi \longrightarrow i^{-1}\, \Phi(\overline{z} + \frac{it}{\sqrt{2}}) \exp(\frac{i(t, \overline{z})}{\sqrt{2}} - \frac{|t|^2}{2})$$

Rapportant X à une base orthonormée $e_1, e_2, \dots,$ on peut considérer les restrictions de ces représentations aux droites de X engendrées par les e_k. Les générateurs infinitésimaux de ces groupes sont ip_k^2 et iq_k^2 avec

$$p_k^2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\overline{z}_k - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}) \tag{3.7.3}$$

$$q_k^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{z}_k + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}) \tag{3.7.4}$$

On est ainsi amené à considérer les combinaisons de Fock-Dirac de ces opérateurs :

$$a_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_k^2 - ip_k^2) = \overline{z}_k \tag{3.7.5}$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_k^2 + ip_k^2) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \tag{3.7.6}$$

Cette notation est justifiée, car a_k^* est l'adjoint de l'opérateur non borné a_k. On a ainsi obtenu la représentation de Fock-Cook car l'application, qui à toute f de $F(\overline{X}^c)$ fait correspondre son développement de Taylor à l'origine, est une isométrie de $F(\overline{X}^c)$ sur l'espace de Fock.

4. Etats cohérents. Seconde quantification.

En électrodynamique quantique, les physiciens effectuent des raisonnements relatifs à l'espace de Fock $F(\mathbb{C})$ ou $F(\mathbb{C}^n)$, en effectuant des passages à la limite formels lorsque n tend vers $+\infty$ (voir par exemple [3], page 138).

<u>Les raisonnements qui précèdent fournissent une méthode permettant de rendre rigoureux ces passages à la limite</u>.

Indiquons le début de la procédure.

(4.8) <u>Noyau reproduisant de</u> $F(\overline{X}^c)$: Si Y est un ensemble quelconque, l'espace $\mathbb{C}^Y$ des fonctions à valeurs complexes sur Y est muni de la topologie produit, c'est-à-dire de la topologie de la convergence simple. Le dual $\underset{\sim}{C}^{(Y)}$ de cet espace est identifiable à l'espace des combinaisons linéaires finies de masses de Dirac sur Y. Un noyau reproduisant sur Y est une forme quadratique positive Q sur $\underset{\sim}{C}^{(Y)}$. Plus précisément, la forme bilinéaire symétrique définissant Q est la forme bilinéaire associée à un opérateur symétrique positif N de $\underset{\sim}{C}^{(Y)}$ vers $\underset{\sim}{C}^{Y}$; avec la terminologie de [5] c'est un noyau positif, et ce noyau est défini par la fonction suivante sur $Y \times Y$

$$A(y\ ,\ y') = (N\delta_{y'}|\delta_y)\ .$$

D'après la théorie de Bargmann-Aronszajn, ou d'après le résultat fondamental de [5], l'ensemble de ces noyaux positifs est en correspondance bi-univoque avec l'ensemble des sous-espaces hilbertiens de $\underset{\sim}{C}^{Y}$; le sous-espace hilbertien H associé à N étant

$$\forall\ \Phi \in H\ ,\quad (\Phi|A(.\ ,\ y) = \Phi(y))\ .$$

En particulier, si $\Phi = A(.\ ,\ y')$, on en déduit

$$(A(.\ ,\ y')|A(.\ ,\ y)) = A(y\ ,\ y')\ .$$

C'est la propriété de reproduction. Appliquons ces résultats et ces notions à $Y = X^c$.

(4.9) PROPOSITION.

(a) <u>Pour toute</u> Φ <u>de</u> $F(\overline{X}^c)$ <u>et pour tout</u> z <u>de</u> X^c , <u>on a la formule de représentation intégrale</u>

$$\Phi(\overline{z}) = \int \Phi(\overline{\omega'})\ \exp(\omega'\ ,\ \overline{z})\ dP(\omega')\ .$$

(b) <u>Le sous-espace hilbertien</u> $F(X^c)$ <u>est défini par le noyau reproduisant</u>

$$A(z\ ,\ z') = \exp(z\ ,\ \overline{z'})\ .$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de prouver (a). La formule est vraie pour Φ polynomiale cylindrique d'après les résultats connus relatifs à la dimension finie. Pour en déduire (4.9.1) pour Φ quelconque, on note que, pour $\overline{z}$ fixé, les deux membres de (4.9.1) définissent des formes linéaires continues sur $F(\overline{X}^c)$, qui coïncident sur un sous-espace dense. Ces deux formes coïncident donc partout.

(4.10) <u>Etats cohérents</u> : Pour tout $z \in X^c$, la fonction $A(z,.)=\theta_z$ est appelée état cohérent associé à z. On a

$$\|\theta_z\|^2 = \int \exp(2(\omega + z)\ dP(\omega) = \exp(+\ \|z\|^2)\ .$$

L'état cohérent normalisé associé à z est par définition

$$|z\rangle = \exp(z\overline{\omega} - \|z\|^2/2)\ .$$

On peut voir que les états cohérents forment un système total dans $F(\overline{X}^c)$, et qu'ils correspondent par transformation de Fourier à des paquets d'onde $C \exp(C',x)$ dans l'espace de Segal $L^2(X)$.

On peut calculer le produit scalaire de deux états cohérents, obtenir une formule de décomposition de l'unité, ...

(4.11) Représentation intégrale des opérateurs non bornés de l'espace de Segal et de l'espace de Fock : En mécanique quantique usuelle, un procédé de quantification associe à toute fonction $f(q, p)$ sur l'espace de phase un opérateur non borné $\hat{f}$ de $L^2(\underset{\sim}{R}^n)$: on dit que $\hat{f}$ est l'observable quantique associé à l'observable classique f. Par exemple, H. WEYL a donné un procédé de quantification utilisant la représentation de f comme intégrale de Fourier ; puis il en déduit une représentation intégrale pour $\hat{f}$. Les travaux récents de KOSTANT et de J.-M. SOURIAU aboutissent à des formules du même genre.

Il semble donc utile de trouver des formules analogues en dimension infinie. Ce problème est étudié dans un travail en cours, effectué en collaboration avec R. RACZKA.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARGMANN (V.). - Remarks on a Hilbert space of analytic functions, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 48, 1962, p. 199-204.

[2] DWYER (A. W.). - Partial differential equations in Fischer-Fock spaces for the Hilbert-Schmidt holomorphy type, Bull. Amer. math. Soc., t. 77, 1971, p. 725-730.

[3] KLAUDER (J. R.) and SUDARSHAN (E. C. G.). - Fundamentals of quantum optics. - New York, Benjamin, 1968 (Mathematical Physics Monographs Series).

[4] NELSON (E.). - Probability theory and euclidean field theory, "Constructive quantum field theory", p. 94-124. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Physics, 25).

[5] SCHWARTZ (L.). - Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés (noyaux reproduisants), J. Anal. math., Jerusalem, t. 13, 1964, p. 115-256.

[6] SEGAL (I. E.). - Tensor algebras over Hilbert spaces, I., Trans. Amer. math. Soc., t. 81, 1956, p. 106-134.

[7] SEGAL (I. E.). - Mathematical characterization of the physical vacuum for a linear Bore-Einstein field, Illinois J. Math., t. 6, 1962, p. 500-523.

Paul KRÉE
Tour Mexico, B. P. 1325
65 rue du Javelot
75645 PARIS CEDEX 13