SÉMINAIRE PAUL KRÉE

MIRELLA KRÉE

Classes K^s du type Sobolev

Séminaire Paul Krée, tome 1 (1974-1975), exp. n° 10, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1974-1975__1__A11_0>

© Séminaire Paul Krée
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Paul Krée » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CLASSES K^s DU TYPE SOBOLEV

par Mirella KRÉE

Soient $1 \leq p \leq \infty$, et s entier positif. On rappelle que l'espace de Sobolev $W^{p,s}(\underset{\sim}{R}^n)$ peut être défini comme l'espace des fonctions g de $L^p(\underset{\sim}{R}^n)$, dont toutes les dérivées distribution, d'ordre inférieur ou égal à s , appartiennent à $L^p(\underset{\sim}{R}^n)$. De plus, la théorie des distributions de L. SCHWARTZ permet de définir très simplement les espaces de Sobolev et, en particulier, de définir les espaces $W^{p',-s}(\underset{\sim}{R}^n)$ de distribution avec $p^{-1} + p'^{-1} = 1$.

Remplaçons cette définition de $W^{p,s}(\underset{\sim}{R}^n)$ par une définition se prêtant mieux à généralisation : $W^{p,s}(\underset{\sim}{R}^n)$ est l'espace des $g \in L^p(\underset{\sim}{R}^n)$ telles que

$$D^j g \in L^p(\underset{\sim}{R}^n , \bigodot_j \underset{\sim}{C}^n) \quad \text{pour} \quad j = 0 , 1 \ldots s .$$

On constate alors que l'on a fait dans les deux exposés précédents tout ce qu'il fallait faire pour donner un sens à cette définition en dimension infinie. En effet, on a défini les classes L^p vectorielles dans l'exposé 8, et la dérivation au sens des prodistributions dans l'exposé 9. Le lecteur intéressé par le développement de ce point de vue pourra consulter [6].

Mais ceci est un peu compliqué ; et le cas particulier le plus important est celui où X est hilbertien, où $\mu = \nu$, et où $p = 2$. Dans ce cas, on va donner une définition directe des classes $K^s(X) = W^{2,s}(X)$, en utilisant la technique des séries de Fourier. On va aussi énoncer une propriété de trace. Ces résultats ont été annoncés dans [3].

0. Rappels.

0-1. Rappels sur les prodistributions introduites par Paul KRÉE [4] et [5].

Soit X un espace localement convexe, séparé, réel, de dual topologique X' . Soit $F_u = (A_i)_{i\in I}$ une "bonne famille" de sous-espaces fermés de codimension finie, c'est-à-dire que F_u est d'intersection nulle et filtrante à droite, l'ordre sur I étant induit par l'ordre inverse de la relation d'inclusion. On pose donc $i \geq j$ si $A_i \subset A_j$. En considérant, pour tout i , les espaces $X_i = X/A_i$, la surjection canonique s_{ij} de X_i sur X_j étant définie pour tout couple (i , j) de $I \times I$ tel que $i \geq j$, on obtient un système projectif $\pi_u = (X_i , s_{ij})$ d'espaces vectoriels. Notons s_i la surjection canonique de X sur X_i .

(0-1.1) Cas particulier : La théorie des probabilités cylindriques utilise la bonne famille maximale F_m de tous les sous-espaces vectoriels fermés de codimension finie de X , d'où le système projectif usuel π_m .

Soit X muni d'une bonne famille F_u , on appelle <u>fonction</u> u-<u>cylindrique</u> une fonction numérique φ , définie sur X , telle que

$$(0\text{-}1.1.1) \qquad \exists\, i \in I\,, \quad \exists\, \varphi_i : X_i \longrightarrow \underset{\sim}{C}\,, \quad \varphi = \varphi_i \circ s_i\,.$$

En particulier, si φ_i est un polynôme, on dit que φ est polynomiale u-cylindrique. L'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{P}_{u\text{-cyl}}(X)$ ou simplement $\mathcal{P}_{cyl}(X)$ si $F_u = F_m$. X_i est appelée une base de φ . Par la suite, toutes les fonctions numériques considérées sont à valeurs complexes.

(0-1.2) <u>Définition</u> : L'espace X étant muni d'une "bonne famille" F_u , on appelle u-<u>prodistribution</u> T sur X une famille (T_i) de distributions T_i sur les espaces X_i , vérifiant la condition de cohérence suivante : pour tout couple (i,j), tel que $i \geq j$, et pour toute φ de $\mathcal{D}(X_j)$, $(\varphi \circ s_{ij})T_i$ est une distribution bornée sur X_i (intégrable au sens de Laurent SCHWARTZ) et $s_{ij}(T_i) = T_j$.

Si F_u est fixé sans ambiguité, on écrira simplement que T est une prodistribution.

On se rappelle que l'espace $\mathcal{O}_c(X_i)$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, à croissance très lente sur X_i , est l'espace des fonctions φ indéfiniment dérivables sur X_i s'écrivant $\varphi = P\psi$, où P est un polynôme (dépendant de φ), et ψ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dont toutes les dérivées tendent vers zéro à l'infini (voir [1]). Cet espace est noté $\mathcal{E}(X_i)$, et l'on note $\widetilde{\mathcal{E}}'(X_i)$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{O}_c'(X_i)$ dont la transformée de Fourier est analytique ; de telles distributions sont dites à décroissance ultra-rapide.

(0-1.3) <u>On remarque</u> :

(a) $\mathcal{E} - \widetilde{\mathcal{E}}'$ <u>est un couple d'e. v. en dualité séparante</u>.

(b) <u>L'ensemble des polynômes est dense dans</u> $\mathcal{E}$ <u>pour la topologie faible associée à cette dualité</u>.

En effet, soit φ dans $\mathcal{E}$ et T dans $\mathcal{E}'$:

(a) Si $(T\,,\varphi) = 0$ pour tout T de $\widetilde{\mathcal{E}}'$, il en résulte que $(\psi\,,\varphi) = 0$ pour toute ψ dans $\mathcal{D}$. Donc φ est nul.

(b) Si $(T\,,\varphi) = 0$ pour tout φ dans $\mathcal{E}$, il en résulte que $(T\,,P) = 0$ pour tout polynôme. Donc toutes les dérivées de $\hat{T}$ sont nulles à l'origine. D'où $T = 0$, vu l'analycité de $\hat{T}$.

(0-1.4) <u>Définition</u> : On appelle <u>prodistribution à décroissance ultra-rapide</u> une prodistribution $T = (T_i)$ sur X , telle que $T_i \in \widetilde{\mathcal{E}}'(X_i)$ pour tout i .

La condition de cohérence des T_i entraîne qu'une telle distribution définit une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{E}_{cyl}(X)$ des fonctions cylindriques φ sur X admettant la factorisation (0-1.1.1) avec $\varphi_i \in \mathcal{E}(X_i)$: il suffit de poser

$$T(\varphi) = (T_i\,, \varphi_i)\,.$$

On peut donc associer à toute fonction cylindrique φ la prodistribution $\varphi\nu$, définie par la forme linéaire suivante :

Si $\psi = \psi_j \circ s_j$ et $\varphi = \varphi_i \circ s_i$ sont deux éléments de $\mathcal{E}_{cyl}(X)$, on introduit k supérieur à i et j, et la forme linéaire s'écrit :

$$\psi \longmapsto (\varphi\nu , \psi) = (\nu , \varphi\psi) = (\nu_k , \varphi_k \varphi_k)$$

avec $\varphi_k = \varphi_i \circ s_{ki}$ et $\psi_k = \psi_j \circ s_{kj}$.

Comme en théorie des distributions, la fonction cylindrique φ est caractérisée par la prodistribution $\varphi\nu$, car $\varphi\nu = 0$ entraîne $\varphi = 0$. Par conséquent, pour simplifier l'écriture, pour toute $\varphi \in \mathcal{E}_{cyl}(X)$, la prodistribution $\varphi\nu$ est notée parfois φ ; mais ceci ne signifie pas que les fonctions cylindriques "sont" des prodistributions.

0-2. Un cas particulier.

Soit X un espace d'Hilbert réel séparable ; X est identifié à son dual et à ℓ^2, espace des suites de carré sommable, moyennant le choix d'une base orthonormée $(e_n)_n$ de X.

Considérons la "bonne famille" A_0, A_1, ... où A_n est le sous-espace fermé engendré par les e_i, $i \geqslant n + 1$. On obtient alors le système projectif $\pi_V = (X_n , s_{n'n})$ en identifiant $X_i = X/A_i$ à $\{0\}$ si $i = 0$, et au sous-espace engendré par $\{e_1 , \dots , e_n\}$ si $i > 0$.

Soit H_0, H_1, ... la suite des polynômes d'Hermite, on pose :

$$\mathcal{H}_n(t) = 2^{-n/2} (n!)^{-1/2} H_n(t/\sqrt{2}) .$$

Si $k = (k_1 \dots k_n)$ et $x = (x_1 , \dots , x_n)$, on pose

$$\mathcal{H}_k(x) = \mathcal{H}_{k_1}(x_1) \dots \mathcal{H}_{k_n}(x_n) .$$

(0-2.5) Propriété : Vu (0-1.3), pour tout n, la suite $(\mathcal{H}_k)$, où k décrit la famille des multi-indices k d'ordre n, forme un système libre total dans l'espace $\mathcal{E}(X_n)$ muni de la topologie faible associée à la dualité avec $\tilde{\mathcal{E}}'(X_n)$.

De plus, pour tout n et tout k, on a

$$\mathcal{H}_k \circ s_{n+1,n} = \mathcal{H}_{k_1,\dots,k_n,0} .$$

Pour T_n fixé dans $\tilde{\mathcal{E}}'(X_n)$ les nombres $(T_n , \overline{\mathcal{H}}_k)$ sont appelés les coefficients de T_n par rapport aux $\mathcal{H}_k$.

En faisant varier n, on peut définir les coefficients suivants.

(0-2.6) Coefficients d'une v-prodistribution $T = (T_n) \in \tilde{\mathcal{E}}'(X)$: Pour tout n et tout multi-indice $k = (k_1 , \dots , k_n)$, on pose

$$a_k(T) = T(\tilde{\mathcal{H}}_k) = (T_n , \overline{\mathcal{H}}_k) ,$$

où les $\tilde{\mathcal{H}}_k = \mathcal{H}_k \circ s_n$ sont les fonctions polynomiales cylindriques d'Hermite, normalisées.

La suite de ces coefficients caractérise T , et la condition de cohérence des T_n se traduit par les conditions

$$a_{k_1,\ldots,k_n,0}(T) = a_{k_1\ldots k_n}(T) .$$

0-3. Dérivation relative.

(0-3.7) La théorie de la dérivation au sens des distributions est formulée en identifiant toute $f \in L^1_{loc}(\underset{\sim}{R}^n)$ à la distribution $f\,dx$. Elle fait donc jouer un rôle très priviligié à une mesure de Lebesgue. En vue des applications à la dimension infinie, si X est euclidien de dimension finie n , on est amené à remplacer dx par la mesure gaussienne réduite ν_n qui s'exprime de la manière suivante : Si on choisit une base orthonormée quelconque (e_j) dans X

$$\nu_n = \alpha_n(x)\,dx \ , \quad \alpha_n(x) = (2\pi)^{-n/2} \exp(-\tfrac{1}{2} \textstyle\sum x_j^2) .$$

Pour $\varphi_n \in L^1_{loc}(\underset{\sim}{R}^n)$ et $\psi \in \mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^n)$, on pose

$$(\varphi_n \ , \ \psi) = \int \varphi_n\,\psi\,d\nu_n$$

(0-3.7.1) $$\partial_\ell = \frac{\partial}{\partial x} \ , \quad \check{\partial}_\ell = \alpha_n^{-1}\,\partial_\ell\,\alpha_n = \partial_\ell - x_\ell$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} \ , \quad \check{\partial}^\alpha = \check{\partial}_1^{\alpha_1} \ldots \check{\partial}_n^{\alpha_n} \quad \text{si} \quad \alpha = (\alpha_1 , \ldots , \alpha_n) .$$

Par transposition de l'opérateur $-\check{\partial}_\ell$ de $\mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^n)$, on définit un opérateur $\tilde{\partial}_\ell$ de $\mathcal{D}'(\underset{\sim}{R}^n)$, appelé opérateur de dérivation de densité dans la direction x_ℓ , car

$$\tilde{\partial}_\ell(\varphi_n\,\nu_n) = (\partial_\ell\,\varphi_n)\nu_n \quad \text{si} \quad \varphi_n \in C^1(\underset{\sim}{R}^n) .$$

Plus généralement, si $V = \sum_1^n \alpha_\ell\,e_\ell$ est un vecteur quelconque de X , on définit l'opérateur $\tilde{\partial}/\partial V$ de dérivation de densité dans la direction V par $\sum_1^n \alpha_\ell\,\tilde{\partial}_\ell$. Notons que $\mathcal{E}'_{cyl}(X)$ est stable par ces opérateurs.

Par transposition de $-\partial_\ell$ opérant dans $\mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^n)$, on définit l'opérateur $\check{\partial}_\ell$ de dérivation absolue dans $\mathcal{D}'(\underset{\sim}{R}^n)$ qui prolonge l'opérateur $\check{\partial}_\ell$ de $\mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^n)$.

1. Définition équivalente des espaces $K^s(X)$.

Reprenons les hypothèses et les notations du §0-2.

Soit ν la probabilité cylindrique normale canonique sur X . ν est définie par le système projectif des $\nu_n = \nu \circ s_n$, où ν_n est la loi normale réduite sur X_n .

(1-8) Définition de $K^s(X_n)$: Soit l'espace

$$L^2_{\nu_n} = \{\varphi : \ X_n \longrightarrow C \ , \quad \|\varphi\|^2 = \int |\varphi|^2\,d\nu_n(x) < \infty\} .$$

Pour s entier ≥ 0 , on définit $K^s(X_n)$ comme l'espace des $f_n\,\nu_n \in \tilde{\mathcal{E}}'(X_n)$ telles que $(\partial/\partial x)^\beta f_n \in L^2_{\nu_n}$ pour tout multi-indice β de longueur $\leq s$. On munit $K^s(X_n)$ de la norme :

$$\|f_n \nu_n\|_s = \left(\sum_{\ell=0}^{s} |||D^\ell f_n|||^2\right)^{1/2}$$

(1-8.1) $$\text{avec} \quad |||D^\ell f_n|||^2 = \sum_{|\alpha|=\ell} \|(\tfrac{\partial}{\partial x})^\alpha f_n\|^2 \frac{|\alpha|!}{\alpha!} .$$

Développons f_n selon les $\mathcal{H}_\gamma$: $f_n(x) = \sum_\gamma a_\gamma \mathcal{H}_\gamma(x)$, où γ varie sur l'ensemble des multi-indices d'ordre n .

Si on pose $P_0(t) \equiv 1$; $P_1(t) \equiv t$; $P_2(t) \equiv t(t-1)$, ... , on obtient

$$(\tfrac{\partial}{\partial x})^\alpha f_n(x) = \sum_\gamma a_\gamma \sqrt{P_{\alpha_1}(\gamma_1) \dots P_{\alpha_n}(\gamma_n)}\, \mathcal{H}_{\gamma_1-\alpha_1}(x_1) \dots \mathcal{H}_{\gamma_n-\alpha_n}(x_n)$$

et

$$\|f_n \nu_n\|_s^2 = \sum_\gamma |a_\gamma|^2 \sum_{\ell=0}^{s} \left[\sum_{|\alpha|=\ell} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} P_{\alpha_1}(\gamma_1) \dots P_{\alpha_n}(\gamma_n)\right] .$$

Or le crochet est égal à $P_\ell(|\gamma|)$, car, pour tout nombre complexe z et tout entier $\ell \geq 1$, on a la relation

$$P_\ell(t+z) = \sum_{\beta=0}^{\ell} \binom{\ell}{\beta} P_\beta(t)\, P_{\ell-\beta}(z) ,$$

facilement vérifiable par récurrence. D'où :

$$\|f_n \nu_n\|_s^2 = \sum_\gamma |a_\gamma|^2\, Q(|\gamma|) \quad \text{avec} \quad Q(t) = t^s + \dots + 1 ,$$

$Q(t) > 0$ pour tout entier $t \geq 0$.

On peut donc trouver une constante $C(s)$, indépendante de n , telle que

$$C^{-1}\|f_n\|'_s \leq \|f_n\|_s \leq C\|f_n\|'_s ,$$

où l'on a introduit sur $K^s(X_n)$ la norme équivalente

(1-8.2) $$\|f_n\|'_s = \left(\sum_\gamma |a_\gamma|^2 (1+|\gamma|)^s\right)^{1/2} .$$

Cette norme permet de définir $K^s(X_n)$ pour s réel quelconque.

<u>En effet, si</u> s <u>est réel et positif, on définit</u> $K^s(X_n)$ <u>comme l'espace des fonctions</u> f_n <u>telles que</u> :

$$f_n \in L^2_{\nu_n} \ \underline{\text{et}}\ \sum_k |a_k|^2 (1+|k|)^s < +\infty ,$$

a_k <u>étant les coefficients de la distribution à décroissance ultra-rapide</u> $f_n \nu_n$ <u>sur</u> X_n .

$$a_k = (2\pi)^{-n/2} \int f_n(x) \exp(-\|x\|^2/2)\, \mathcal{H}_k(x)\, dx .$$

Si $s > 0$, on a les inclusions suivantes

$$\mathcal{Q} \subset K^s \underset{\text{dense}}{\subset} L^2 \subset {}'(K^s) \subset {}'\mathcal{Q}$$

les deux dernières inclusions étant les adjointes des premières.

(1-9) THÉORÈME. - <u>Tout élément</u> $T \in {}'(K^s)$, <u>avec</u> $s > 0$, <u>est une distribution à décroissance ultra-rapide</u>.

Pour la démonstration, utilisons le lemme suivant.

(1-10) LEMME. - <u>Toute forme antilinéaire continue</u> T <u>sur</u> K^s <u>s'écrit</u>

$$T = \sum_{|\alpha|\leq\sigma} (-1)^{|\alpha|} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} (g_\alpha \nu) \quad \underline{\text{avec}} \quad g_\alpha \in L^2_{\nu_n} ,$$

σ <u>étant un entier</u> $\geq s \geq 0$.

<u>Preuve</u> : Si s est réel > 0 , $s = [s] + s'$ avec $s' > 0$, alors la forme antilinéaire T sur K^s est aussi une forme sur K^σ avec $\sigma = [s] + 1$.

Considérons maintenant l'application injective

$$\alpha : K^s \longrightarrow \prod_{|\alpha|\leq\sigma} L^2$$

$$f \longmapsto \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f\right\}$$

Elle identifie K^s au sous-espace vectoriel normé $\alpha(K^s)$ de $\prod_{|\alpha|\leq\sigma} L^2$. On en déduit, par le théorème de Hahn-Banach, que si T est une forme antilinéaire continue sur K^s , elle se prolonge en une forme antilinéaire continue sur $\prod_{|\alpha|\leq\sigma} L^2$, donc il existe une famille $(g_\alpha)_\alpha$ d'éléments de L^2 telle que :

$$\forall f \in K^s ; \quad (T , f) = \sum_{|\alpha|\leq\sigma} \left(g_\alpha , \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f\right) = \sum_{|\alpha|\leq\sigma} (-1)^{|\alpha|} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} g_\alpha , f\right) .$$

Soit maintenant $T \in {}'(K^s)$, $s > 0$, on peut alors définir ses coefficients par rapport au système $\mathcal{H}_k$, et soit $a_k(T) = (T , \overline{\mathcal{H}}_k)$.

Or K^s est identifié à l'espace des suites $a = (a_k)$ telles que

$$\sum_k |a_k|^2 (1 + |k|)^s < +\infty :$$

C'est un espace d'Hilbert avec le produit scalaire $(a , b) = \sum_k a_k \overline{b}_k (1 + |k|)^s$ donc, pour le théorème de Riesz, étant donnée une forme antilinéaire T sur K^s , il existe $\theta = (\theta_k) \in K^s$ tel que

$$\forall a \in K^s , \quad T(a) = (a|\theta) = \sum_k \theta_k \overline{a}_k (1 + |k|)^s .$$

En particulier, si

$$a = (\mathcal{H}_k) , \quad a_k \triangleq T(\mathcal{H}_k) = \overline{a}_k (1 + |k|)^s ,$$

donc $\theta_K = \overline{a}_K/(1 + |k|)^s$, et θ est tel que

$$\sum_k |\theta_k|^2 (1 + |k|)^s = \sum_k |a_k|^2 (1 + |k|)^{-s} < +\infty .$$

Et inversement, en partant de θ , on peut définir un élément $T \in {}'(K^s)$. On peut donc poser la définition suivante.

(1-11) <u>Définition</u> : (s réel > 0) $K^{-s}(X_n)$ est l'espace des distributions T à décroissance ultra-rapide sur X_n , telles que la suite (a_k) de ses coefficients, par rapport au système $\mathcal{H}_k$, vérifie

$$\sum_k |a_k|^2 (1 + |k|)^{-s} < +\infty .$$

K^{-s} est l'antidual de K^s , et on a les inclusions

$$(s > 0) \qquad K^s \subset L^2 \subset K^{-s} .$$

(1-12) <u>Définition de</u> $K^s(X)$: Nous allons d'abord définir $K^s(X)$ comme un espace de v-prodistributions, c'est-à-dire comme un espace de prodistributions relativement à la bonne famille des A_n. Puis, après l'étude de la transformation de Fourier, on verra que toute $T = (T_n)$ de $K^s(X)$ définit naturellement une prodistribution relative à la bonne famille maximale.

(1-13) <u>Définition</u> : <u>$K^s(X)$ est l'espace des suites $T = (T_n)_n$, $T_n \in K^s(X_n)$ telles que, pour tout $n \geq 1$, $T_n = s_{n+1,n}(T_{n+1})$ et $\sup_n \|T_n\|_s < \infty$, $K^s(X)$ est donc un espace de v-prodistributions. Muni de la norme</u>

$$\|T\|_s = \sup_n \|T_n\|_s \, .$$

<u>$K^s(X)$ est un espace de Hilbert.</u>

En effet, $K^s(X)$ est préhilbertien, car c'est un espace vectoriel dont la norme vérifie l'égalité du parallélogramme :

$$\|T^1 + T^2\|_s + \|T^1 - T^2\|_s = 2(\|T^1\|_s^2 + \|T^2\|_s^2)$$

pour tout couple $T^1 = (T_n^1)$, $T^2 = (T_n^2)$ d'éléments de $K^s(X)$. On obtient cette égalité en l'écrivant pour T_n^1 et T_n^2 dans $K^s(X_n)$, et en passant à la limite pour $n \longrightarrow +\infty$ après avoir observé qu'on a

$$\|T\|_s = \lim_{n\to+\infty} \|T_n\|_s \, ,$$

car $\|T_n\|_s$ est une fonction croissante de n.

Le fait que $K^s(X)$ est complet résulte du fait que $K^s(X_n)$ est complet. En effet, si $(T^i)_i$ est une suite de Cauchy dans $K^s(X)$, pour tout n, $(T_n^i)_i$ est une suite de Cauchy dans $K^s(X_n)$ et, de plus, la convergence est uniforme par rapport à n.

Posons $T_n = \lim_{n\to+\infty} T_n^i$, et considérons la suite $T = (T_n)$. On a

$$T_n \in K^s(X_n) \quad \text{et} \quad T_n = s_{n+1,n}(T_{n+1}) \, ,$$

car l'hypothèse de cohérence $T_n^i = s_{n+1,n}(T_{n+1}^i)$ se traduit sur les coefficients a_k^i de la prodistribution T^i par la relation

$$a^i_{k_1,\dots,k_n,0} = a^i_{k_1,\dots,k_n} \, ,$$

d'où la limite pour $i \longrightarrow +\infty$ la condition de cohérence pour T. De plus, on a pour i assez grand et tout n,

$$\|T_n\|_s = \|T_n - T_n^i\|_s + \|T_n^i\|_s < \varepsilon + \|T^i\| < \infty \, .$$

La suite $\|T_n\|_s$ étant bornée, on pose

$$\|T\|_s = \sup_n \|T_n\|_s < \infty \, .$$

2. <u>Propriétés des espaces</u> $K^s(X)$.

2-1. Densité des fonctions polynomiales cylindriques.

On définit l'espace $\mathcal{P}_{v\text{-cyl}}(X)$ des fonctions polynomiales cylindriques sur X

comme l'espace des fonctions $\tilde{P}$ sur X du type $\tilde{P} = P \circ s_n$, où P est un polynôme sur X_n, et où n est quelconque.

(2-1.14) PROPOSITION. - <u>L'ensemble des prodistributions du type</u> $\tilde{P}\nu$ <u>avec</u> $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{v-cyl}(X)$ <u>est dense dans</u> $K^s(X)$.

En effet, soit $T = (T_n)$ un élément de $K^s(X)$. Comme $\|T\|_s = \sup_n \|T_n\|_s$, il existe $\bar{n}$ tel que $\|T\|_s - \|T_{\bar{n}}\|_s < \varepsilon/2$.

Or $T_{\bar{n}} \in K^s(X_{\bar{n}})$, et soient $a_{k_1 \ldots k_{\bar{n}}}$ ses coefficients sur $X_{\bar{n}}$. Comme $T_{\bar{n}}$ peut être considéré comme la prodistribution de coefficients

$$a_{k_1 \ldots k_n} = \begin{cases} a_{k_1 \ldots k_{\bar{n}}} & \text{si } k_n = 0, \ \forall n > \bar{n}, \\ 0 & \text{si } k_n \neq 0 \text{ pour au moins un } n > \bar{n}, \\ a_{k_1 \ldots k_n, 0 \ldots 0} & \text{si } n < \bar{n}, \end{cases}$$

on a

$$\|T - T_{\bar{n}}\|_s^2 = \sup_{n > \bar{n}} \Big(\sum_{\substack{k = k_1 \ldots k_n \\ k_n \neq 0 \text{ pour au moins un } n > \bar{n}}} |a_{k_1 \ldots k_n}|^2 (1 + |k|)^s \Big) = \|T\|_s^2 - \|T_{\bar{n}}\|_s^2 < \|T\|_s .$$

De plus, comme la série $\sum_{k = k_1 \ldots k_{\bar{n}}} |a_k|^2 (1 + |k|)^s$ converge, il existe N entier tel que

$$\sum_{|k| > N} |a_k|^2 (1 + |k|)^s < \varepsilon^2 .$$

Alors

$$P(x_1, \ldots, x_{\bar{n}}) = \sum_{|k| \leq N} a_k \mathcal{H}_k$$

est un polynôme sur $X_{\bar{n}}$ tel que $\|T_{\bar{n}} - \tilde{P}\nu\|_s < \varepsilon$ avec $\tilde{P} = P \circ s_{\bar{n}}$, d'où

$$\|T - \tilde{P}\nu\|_s \leq \|T - T_{\bar{n}}\|_s + \|T_{\bar{n}} - \tilde{P}\nu\|_s < \varepsilon(1 + \|T\|_s) .$$

2-2 Antidual de $K^s(X)$.

(2-2.15) Si s est positif, pour tout n, on a l'inclusion $K^s(X_n) \subset K^s(X)$, car les éléments $P_n \nu_n$ (avec P_n polynôme sur X_n) sont denses dans $K^s(X_n)$, et ils peuvent être considérés comme les éléments $(P_n \circ s_n)\nu$ de $K^s(X)$.

De plus, l'injection $i_n : K^s(X_n) \longrightarrow K^s(X)$ est une isométrie. Soit maintenant ℓ une forme antilinéaire continue sur $K^s(X_n)$, $\ell \circ i_n$ est alors une forme antilinéaire continue sur $K^s(X_n)$, c'est-à-dire un élément $T_n \in K^{-s}(X_n)$, et on a

$$\|T_n\|_{-s} = \|\ell \circ i_n\| \leq \|\ell\| .$$

Comme la réunion des $K^s(X_n)$ est dense dans $K^s(X)$, on a

(2-2.15.1) $$\sup_n \|T_n\|_{-s} = \sup_n \|\ell \circ i_n\| = \|\ell\| .$$

Pour montrer la cohérence des $(T_n)_n$, on considère les trois injections canoniques

$$K^s(X_n) \hookrightarrow K^s(X_{n+1}) \hookrightarrow K^s(X)$$

$$f\nu_n \longmapsto (f \circ s_{n+1,n})\nu_{n+1} \longmapsto (f \circ s_n)\nu \; .$$

On obtient alors

$$(\ell \circ i_n)f = (\ell \circ i_{n+1})(f \circ s_{n+1,n}) \; .$$

Ce qui s'écrit

$$\forall \; f \in K^s(X_n) \; , \quad (T_n \; , \; f) = T_{n+1}(f \circ s_{n+1,n}) \; ,$$

soit

$$T_n = s_{n+1,n}(T_{n+1}) \; .$$

$T = (T_n)$ est donc un élément de $K^{-s}(X)$.

Considérons maintenant l'application linéaire α

$$'K^s(X) \xrightarrow{\alpha} K^{-s}(X)$$

$$\ell \longmapsto T$$

où $'K^s(X)$ est l'antidual de $K^s(X)$. Vu (2-2.15.1), α est une isométrie. De plus, α est à image dense. Pour montrer cette densité, comme les $\sum_{|k| \leq N} \alpha_k \tilde{\mathcal{H}}_k$ sont denses dans $K^{-s}(X)$, il suffit de montrer que tout $\tilde{\mathcal{H}}_{k_0}$ appartient à l'image de α . Or si l'on considère l'élément λ de $'K^s(X)$ du type

$$\lambda \; : \; K^s(X) \longrightarrow \underset{\sim}{C}$$

$$\alpha_k \tilde{\mathcal{H}}_k \longrightarrow \bar{\alpha}_{k_0}$$

$k_0 = (k_1 \; , \; \ldots \; , \; k_m)$ étant un multi-indice fixé, on a

$$\alpha(\lambda) = \tilde{\mathcal{H}}_{k_0} \; \nu = (\mathcal{H}_{k_0} \circ s_m)\nu \; ,$$

car $\lambda \circ i_m$ est représenté par $\mathcal{H}_{k_0} \; \nu_m$ de $K^{-s}(X_m)$.

Notons encore que si l'on considère les deux injections canoniques du diagramme

$$K^s(X) \xhookrightarrow{j} L^2(X) \xhookrightarrow{i} K^{-s}(X)$$

on voit que i est l'adjointe de j , car

$$(j^* \; \tilde{\mathcal{H}}_{k_0} | \tilde{\mathcal{H}}_k) = (\tilde{\mathcal{H}}_{k_0} | j\tilde{\mathcal{H}}_k) = \delta_k^{k_0} \; .$$

Finalement, on a montré la proposition suivante.

(2-2.16) PROPOSITION. - <u>Soit</u> $s \geq 0$. <u>L'adjointe de l'injection de</u> $K^s(X)$ <u>dans</u> $L^2(X)$ <u>identifie isométriquement l'antidual de</u> $K^s(X)$ <u>à</u> $K^{-s}(X)$.

2-3. Transformée de Fourier.

On rappelle (cf. exposé 2) que si $T = (T_i)$ est une prodistribution sur X tel que $\hat{T}_i$ soit une fonction localement intégrable sur $X_i^!$ pour tout i , on définit $\hat{T}$ comme la fonction définie sur $\Xi = \bigcup_i X_i^!$ qui coïncide avec $\hat{T}_i$ sur $X_i^!$.

(2-3.17) Définition des espaces $F^s(X^c)$.

Soient s réel quelconque, et X^c le complexifié de l'espace de Hilbert réel séparable X . On note $F^s(X^c)$ l'espace des fonctions analytiques Φ sur X^c admettant un développement de Taylor à l'origine.

(2-3.17.1) $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k \Phi(0,z)}{k!}$ tel que $\|\Phi\|^2_{F^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|D^k \Phi(0)\|^2(1+k)^s}{k!} < \infty$,

où $\|.\|$ désigne la norme dans le produit tensoriel hilbertien complété $\widehat{\bigodot}_k X^c$. Notons que cette condition entraîne (vu l'inégalité de Cauchy-Schwarz) la convergence normale et uniforme de (2-3.17.1) sur toute boule de X^c .

(2-3.18) LEMME (Transformée de Fourier en dimension finie). - Soit s réel quelconque, et soit $\dim X = n$. Alors la transformation

$$\theta_n : T \longmapsto \hat{T}(u) \exp(\tfrac{1}{2} \|u\|^2)$$

définit une isométrie de $K^s(X)$ sur $F^s(X^c)$.

En effet, soient ν_n la probabilité normale canonique sur X , et $T = P\nu_n$ la distribution correspondant au polynôme $P(x)$, $x = (x_1 , \dots , x_n)$ défini sur X.

On a $P(x) = \sum_{|k|\leq N} a_k \ {}_k(x)$, avec $k = (k_1 , \dots , k_n)$.

D'après une relation de [7] (page 582) si $n \in \underset{\sim}{N}$ et $u \in \underset{\sim}{R}$,

$$\mathfrak{F}(\mathcal{H}_n \ \nu_1)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_n(y) \exp(-i(u,y) \ d\nu_1(y) = (-1)^n(n!)^{-1/2} u^n \exp(-2u/2) ,$$

d'où $\mathfrak{F}(P) = \exp(- \frac{1}{2} \|u\|^2) \ \Phi(u)$ avec $u = (u_1 , \dots , u_n)$ et

$$\Phi(u) = \sum_{k=p}^{N} (k!)^{-1}(k! \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \ u^\alpha(\alpha!)^{-1/2}(- i)^{|\alpha|}) .$$

Considérons le polynôme de la dernière parenthèse comme un élément du produit tensoriel symétrique hilbertien $\bigodot_k X$, alors on voit que

$$\Phi(u) = \sum_{k=0}^{N} \frac{D^k \Phi(0 , u)}{k!}$$

avec la norme de $D^k \Phi(0)$ dans cet espace égal à

$$\|D^k \Phi(0)\|^2 = \sum_{|j|=k} |a_j|^2 .$$

On obtient

$$\|\Phi\|^2_{F^s} = \sum_{k=0}^{N} (\sum_{|j|=k} |a_j|^2) \frac{(1 + k)^s}{k!} = \sum_k |a_k|^2(1 + |k|)^s = \|T\|^2_s ,$$

donc une isométrie de l'ensemble des éléments de $K^s(X)$ du type $P\nu_n$ sur l'ensemble des polynômes de $F^s(X^c)$, d'où par prolongement le lemme.

(2-3.19) PROPOSITION (Transformée de Fourier en dimension infinie). - Soient s réel quelconque, et X de dimension infinie, identifié à son dual. Alors, la transformation θ ,

$$T \longmapsto \hat{T}(u) \exp(\tfrac{1}{2} \|u\|^2) ,$$

réalise une isométrie de $K^s(X)$ sur l'ensemble des restrictions à $\bigcup_i X_i$ des éléments de $F^s(X^c)$.

Démonstration : Soit $T = \tilde{P}\nu$ la ν-prodistribution correspondant à la fonction ν-polynomiale cylindrique $\tilde{P} = P \circ s_n$ basée sur X_n . On a

$$\hat{T}(u) = \int \exp(-u\ ,\ x)\ dT(x) \quad \text{avec} \quad u \in \cup_j X_j\ .$$

On peut supposer $u \in X_{n'}$ avec $n' \geq n$. Notons que ν est le produit tensoriel (cf. exposé 2) de la mesure ν_n sur X_n et de la promesure normale canonique ν'_n sur $X_n^{\perp}$.

D'où

$$T(u) = \iint \exp(-i \textstyle\sum_1^{n'} u_j\ x_j)\ P(x_1\ ,\ldots,\ x_n)\ d\nu_n\ d\nu'_n$$

$$= \int \exp(-i \textstyle\sum_1^{n} u_j\ x_j)\ P(x_1,\ldots,x_n)\ d\nu_n \int \exp(-i \sum_{n+1}^{n'} u_j\ x_j)\ d\nu'_n(x_{n+1},\ldots x_{n'}) .$$

Or vu le lemme (2-3.18), la première intégrale est égale à

$$\theta_n(P)(u_1\ ,\ \ldots\ ,\ u_n)\ \exp(-\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_1^n u_j^2)$$

et

$$\hat{T}(u) = \exp(-\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_1^{n'} u_j^2)(\theta_n\ P)(u_1\ ,\ \ldots\ ,\ u_n)\ .$$

On note que la norme de $\theta_n\ P$ dans $F^s(X_n)$ est égale à la norme de la fonction polynomiale cylindrique $(\theta_n\ P) \circ s_n$ dans $F^s(X_n)$.

D'autre part, ces fonctions sont denses dans $F^s(X^c)$. D'où le résultat.

2-4. Définition de $K^s(X)$ sans faire intervenir le choix d'une base.

On va définir, grâce à la transformation de Fourier, une isométrie β de $K^s(X)$ sur un espace U de prodistributions relatives à la bonne famille maximale F_m de X .

Le système projectif correspondant $\pi_m = (X_j\ ,\ s_{jk})$ est formé par la famille X_j des sous-espaces de dimension finie de X , la surjection s_{jk} étant la projection orthogonale de X_j sur X_k , définie chaque fois que X_j contient X_k . Identifions X à son dual, de même que chaque X_j . Soit $(e_n)_n$ une base orthonormée quelconque de X .

Soit $F = \theta(T) \in F^s(X^c)$ avec $T = (T_n) \in K^s(X)$.

A tout sous-espace X_j , on peut associer la distribution $T_j \in K^s(X_j)$, dont la transformée de Fourier est la restriction de $F(u)\ \exp(\frac{1}{2}\ ||u||^2)$ à X_j . Pour $X_j \supset X_k$, la transformée de Fourier de T_k est la restriction de $\hat{T}_j$ à X_k , ce qui entraîne la cohérence des T_j . De plus, par transformation de Fourier, on voit que

$$\sup_j ||T_j||_s = ||F||_{F^s} = \sup_n ||T_n||\ .$$

(2-4.20) PROPOSITION. - L'application $\beta\ :\ (T_n)_n \longmapsto (T_j)_j$ réalise une bijection isométrique de $K^s(X)$ sur l'espace U des prodistributions $(T_j)_j$ sur X telles

<u>que</u> $\sup_j \|T_j\|_s$ <u>soit borné.</u>

On identifie par la suite U et $K^s(X)$.

(2-4.21) <u>Remarque.</u>

Notons que les démonstrations du §2 s'adaptent en remplaçant :

la bonne famille F_V par la bonne famille maximale,

le filtre de Fréchet sur la famille des X_n par le filtre des sections terminales sur les (X_j) pour la relation d'ordre définie par l'inclusion,

$\mathcal{P}_{V-cyl}(X)$ par $\mathcal{P}_{cyl}(X)$.

On aurait obtenu ainsi une présentation ne faisant pas intervenir au départ le choix d'une base. Puis l'étude de la transformation de Fourier aurait permis de construire, moyennant le choix d'une base, une isométrie de U sur $K^s(X)$. De toute manière la construction de cette isométrie est nécessaire pour caractériser tout élément de U par son développement en série de Fourier.

(2-4.22) LEMME. - <u>L'espace</u> $K^s(X)$ <u>est invariant par le groupe orthogonal.</u>

On rappelle la définition de l'image ℓT d'une prodistribution bornée $(T_j)_j$ sur X par une application linéaire continue $\ell : X \longrightarrow Y$ (cf. exposé 2) : pour tout sous-espace fermé B_j de codimension finie dans Y , on pose $Y_j = Y/B_j$. D'où une injection canonique ℓ_j de $X_j = Y/\ell^{-1}(B_j)$ dans Y_j . On définit ℓT par la famille cohérente des $\ell_j(T_j)$ sur les Y_j .

De plus, on a

$$\widehat{\ell T}(v) = \hat{T}(\ell' v) \quad \text{pour tout } v \text{ dans } Y' .$$

Ici, $Y = X$, et ℓ est orthogonale. Le lemme résulte donc, via la transformation de Fourier, de l'invariance de $F^s(X^c)$ par le groupe orthogonal.

2-5. <u>Opérateur de dérivation de densité dans</u> $K^s(X)$.

Soit V un vecteur quelconque de X , muni de la bonne famille maximale. On rappelle la définition de l'opérateur de dérivation de densité $\tilde{\partial}/\partial V$ dans $\mathcal{L}'_{cyl}(X)$ associé à V (cf. exposé 9). On note V_j la projection orthogonale de V sur un sous-espace X_j quelconque de dimension finie de X , et $\tilde{\partial}/\partial V_j$ l'opérateur de dérivation associé à V_j , opérant dans $\mathcal{L}'(X_j)$. On peut vérifier que si $T = (T_j)$ est une prodistribution quelconque de $\mathcal{L}'_{cyl}(X)$, alors la famille des distributions $\tilde{\partial}/\partial V_j\, T_j \in \mathcal{L}'(X_j)$ est cohérente. Elle définit donc une prodistribution sur X notée $(\tilde{\partial}/\partial V)T$.

(2-5.23) PROPOSITION. - <u>Pour tout</u> s <u>réel et tout</u> $V \in X$, <u>l'opérateur</u> $\tilde{\partial}/\partial V$ <u>définit par restriction un opérateur continu de</u> $K^s(X)$ <u>dans</u> $K^{s-1}(X)$.

On peut supposer $\|V\| = 1$, et soit (e_n) une base orthonormée de X telle que

$e_1 = V$. Vu la densité dans $K^s(X)$ de $\mathcal{P}_{v\text{-cyl}}(X)$, on est amené à démontrer une inégalité

$$\exists\ c > 0\ ,\quad \|\frac{\tilde{\partial}}{\partial e_1}((P \circ s_n)\nu)\|_{s-1} \leqslant C\|(P \circ s_n)\nu\|_s$$

pour toute fonction v-polynomiale cylindrique du type $P \circ s_n$.

Posons

$$P(x) = \sum_k a_k\, \mathcal{H}_k(x)\ ,\quad k = (k_1\ , \dots\ , k_n) = (k_1\ , k')\ .$$

Or

$$\frac{\tilde{\partial}}{\partial e_1}((P \circ s_n)\nu) = (\frac{\partial P}{\partial x_1} \circ s_n)\nu\ .$$

D'où

$$\|\frac{\tilde{\partial}}{\partial e_1}((P \circ s_n)\nu)\|^2_{s-1} = \|\sum_k a_k \sqrt{k_1}\, \mathcal{H}_{k_1-1}(x_1)\, \mathcal{H}_{k'}(x')\|^2_{s-1}$$
$$= \sum |a_{k_1+1,k'}|^2(1 + k_1)(1 + k)^{s-1} = \sum |a_{k_1,k'}|^2\, k_1|k|^{s-1}\ .$$

Or, pour tout s réel, $a \geqslant 1$ et $b > 0$, on a

$$a(a + b)^{s-1} \leqslant C(1 + a + b)^s \quad \text{avec} \quad C = \sup\{1\ , 2^{-s}\}$$

d'où

$$\|\frac{\tilde{\partial}}{\partial e_1}((P \circ s_n)\nu)\|^2_{s-1} \leqslant C\|(P \circ s_n)\nu\|^2_s\ .$$

2-6. Les isométries Λ^ω .

(2-6.24) Soit ω un nombre complexe. On a, pour tout s , une isométrie

(2-6.24.1) $$F^s(X^c) \longrightarrow F^{s+\mathrm{Re}(\omega)}(X^c)$$

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{D^k\ \Phi(0\ , z)}{k!} \longmapsto \sum_{k=0}^\infty \frac{D^k\ \Phi(0\ , z)}{k!}\ (1 + k)^{-\omega/2}\ .$$

Par transformation de Fourier inverse, voir proposition (2-3.19), on en déduit, pour tout s , une isométrie notée Λ^ω de $K^s(X)$ sur $K^{s+\mathrm{Re}(\omega)}(X)$. Notons qu'elle laisse invariante $\mathcal{P}_{cyl}(X)$. Si l'on choisit une base orthonormée quelconque $(e_n)_n$ de X , on peut expliciter cette application en faisant intervenir les coefficients d'une prodistribution de $K^s(X)$ par rapport à cette base. Plus précisément, si $T \in K^s(X)$ a pour coefficients les nombres a_k , les coefficients correspondants de $\Lambda^\omega\, T$ sont $(1 + |k|)^{-\omega/2}\, a_k$:

$$a_k(\Lambda^\omega\, T) = (1 + |k|)^{-\omega/2}\, a_k(T)\ .$$

2-7. Propriété d'interpolation..

(2-7.25) PROPOSITION. - On se donne deux Hilberts réels X et Y , munis de leurs bonnes familles maximales, et deux couples de réels $(s_0\ , s_1)$, $(t_0\ , t_1)$. Soit A un opérateur linéaire de $\mathcal{P}_{cyl}(X)$ à $\tilde{\mathcal{E}}'_{cyl}(Y)$ qui se prolonge par continuité en deux opérateurs linéaires continus :

$$K^{s_j}(X) \longrightarrow K^{t_j}(Y)\ ,\quad j = 0\ , 1\ ,$$

de normes inférieures respectivement aux constantes positives C_0 et C_1. Posons

$$s(\theta) = (1-\theta)s_0 + \theta s_1 \,, \quad t(\theta) = (1-\theta)t_0 + \theta t_1 \,, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \,.$$

Alors A se prolonge par continuité en un opérateur linéaire continu de $K^{s(\theta)}(X)$ à $K^{t(\theta)}(Y)$ dont la norme est majorée par la constante $C_0^{1-\theta}\, C_1^{\theta}$.

Démonstration : Posons $z = \theta + iy$. Soit $f \in \mathcal{P}_{cyl}(X)$ et $g \in \mathcal{P}_{cyl}(Y)$.

Considérons la fonction de la variable complexe z

(2-7.25.1) $$F(z) = (A\Lambda^{s(z)}f \,,\, \Lambda^{-t(z)}g)$$

avec $s(z) = (1-z)s_0 + zs_1$ et $t(z) = (1-z)t_0 + zt_1$, la dualité intervenant dans (2-7.25.1) étant celle entre $K^{t(\theta)}(Y)$ et $K^{-t(\theta)}(Y)$. Vu l'hypothèse, on a

$$|F(iy)| \leq C_0\|f\|_0\,\|g\|_0 \quad \text{et} \quad |F(1+iy)| \leq C^1\|f\|_0\,\|g\|_0 \,.$$

De plus F est analytique si $0 < \operatorname{Re} z < 1$, et bornée continue sur la bande fermée. D'après le théorème des trois droites, on a

$$|F(\theta)| = |(A\Lambda^{s(\theta)}f \,,\, \Lambda^{-t(\theta)}g)| \leq C_0^{1-\theta}\, C_1^{\theta}\|f\|_0\,\|g\|_0 \,.$$

En posant $f_1 = \Lambda^{s(\theta)}f$, $g_1 = \Lambda^{-t(\theta)}g$, on obtient

$$|(Af_1 \,,\, g_1)| \leq C_0^{1-\theta}\, C_1^{\theta}\|f_1\|_{s(\theta)}\,\|g_1\|_{-t(\theta)} \,,$$

d'où $\|Af_1\|_{t(\theta)} \leq C_0^{1-\theta}\, C_1^{\theta}\|f_1\|_{s(\theta)}$, car f_1 et f_1 décrivent $\mathcal{P}_{cyl}(X)$ et $\mathcal{P}_{cyl}(Y)$ respectivement. Cette inégalité prouve la proposition.

2-8. Effet des translations.

(2-8.26) PROPOSITION. - Soit $a \in X$. L'application

$$U_a : f(x)\nu \longmapsto f(x-a)\exp(\tfrac{1}{2}(a\,,x) - \tfrac{1}{4}\|a\|^2)\nu$$

de $\mathcal{P}_{cyl}(X)$ dans $\mathcal{L}'_{cyl}(X)$ se prolonge par continuité en un endomorphisme bi-univoque et bicontinue de $K^s(X)$.

Pour la démonstration nous utilisons le lemme suivant.

(2-8.27) LEMME. - Soient X de dimension finie, s entier ≥ 0, et

$$c(s) = \textstyle\sum_{\ell=0}^{s} \ell!\; 2^{\ell}\; \ell((1+\|a\|^2)/4)^{\ell} \,.$$

Alors

(2-8.27.1) $$\|U_a\, f\|_s^2 \leq c(s)\|f\|_s^2$$

pour tout f dans $K^s(X)$.

Démonstration du lemme : On rapporte X à une base orthonormée $e_1, \ldots, e_n$ telle que a soit colinéaire à e_1. On pose $b = a/2$ et $b_1 = a_1/2$,

$$\alpha = (\alpha_1 \,,\, \alpha') \quad \text{avec} \quad \alpha' = (\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \,,\; \partial^{\alpha} = (\tfrac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}\,(\tfrac{\partial}{\partial x'})^{\alpha'} = \partial^{\alpha_1,\alpha'} \,.$$

On a

$$(2\text{-}8.27.2) \qquad \partial^{\alpha}(U_a f) = [\sum_{i=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{i} b_1^i \, \partial^{\alpha_1 - i, \alpha'} f(x-a)] \exp(b_1 x_1 - \|b\|^2 .$$

On note que U_a est une isométrie dans L^2, donc (2-8.27.2) montre que $U_a f \in K^s(X)$ dès que $f \in K^s(X)$.

Evaluons la norme de U_a.

$$\|\partial^{\alpha}(U_a f)\|^2 \leqslant 2^s \sum_{i=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{i} b_1^{2i} \|\partial^{\alpha_1 - i, \alpha'} f\|^2$$

$$\sum_{|\alpha|=s} \|\partial^{\alpha}(U_a f)\|^2 \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \leqslant 2^s \sum_{i, \alpha_1, \alpha'} \binom{\alpha_1}{i} b_1^{2i} \|\partial^{\alpha_1 - i, \alpha'} f\|^2 \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$$

$$\leqslant 2^s \, s! (\sum_{\alpha_1, i} \binom{\alpha_1}{i} b_1^{2i}) \|f\|_s^2 \leqslant 2^s \, s! \sum_{\alpha_1=1}^{s} (1 + b_1^2)^{\alpha_1} \|f\|_s^2$$

$$\leqslant s! \, 2^s \, s (1 + b_1^2)^s \, \|f\|_s^2 .$$

D'où $\|U_a f\|_s^2 \leqslant \|U_a f\|_{s-1}^2 + s! \, 2^s \, s(1 + b_1^2)^s \, \|f\|_s^2$.

On obtient (2-8.27.1) en additionnant ces relations pour $s = 1, 2, \dots, s$.

<u>Démonstration de la proposition</u> (2-8.26) : Comme l'application $a \longmapsto U_a$ est un homomorphisme de groupe, il suffit de montrer que chaque U_a est continue.

(a) Supposons d'abord X de dimension finie.

Si s est <u>entier positif</u>, il suffit d'appliquer le lemme.

Si s est <u>réel positif</u>, il suffit d'interpoler (voir (2-7.25)).

Si s est <u>négatif</u>, on utilise le fait que le transposé de l'opérateur U_a de $K^s(X)$ est l'endomorphisme U_{-a} de $K^{-s}(X)$. Notons aussi que, pour s fixé, les applications U_a de $K^s(X)$ décrivent un borné lorsque $\|a\|$ est uniformément majorée.

(b) Supposons maintenant X de dimension infinie, muni de la bonne famille maximale. Soit $\tilde{P} = P \circ s_i$ une fonction polynomiale cylindrique de base X_i. Quitte à remplacer X_i par le sous-espace vectoriel engendré par X_i et a, on peut supposer $a \in X_i$. On note que $\tilde{Q}(x) = \tilde{P}(x-a) \exp[(b, x) - \|b\|^2]$ est une fonction cylindrique de base X_i. Donc on peut écrire $\tilde{Q} = Q \circ s_i$. D'après le (a), on a, pour tout s,

$$\|Q\|_s \leqslant C \|P\|_s ,$$

où C ne dépend que de s et de $\|b\|$.

Donc

$$\|U_a \tilde{P}\| = \|\tilde{Q}\|_s \leqslant C \|\tilde{P}\|_s .$$

D'où le résultat puisque les $\tilde{P}_\nu$ sont denses dans $K^s(X)$.

3. Propriétés de trace.

(3-28) On veut définir et étudier le trace des prodistributions T de $K^s(X)$ sur une hyperplan affine H de X. A cet effet, on note X' l'hyperplan de X parallèle à H passant par l'origine, et $x_1'Ox_1$ la droite perpendiculaire. Pour toute base orthonormée dont le premier vecteur est porté par Ox_1, l'équation de H est $x_1 = \alpha$. On introduit la bonne famille F_t des sous-espaces vectoriels fermés de X contenus dans X'. Toute prodistribution T de $K^s(X)$ est alors considérée comme une t-prodistribution, c'est-à-dire comme un système cohérent de distributions sur les sous-espaces de dimension finie de X passant par x_1Ox. On a $\nu = \nu_1 \otimes \nu'$, où ν' est la probabilité cylindrique normale canonique relative à X'.

Soit q un entier ≥ 0. Si $\tilde{\varphi}$ est une fonction polynomiale t-cylindrique sur X, pour tout α réel, on note $\gamma_q^\alpha \tilde{\varphi}$ la fonction

$$(3\text{-}28.1)\qquad \begin{aligned} X' &\longrightarrow \underset{\sim}{C} \\ x' &\longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^q \tilde{\varphi}(\alpha\,,\,x') \end{aligned}$$

A cette fonction est associée la prodistribution $(\gamma_q^\alpha\,\tilde{\varphi})\nu'$ sur X'. Cette prodistribution appelée <u>trace</u> d'ordre q de $\tilde{\varphi}\nu$ sur H est encore notée $\gamma_q^\alpha(\tilde{\varphi}\nu)$.

(3-29) THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> $s > 1/2$.

(a) <u>Pour</u> α <u>fixé, l'application</u> $\tilde{\varphi}\nu \longmapsto (\gamma_0^\alpha\,\tilde{\varphi})\nu'$ <u>se prolonge par continuité en une application continue de</u> $K^s(X)$ <u>dans</u> $K^{s-(1/2)}(X')$. <u>Cette application, notée</u> γ_0^α, <u>est appelée application trace d'ordre zéro sur l'hyperplan</u> $x_1 = \alpha$.

(b) <u>Pour toute</u> T <u>dans</u> $K^s(X)$, <u>l'application</u> $\alpha \longmapsto \gamma_0^\alpha\,T$ <u>est continue de</u> $\underset{\sim}{R}$ <u>à valeurs dans</u> $K^{s-(1/2)}(X')$.

<u>Démonstration.</u>

(a) Supposons d'abord $\alpha = 0$. Soit $\tilde{\varphi} = \varphi \circ s_n$ une fonction polynomiale cylindrique de base X_n, où X_n est un sous-espace de X de dimension finie contenant Ox_1.

On a

$$\varphi(x) = \Sigma_j\; a_j\, \mathcal{H}_j(x)\;,\qquad a_j \in \underset{\sim}{R}\quad \text{et}\quad \|\varphi\|_s^2 = \Sigma_j\; |a_j|^2\,(1 + |j|)^s < +\infty$$

avec $x = (x_1\,,\,x')$, $j = (j_1\,,\,j')$ et $\mathcal{H}_j(x) = \mathcal{H}_{j_1}(x_1)\,\mathcal{H}_{j'}(x')$.

$$\varphi(0\,,\,x') = \Sigma_j\; a_j\, \mathcal{H}_{j_1}(0)\, \mathcal{H}_{j'}(x') = \Sigma\, b_{j'}\, \mathcal{H}_{j'}(x') \quad \text{avec}\quad b_{j'} = \Sigma_{j_1}\; a_j\, \mathcal{H}_{j_1}(0)\;.$$

Comme $\mathcal{H}_{j_1}(0)$ est nul si j_1 est impair, on a

$$|b_{j'}|^2 = \left(\Sigma_{j_1\ \text{pair}}\; a_j\; 2^{-j_1/2}\,(-1)^{j_1/2}\,\sqrt{j_1!}\,\left(\tfrac{j_1}{2}\right)!^{-1}\right)^2$$

d'où, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|b_{j'}|^2 \leq \Sigma_{j_1}\; |a_j|^2\,(1 + j_1 + |j'|)^s\; S_{j'}$$

avec

$$S_{j'} = \sum_{j_1 \text{ pair}} \frac{(j_1)!}{2^{j_1}[(j_1/2)!]^2(1+|j|)^s} = \sum_{j_1} \frac{\Gamma(j_1+1)}{2^{j_1}\Gamma^2(\frac{j_1}{2}+1)(1+|j|)^s}$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \Gamma(x+1)\, 2^{-x}(\Gamma(\frac{x}{2}+1))^{-2}\,(1+x+|j'|)^{-s}\,dx\,.$$

Or

(3-29.1) $\quad \Gamma(x+1)=2^x\,\pi^{-1/2}\,\Gamma(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{x}{2}+1)$ et $\Gamma(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}) \leq Cx^{-1/2}\,\Gamma(\frac{x}{2}+1)$ si $x>0$.

d'où $S_{j'} \leq C(1+|j'|)^{-s+(1/2)}$. Donc

(3-29.2) $\quad \|\tilde{\varphi}(0,x'\|^2_{s-\frac{1}{2}} = \sum_{j'}(1+|j'|)^{s-\frac{1}{2}}|b_{j'}|^2 \leq C\sum_{j_1 j'}|a_j|^2(1+j_1+|j'|)^s = C\|\tilde{\omega}(x)\|^2_s$.

La relation (3-29.2) montre que γ_0^0 admet un prolongement continu de $K^s(X)$ dans $K^{s-(1/2)}(X')$ tel que

(3-29.3) $\qquad \forall\, T \in K^s(X)\,,\quad \|\gamma_0^0\, T\|_{s-(1/2)} \leq C\|T\|_s$.

Pour tout a réel, posons $a = (\alpha\,,\,0\,,\,\ldots)$. **En** utilisant l'opérateur U_{-a} du lemme (2-8.27), on a

$$\gamma_0^0\, U_{-a}(\tilde{\varphi}\nu) = \exp(-\frac{1}{4}\,|\alpha|^2)\,\gamma_0^\alpha(\tilde{\varphi}\nu)\,.$$

De (2-8.27.1) et (3-29.3), on obtient donc, pour tout $\tilde{\varphi} \in \mathcal{P}_{cyl}(X)$ et pour tout a tel que $|\alpha| \leq C_1$,

$$\|\gamma_0^\alpha(\varphi\nu)\|_{s-(1/2)} = \|\exp(\frac{1}{4}\,|\alpha|^2)\,\gamma_0^0\,U_{-a}(\tilde{\varphi}\nu)\| \leq C_2\|\tilde{\varphi}\nu\|_s\,,$$

où C_2 est une constante qui ne dépend que de s et de C_1 .

(b) Soit $(\varphi_k\,\nu)$ une suite convergeant vers un élément fixé T de $K^s(X)$. D'après (a), on a une relation

$\|\gamma_0^\alpha(\varphi_k\,\nu) - \gamma_0^\alpha(\varphi_\ell\,\nu)\|_{s-(1/2)} \leq C_2\|\varphi_k\,\nu - \varphi_\ell\,\nu\|_s$ pour tout α tel que $|\alpha| \leq C_1$.

Ceci fait apparaître la fonction $\alpha \longmapsto \gamma_0^\alpha\, T$ comme limite uniforme, sur tout compact de $\underset{\sim}{R}$, de fonctions continues à valeurs dans $K^{s-(1/2)}(X')$. Elle est donc aussi continue.

(3-30) COROLLAIRE. - <u>Soient</u> $s > \frac{1}{2} + q$, <u>et</u> q <u>entier</u> ≥ 0 .

(a) <u>Pour</u> α <u>fixé</u>, <u>l'application</u> $\tilde{\varphi}\nu \longmapsto \gamma_q^\alpha(\tilde{\varphi}\nu)$ <u>se prolonge par continuité en une application</u>, <u>notée</u> γ_q^α , <u>de</u> $K^s(X)$ <u>dans</u> $K^{s-q-(1/2)}(X')$, <u>qu'on appellera trace d'ordre</u> q <u>sur l'hyperplan</u> $x_1 = \alpha$.

(b) <u>Pour toute</u> $T \in K^s(X)$, <u>l'application</u> $\alpha \longmapsto \gamma_0^\alpha\, T$ <u>est</u> q <u>fois continûment dérivable de</u> $\underset{\sim}{R}$ <u>à valeurs dans</u> $K^{s-q-(1/2)}(X')$.

<u>Démonstration</u> : Comme $\gamma_q^\alpha = \gamma_0^\alpha \circ (\frac{\partial}{\partial x_1})^q$, le (a) résulte du (2-5.23) et du théorème 1 (a).

Montrons la surjectivité des applications de trace.

(3-31) THÉORÈME 2. - Soient q entier ≥ 0, $s > \frac{1}{2} + q$, et α réel. Alors l'application γ_q^α de $K^s(X)$ dans $K^{s-q-(1/2)}(X')$ est surjective.

La démonstration utilise le lemme suivant.

(3-32) LEMME. - Soit $\gamma = 0$ ou 1 et k réel ≥ 1. Posons :

(3-32.1) $$\beta_\ell(\gamma,k) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell - \gamma \text{ est impair} \\ \dfrac{(\ell!)^{1/2}}{2^{(\ell-\gamma)/2}(\frac{\ell-\gamma}{2})!\ (1+k)^{1/2+\gamma}} \left(-\dfrac{k}{1+k}\right)^{(\ell-\gamma)/2} & \text{si } \ell-\gamma \text{ est pair.} \end{cases}$$

Alors

$$t^\gamma \exp(-(k/2)t^2 = \textstyle\sum_{\ell=\gamma}^\infty \beta_\ell(\gamma, k)\ \mathcal{H}_\ell(t) .$$

Démonstration : Prouvons d'abord le lemme pour $\gamma = 0$. Comme les fonctions $\mathcal{H}_\ell$ forment une base orthonormée de $L^2_\nu(\underset{\sim}{R})$, on a

$$\exp(-(k/2)t^2 = \textstyle\sum_{\ell=0}^\infty \beta'_\ell\ \mathcal{H}_\ell(t)$$

avec

$$\beta'_\ell = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_\ell(t) \exp(-(1+k)/2\ t^2)\ dt .$$

En utilisant le changement de variable $t\sqrt{(1+k)/2} = x$, et la représentation intégrale des polynômes d'Hermite ([9], page 576) on obtient $\beta'_\ell = \beta_\ell(0, k)$. Notons que la série du second membre de la relation (3-32.2) avec $\gamma = 0$ converge non seulement dans $L^2_\nu(\underset{\sim}{R})$, mais aussi pour tout t. On montre alors la relation (3-32.2) pour $\gamma = 1$ en dérivant par rapport à t chaque membre de (3-32.2) pour $\gamma = 0$.

Démonstration du théorème 2.

(a) Supposons d'abord $\alpha = 0$. On cherche une relèvement R_q, c'est-à-dire une application continue de $K^{s-q-(1/2)}(X')$ dans $K^s(X)$ telle que

(3-32.3) $$\forall\ \psi \in K^{s-q-(1/2)}(X') ,\quad \gamma_q^0(R_q\ \psi) = \psi .$$

Vu la densité des fonctions polynomiales cylindriques, on peut supposer

$$\psi(x') = \textstyle\sum_{j'} a_{j'}\ \mathcal{H}_{j'}(x') \in \mathcal{P}_{cyl}(X') .$$

L'expression R_q choisie dépend de la parité de q. Si $q = 2m$ est pair, introduisons la fonction suivante f de la variable réelle x_1

$$f(x_1) = \begin{cases} \exp(-(1+|j'|)/2)\ x_1^2) & \text{si } m = 0 \\ \dfrac{(-1)^m}{(1+|j'|)^m\ 1.3\ldots(2m-1)} \exp\left(-\dfrac{1+|j'|}{2}\ x_1^2\right) & \text{si } m > 0 . \end{cases}$$

et posons $(R_q\ \psi)(x) = f(x_1)\ \psi(x')$.

Si $q = 2m - 1$ est impair $(m \geq 1)$, on pose

$$(R_q\ \psi)(x) = (df/dx_1)(x_1).\psi(x') .$$

Comme $\gamma_q^0(R_q\,\psi) = \psi$, il suffit de montrer l'existence d'une constante positive C telle que

$$\forall\ \psi \in \mathcal{P}_{cyl}(X') \ , \quad \|R_q\,\psi\|_s \leqslant C\|\psi\|_{s-q-(1/2)} \ .$$

Tout q entier $\geqslant 0$, s'écrit $q = 2m - \gamma$ avec $\gamma = 0$, 1 et m entier $\geqslant 0$. Posons

$$C_{\gamma,m} = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad m = \gamma = 0 \\ \dfrac{(-1)^{m-\gamma}}{(1 + |j'|)^{m-\gamma}\ 1.3\ldots(2m-1)} \quad \text{si} \quad m > 0 \end{cases}$$

On a

$$(R_q\,\psi)(x) = \textstyle\sum_{j'} a_{j'}\, C_{\gamma,m}\, x_1^{\gamma} \exp(-(1 + |j'|)x_{1/2}^2)\ \mathcal{H}_{j'}(x') \ .$$

En utilisant le lemme (3.32), on a donc

$$(R_q\,\psi)(x) = \textstyle\sum_{j',\ell} b_{j',\ell}\ \mathcal{H}_\ell(x_1)\ \mathcal{H}_{j'}(x') \quad \text{avec} \quad b_{j',\ell} = a_{j'}\, c_{\gamma,m}\, \beta_\ell(\gamma\ ,\ 1 + |j'|) \ .$$

D'où

$$\|R_q\,\psi\|_s^2 = \textstyle\sum_{j',\ell} |b_{j',\ell}|^2 (1 + \ell + |j'|)^s = \sum_{j'} \dfrac{|a_{j'}|^2\, C_{\gamma,m}^2}{(2 + |j'|)^{1+2\gamma}}\, S_\ell$$

avec

$$S_\ell = \textstyle\sum_{\ell-\gamma \text{ pair},\geqslant 0} \dfrac{\ell!\ (1 + \ell + |j'|)^s}{2^{\ell-\gamma}[((\ell-\gamma)/2)!]^2} \left(\dfrac{1 + |j'|}{2 + |j'|}\right)^{\ell-\gamma} \ .$$

Donc

$$S_\ell \leqslant \textstyle\sum_{\ell\geqslant 0} \dfrac{(\ell+\gamma)!\ (1+\ell+\gamma+|j'|)^s}{2^\ell\,[(\ell/2)!]^2} \left(\dfrac{1+|j'|}{2+|j'|}\right)^\ell \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\Gamma(x+1)(1+x^\gamma)(2+x+|j'|)^s}{2^x\,\Gamma^2(x/2+1)} \left(\dfrac{1+|j'|}{2+|j'|}\right)^x dx.$$

D'où, en utilisant les relations (3-29.1), le changement de variable $x=(1+|j'|)t$ et l'inégalité $(\alpha/(1+\alpha))^\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, si $\alpha \geqslant 1$,

$$S_\ell \leqslant C(1 + |j'|)^{s+\gamma-(3/2)} \ .$$

On obtient alors

$$\|R_q\,\psi\|_s^2 \leqslant C\ \textstyle\sum_{j'} \dfrac{|a_j|^2\ (1 + |j'|)^{s-2m+3\gamma-(3/2)}}{(2 + |j'|)^{1+2\gamma}} \leqslant C\|\psi\|_{s-q-(1/2)}^2 \ .$$

(b) Le cas général conduit à un calcul du même genre.

Remarques.

(a) En opérant comme en dimension finie [8], on peut voir que, pour tout α et tout $s > \frac{1}{2} + q$, l'application suivante est continue surjective.

$$K^s(X) \longrightarrow \textstyle\prod_{j=0}^{q} K^{s-(1/2)-j}(X')$$

$$\varphi\nu \longmapsto \gamma_0^\alpha(\varphi\nu)\ ;\ \ldots\ ;\ \gamma_q^\alpha(\varphi\nu) \ .$$

(b) Soit j entier $\geqslant 0$. On définit l'espace de Sobolev vectoriel

$$K^s(X\ ,\ j) = K^s(X)\ \hat{\otimes}\ [\widehat{\odot}_j\ X] \ ,$$

où le crochet désigne le produit tensoriel symétrique hilbertien de j exemplaires du complexifié X^c de X. Les propriétés de trace de ces espaces se déduisent simplement des propriétés de trace déjà étudiées. Par exemple, soit $s > 1/2$. La projection orthogonale π de X et X' définit par complexification et produit tensoriel une projection continue

$$\bigodot_j X^c \xrightarrow{\pi_j} \bigodot_j X'^c .$$

En tensorisant π_j avec l'application continue surjective

$$K^s(X) \xrightarrow{\gamma_0^a} K^{s-(1/2)}(X')$$

on obtient une application continue surjective

$$K^s(X , j) \xrightarrow{\gamma_0^a \otimes \pi_j} K^{s-(1/2)}(X' , j) .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] GROTHENDIECK (A.). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Memoirs of the American mathematical Society, 16).

[2] HÖRMANDER (L.). - Linear partial differential operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 116).

[3] KRÉE (M.). - Propriété de trace en dimension infinie d'espaces du type Sobolev C. R. Acad. Sc. Paris, t. 279, 1974, Série A, p. 157-160.

[4] KRÉE (P.). - Courants et courants cylindriques sur des variétés de dimension infinie, "Linear operators and approximation", p. 159-174. - Basel und Stuttgart, Birkhäuser-Verlag, 1972 (International Series of numerical Mathetics, 20).

[5] KRÉE (P.). - Application des méthodes variationnelles aux équations aux dérivées partielles sur un espace de Hilbert, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, Série A, p. 753-755.

[6] KRÉE (P.). - Solutions faibles d'équations aux dérivées fonctionnelles, I., Séminaire Lelong : Analyse, 13e année, 1972/73, p. 142-181. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Lecture Notes in Mathematics, 410) ; et II., Séminaire Lelong : Analyse, 14e année, 1973/74 (à paraître).

[7] KRÉE (P.). - Solutions prodistributions d'équations aux dérivées fonctionnelles (à paraître).

[8] LIONS (J.-L.) et MAGENES (E.). - Problèmes aux limites non homogènes, et applications. Vol. 1. - Paris, Dunod, 1968 (Travaux et Recherches mathématiques, 17).

[9] VILENKIN (N. Ja.). - Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes. - Paris, Dunod, 1969 (Monographies universitaires de Mathématiques, 33).

N.-B. - L'espace $K^{-\infty}(X) = \bigcup_s K^s(X)$ présente une certaine analogie avec un espace construit par P. KRISTENSEN, L. MELJBO et E. THUE POULSEN [Tempered distributions in infinitely many dimensions, I., Comm. math. Phys., t. 1, 1965, p. 175-214]. L'espace $K^{+\infty} = \bigcap_s K^s$ est stable pour tout itéré de l'hamiltonien quantique. Les espaces $K^s(X)$ ont aussi été définis, pour s entier positif seulement, par FROLOV et L. GROSS [Logarithmic Sobolev inequalities (to appear)] en utilisant une méthode différente. La technique de série de Fourier présentée et utilisée dans cet exposé et dans l'exposé suivant est extrêmement puissante.

[Ajouté à la correction des épreuves.]

Mirella KRÉE
Tour Mexico, B. P. 1325
65 rue du Javelot
75645 PARIS CEDEX 13