Claude Comte

Vers une théorie quantique non standard

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1994, fascicule 2
« Vers une théorie quantique non standard », , p. 1-34
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1994___2_A1_0>

Introduction

Parmi les contributions récentes les plus décisives au débat sur les problèmes d'interprétation de la théorie quantique, on relève notamment
(i) la violation des inégalités de Bell observée dans les expériences d'Alain Aspect, et la confirmation expérimentale des prédictions de la mécanique quantique concernant les corrélations Einstein-Podolsky-Rosen (E.P.R.,ref 6)
(ii) l'argumentation théorique de Greenberger, Horne et Zeilinger démontrant par contre-exemple l'incompatibilité des "éléments de réalité" d'Einstein avec le formalisme de la mécanique quantique (ref 8)

L'argument G.H.Z. peut être considéré comme la sanction du contre-exemple infligée pour l'introduction de grandeurs physiques non rationnellement fondées. Il connaîtra sans doute de nombreux développements, et certaines conclusions ne tarderont pas à être tirées : la (pré)conception d'un objet quantique qui serait en toutes circonstances, comme les objets classiques, descriptible d'une manière exhaustive par la donnée d'un ensemble de grandeurs a priori réelles est réfutable. La grandeur ne pouvant plus être tenue pour un gage certain de réalité, force est donc pour les tenants d'une position "réaliste" de rechercher ailleurs des "éléments de réalité", observables, reproductibles, et indépendants des observateurs; et les tenants d'une position "positiviste" peuvent goûter un moment de satisfaction, car le formalisme quantique "standard" (de l'ancien français "estandard" - "réputé inébranlable") se trouve conforté dans son rôle de garant et de pierre de touche de tout ce qui est observable et mesurable dans le domaine quantique, et semble s'imposer comme le seul fondement rationnel pour la définition des grandeurs .

De notre point de vue, une attitude de repli analogue à celle préconisée un jour par Heisenberg ("Rückzug in den mathematischen Apparat"= retraite pour s'abriter derrière le formalisme) continuera de laisser d'importantes questions sans réponse : ainsi, lorsque Bohr déclare dans sa réponse à Einstein que "c'est le processus de mesure qui inflence de manière essentielle les conditions...de définition des grandeurs physiques" (ref 3), on serait en droit d'attendre des explications sur le "comment ?", mais on ne trouve énoncé aucun critère précis, de nature qualitative se rapportant à la structure des appareillages classiques autorisant telle ou telle mesure, et c'est en définitive la commutativité des opérateurs de l'espace de Hilbert qui fournit le critère décisif de ce qui est simultanément mesurable ou non!

L'argument G.H.Z. a surtout le mérite de rehausser au premier plan et avec une acuité particulière la question du fondement rationnel des grandeurs introduites dans le domaine quantique. Si l'on refuse le repli "positiviste" aussi bien que le refuge dans les harmonies hilbertiennes préétablies, alors il faut s'engager dans la voie d'une reformulation de la théorie quantique, en accordant préséance aux principes qualitatifs, puisque l'introduction de grandeurs dans le domaine quantique exige des précautions particulières. On peut relever dans l'oeuvre d'Einstein deux éléments méthodologiques sur lesquels une telle reformulation peut s'appuyer :

1°) Primauté des principes d'invariance

Des recherches antérieures (5 et ref. incluses) ont permis de jauger la puissance des principes d'invariance, dont le principe de relativité constitue le prototype, pour la détermination de la forme mathématique des grandeurs physiques et de leurs relations. Les principes d'invariance sont de nature qualitative car ils n'affirment rien de plus que la reproductibilité des phénomènes physiques dans un ensemble de situations spatio-temporelles (les référentiels galiléens, dans le cas du principe de relativité), et par corollaire la possibilité de leur description au moyen de lois ne changeant pas de forme, sans rien préjuger de celle-ci. Lorsque renonçant à postuler l'existence de grandeurs a priori on exige un fondement rationnel pour leur introduction, les principes d'invariance deviennent incontournables : pour s'en convaincre, on pourra par exemple rechercher les hypothèses implicitement faites lorsqu'on compare deux longueurs. De plus on remarque que dans les formulations où l'invariance n'est pas érigée en principe, elle constitue un postulat implicite, dans la mesure où il est tacitement admis que le domaine de validité de la théorie proposée s'étend au-delà de l'instant précis et du lieu où elle a été formulée, à une multiplicité de situations spatio-temporelles. (N')est scientifique (que) ce qui est répétable : donner la primauté à l'invariance et en tirer toutes les conséquences, c'est en quelque sorte prendre pour prémisse dans les déductions que comporte le discours scientifique...la possibilité même d'existence de ce discours. Par ailleurs, les principes d'invariance ne comportent jamais l'affirmation de la forme explicite de lois physiques et sont donc exempts des erreurs qui seraient liées à l'origine expérimentale de ces lois. Une théorie reposant sur des principes d'invariance est donc certainement plus solidement fondée qu'une théorie reposant sur des postulats quantitatifs. Il convient donc de faire le plus grand usage de principes d'invariance dans une reformulation de la théorie quantique, en recherchant les transformations par lesquelles les états quantiques et les probabilités sont reproductibles. On fera intervenir les principes d'invariance conjointement avec d'autres principes qualitatifs exprimant la spécificité du domaine quantique non pas en aval, comme l'on fait Wigner et d'autres, mais en amont du principe de superposition des amplitudes de probabilités, le principe fondamental de la théorie standard. Ce déplacement sera du même ordre, dans le domaine de la théorie physique, que celui qui a été opéré en géométrie avec le programme d' Erlangen de Felix Klein, que Dieudonné a présenté comme une ligne de partage des eaux en géométrie (10) : la donnée du groupe d'invariance des propriétés des figures détermine toutes les propriétés métriques. La même ligne de partage des eaux traverse la physique depuis l'avènement du principe de relativité : la donnée de l'ensemble des transformations par lesquelles les phénomènes physiques sont reproductibles détermine la forme mathématique explicite de certaines lois physiques quantitatives, et donc des grandeurs qu'elles relient. Comment ? La question est traitée en appendice A.

2°) Recherche de propriétés cruciales

On applique à la physique quantique une méthodologie de reformulation consistant à fouiller le corpus théorique existant jusqu'à trouver le plus petit nombre possible de propriétés qualitatives qui, ajoutées aux principes d'invariance, permettent la déduction de toutes les autres propriétés connues. La méthode est inspirée de la construction de la Relativité Générale : remarquant pour la première fois toute l'importance et la signification d'une propriété se présentant comme une coïncidence accidentelle dans l'édifice de la physique newtonienne, l'égalité des masses inertielle et pesante, Einstein interprète celle-ci comme l'expression d'une propriété qualitative et cruciale, l'équivalence de l'inertie et de la gravitation, qu'il élève au rang de principe premier d'une théorie nouvelle, englobant l'ancienne théorie de Newton comme un cas limite.

La propriété relevée comme cruciale dans le domaine quantique n'a pas le caractère spectaculaire de l'inséparabilité (ref. 14), qui a été au centre des débats d'interprétation durant les trois dernières décennies : c'est la propriété (H4) définie en II et nommée "principe d'homogénéité". Elle se présente de manière dissimulée et implicite dans l'exposé standard de la théorie de la matrice densité (ref. 2,4,7 et 12), comme une évidence banale ne méritant pas d'être distinguée par une dénomination particulière. Elle est cependant hautement déterminante de la structure mathématique des probabilités quantiques, car elle implique immédiatement (cf. II) que ces dernières vérifient des *relations barycentriques invariantes* (appendice A), dans lesquelles les probabilités quantiques se présentent comme des bras de levier et les probabilités classiques comme des poids : d'où le *caractère géométrique des probabilités quantiques.*

En outre, et c'est là le fruit d'une démarche indépendante et complémentaire de la formulation usuelle, l'analyse menée en II met en exergue le rôle capital de la *symétrie de l'appareil de mesure* : tel est le critère donnant qualité à un dispositif expérimental pour fixer les conditions de mesure d'une grandeur physique ; l'appareil de mesure se comporte comme un "référentiel" avec lequel le quanton (ref. 1) est en relation (appendice A) ; c'est de notre point de vue la partie manquante de la réponse de Bohr à Einstein.

Pour l'exposé, on procède à rebours : l'exploration des probabilités quantiques est effecuée en I comme si l'on venait de les obtenir expérimentalement, ainsi que l'analyse de leur structure pour dégager une propriété caractéristique (I et appendice B) ; et ensuite, la recherche de l'interprétation de cette dernière (II), qui fournit les idées-clé de la reformulation.

I Quelques remarquables propriétés des probabilités quantiques

Dans le formalisme de la théorie quantique standard, les probabilités sont définies comme les carrés de modules d'amplitudes, qui sont les composantes de vecteurs dans un espace de Hilbert. L'étude des systèmes quantiques a toujours été ramenée à celle des propriétés découlant de cette structure mathématique, mais on ne s'est jamais attaché à étudier les probabilités pour elles-mêmes, d'une manière directe, systématique, et indépendante des amplitudes. Les probabilités quantiques sont cependant douées de remarquables propriétés, qui auraient mérité d'attirer plus tôt l'attention, car leur interprétation (exposée en II) fournit les idées-clés d'une reformulation permettant de dissiper un certain nombre de "mystères" entourant l'objet de la théorie quantique.

Le présent article est un premier pas, et on se restreint à l'étude d'un système simple, mais ayant valeur d'archétype : le quanton doué de moment cinétique (ou spin). Admettons que l'on ait obtenu expérimentalement les probabilités $W^j_{m,m'}$ pour qu'un quanton "préparé" dans l'un des $n=2j+1$ états de spin de la direction r, repéré par l'indice m, soit ensuite "mesuré" dans l'un des $2j+1$ états d'indice m' correspondant à la direction r'. Voici les matrices de probabilité pour les premières valeurs de j, en posant $u = \cos\theta/2$, $v = \sin\theta/2$, où θ désigne l'angle des directions r et r' :

$$W^{1/2}_{m,m'} = \begin{bmatrix} u^2 & v^2 \\ v^2 & u^2 \end{bmatrix}, W^2_{m,m'} = \begin{bmatrix} u^8 & 4u^6v^2 & 6u^4v^4 & 4u^2v^6 & v^8 \\ 4u^6v^2 & u^4(u^2-3v^2)^2 & 6u^2v^2(u^2-v^2)^2 & v^4(v^2-3u^2)^2 & 4u^2v^6 \\ 6u^4v^4 & 6u^2v^2(u^2-v^2)^2 & \left(u^4+v^4-4u^2v^2\right)^2 & 6u^2v^2(u^2-v^2)^2 & 6u^4v^4 \\ 4u^2v^6 & v^4(v^2-3u^2)^2 & 6u^2v^2(u^2-v^2)^2 & u^4(u^2-3v^2)^2 & 4u^6v^2 \\ v^8 & 4u^2v^6 & 6u^4v^4 & 4u^6v^2 & u^8 \end{bmatrix}$$

$$W^{3/2}_{m,m'} = \begin{bmatrix} u^6 & 3u^4v^2 & 3u^2v^4 & v^6 \\ 3u^4v^2 & u^4(u^2-2v^2)^2 & v^4(v^2-2u^2)^2 & 3u^2v^4 \\ 3u^2v^4 & v^4(v^2-2u^2)^2 & u^4(u^2-2v^2)^2 & 3u^4v^2 \\ v^6 & 3u^2v^4 & 3u^4v^2 & u^6 \end{bmatrix}, W^1_{m,m'} = \begin{bmatrix} u^4 & 2u^2v^2 & v^4 \\ 2u^2v^2 & (u^2-v^2)^2 & 2u^2v^2 \\ v^4 & 2u^2v^2 & u^4 \end{bmatrix}$$

Le lecteur pourra vérifier ces expressions au moyen de la formule de Wigner, établie dans le cadre de la théorie standard : $W^j_{m,m'} = \left|A^j_{m,m'}\right|^2$,

$$(1) \qquad A^j_{m,m'} = \sqrt{\frac{(j+m)!\,(j-m)!}{(j+m')!\,(j-m')!}} \sum_{\mu} C^{j-m-\mu}_{j+m'} C^{\mu}_{j-m'} (-1)^{j-m'-\mu}\, u^{2\mu+m+m'}\, v^{2j-2\mu-m-m'}$$

Ce calcul sera considérablement simplifié, si l'on tient compte des propriétés non-standard suivantes (les propriétés déjà connues sont distinguées par le signe*) :

(P1) **Les matrices $W^j_{m,m'}$ ont pour valeurs propres la suite des polynômes de Legendre $P_\ell(t)$, $0 \le l \le n-1$, avec $t = \cos(r,r')$; les vecteurs propres correspondants, de composantes $s_{m,\ell}$, sont indépendants de l'angle (r,r').** On peut donc écrire :

(2) $W^j_{m,m'} = \sum_\ell s_{m,\ell}\, P_\ell(t)\, s^{-1}{}_{\ell,m'}$, ou sous forme condensée $W = s\, P\, s^{-1}$.

L'importance de cette propriété provient de ce qu'elle est (très probablement) caractéristique :

(P2) ***Conjecture*** : **Toute matrice de probabilités vérifiant (P1) est identique à la matrice quantique.**
Cette proposition a été vérifiée jusqu'à n = 5 (appendice B).

La propriété (P1) peut donc être considérée comme le principe mathématique unique d'une théorie alternative (du spin, dans une première étape), et l'objet de la seconde partie sera de l'interpréter. Cependant, pour développer un peu le formalisme non-standard et accélérer le calcul des probabilités, j'énonce encore quelques propriétés, parmi lesquelles il faudrait rechercher un principe supplémentaire, si un contre-exemple venait à être découvert.

(P3)* *L'expression des éléments de la première ligne de la matrice W est*:

(3) $$W^j_{j,m} = C^{j-m}_{2j}\, u^{2(j-m)}\, v^{2(j+m)}$$

Les probabilités de transition à partir de l'état m=j s'expriment simplement en fonction de celles correspondant au spin 1/2, qui sont u^2 et v^2 pour les transitions "up→up" et "up→down" respectivement. Pour j=1, par exemple, les probabilités $W_{1,1}$, $W_{1,0}$, $W_{1,-1}$ sont respectivement $u^2 u^2$, $u^2 v^2 + v^2 u^2$ et $v^2 v^2$. Le quanton j=1 apparait ainsi comme la composition de 2 quantons j=1/2 , telle que la probabilité de l'état m'=0 soit celle des états (up et down) , (down et up) *confondus* ; la généralisation à j >1 et |m'|< j est immédiate, d'où l'on conclut que le quanton j est la composition de 2j *quantons j=1/2 absolument identiques*, c.a.d. tels qu'il soit matériellement impossible de les distinguer.

(P4) *La connaissance de la première ligne de la matrice W permet la détermination rapide de ses vecteurs propres.*
Le polynôme $P_\ell(t)$ admet sur la base des polynômes homogènes constituant la première ligne de $W^{(j)}$ une décomposition unique avec des coefficients

(notation $\sigma_{m,\ell}$) qui s'obtiennent facilement grâce à la formule (non connue, qui apparait à l'inspection de la dernière colonne des matrices s) :

(4) $$P_\ell(\cos\theta) = \sum_{m=-j_0}^{m=+j_0} (-1)^{j_0-m}\, C_{2j_0}^{j_0-m}\, W_{j_0,m}^{j_0} \quad , \quad j_0 = \frac{\ell}{2}$$

multipliée par le développement de $(u^2 + v^2)^{2(j-j_0)} = 1$

L'équation aux vecteurs et valeurs propres s'écrit pour m'=j

(5) $$\sum_m W_{j,m}^j\, s_{m,\ell} = s_{j,\ell}\, P_\ell(\cos\theta)$$

et par conséquent, les vecteurs propres sont proportionnels aux colonnes de la matrice de décomposition des P_ℓ :

(6) $$s_{m,\ell} = s_{j,\ell}\ \sigma_{m,\ell}$$

(P5) Les vecteurs propres sont orthogonaux deux à deux, la matrice des probabilités étant symétrique ($W_{m,m'} = W_{m',m}$: *microréversibilité* *); de plus, on peut écrire s sous la forme d'une matrice orthogonale ; d'où $s^{-1} = s^+$ et $W = s\,P\,s^+$. Les expressions des matrices s pour les premières valeurs de j sont (les colonnes sont les vecteurs propres dans l'ordre des ℓ croissants) :

(7) $$j = \frac{1}{2} \qquad s = \begin{bmatrix} 1 & +1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \\ & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(7') $$j = 1 \qquad s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & & \\ & 1/\sqrt{2} & \\ & & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

(7'') $$J = \frac{3}{2} \qquad s = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1 & -3 \\ 1 & -1/2 & -1 & 3 \\ 1 & -3/2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & & & \\ & 1/\sqrt{5} & & \\ & & 1/2 & \\ & & & 1/2\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

(7''') $$J = 2 \qquad s = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5^{-1}} & & & & \\ & \sqrt{10^{-1}} & & & \\ & & \sqrt{14^{-1}} & & \\ & & & \sqrt{10^{-1}} & \\ & & & & \sqrt{70^{-1}} \end{bmatrix}$$

(P6) *Quantification* * : Les composantes du vecteur propre $\ell = 1$ (proportionnels à la seconde colonne des matrices s) sont à tous les ordres j "quantifiées" sous la forme $s_{m,1} = \hbar m$, où $\hbar$ est une constante (universelle, la même pour tous les j, puisqu'un quanton j est la composition de 2j quantons identiques de j-1/2). Admettant l'existence d'états discrets qualitativement distincts initialement repérés par l'indice m, l'analyse de la structure du champ de probabilités fait ainsi directement apparaître le spin $\hbar m$ comme une grandeur définie en relation avec une direction particulière, la direction r' dans laquelle la mesure des probabilités est effectuée. Cette grandeur a la dimension d'un moment cinétique, identique à celle d'une action, comme le montre l'expérience : $\hbar$ est la constante de Planck. Les considérations exposées en II établiront la relation du spin au groupe d'invariance sous-tendant son existence, le groupe des rotations spatiales.

(P7) La valeur moyenne du spin dans la direction de "préparation" r est $\langle S_r \rangle = \sum_m \nu^m \hbar m$, où ν^m désigne le nombre d'occupation de l'état m de la direction r, et la valeur moyenne du spin dans la direction de "mesure" r' est $\langle S_{r'} \rangle = \sum_{m'} w_{r'}^{m'} \hbar m'$, où $w_{r'}^{m'} = \sum_m \nu^m W^j_{m,m'}$ est la probabilité de trouver un quanton dans l'état m' de la direction r'. On retrouve le *théorème de projection du spin* *, exprimant la conservation en valeur moyenne de la projection du spin sur la direction de mesure :

$$\langle S_{r'} \rangle = \langle S_r \rangle \cos(r,r') \tag{8}$$

Cette relation fait apparaître le *caractère vectoriel du spin moyen* De plus, elle est immédiatement généralisable à $\ell > 1$; pour la grandeur d'ordre ℓ définie par $\langle S^\ell_{r'} \rangle = \sum_m w_{r'}^m \, s_{m,\ell}$, on obtient une formule analogue

$$\langle S^{(\ell)}_{r'} \rangle = \langle S^{(\ell)}_r \rangle P_\ell(\cos\theta) \tag{9}$$

exprimant le caractère tensoriel de cette grandeur : c'est la composante d'indices tous égaux à r' d'un tenseur symétrique d'ordre ℓ irréductible sur le groupe des rotations (cf. le problème analogue de la décomposition du champ électrostatique : ref. 11).

(P8) *Détermination des vecteurs propres par le processus d'orthogonalisation de Schmidt* :
La grandeur $\langle S^{(\ell)} \rangle$ est reliée au ℓ-ième moment de la distribution statistique du spin, comme le montre la relation suivante, qui est toujours satisfaite :

$$s_{m,\ell} = (\hbar m)^\ell - \sum_{k<\ell} s_{m,k} C_{k,\ell} \tag{10}$$

où les contantes $C_{k,\ell}$ sont déterminées par les relations d'orthogonalité vérifiées pour tous les $k < \ell$: $\sum_{m} s_{m,\ell}\, s_{m,k} = 0$. Ainsi, il est possible de déterminer les vecteurs propres par récurrence, en supposant connus les deux premiers $s_{m,0} = 1$ et $s_{m,1} = \hbar m$.

Par ce procédé, on obtient : $s_{m,2} = \hbar^2(m^2 - (\sum_{m'} m'^2)/(2j+1)) = \hbar^2(m^2 - j(j+1)/3)$, puis l'expression du second moment* de la distribution statistique du spin :

$$(11) \qquad \langle S_{r'}^2 \rangle = \hbar^2 j(j+1)/3 + (\sum_m \nu^m s_{m,2})(3\cos^2(r,r') - 1)/2$$

grâce à laquelle on peut aisément établir des inégalités analogues à celles de Heisenberg* pour le spin et aussi, en choisissant arbitrairement 3 directions r',r'',r''' mutuellement orthogonales, vérifier la relation* :

$$(12) \qquad \langle S_{r'}^2 \rangle + \langle S_{r''}^2 \rangle + \langle S_{r'''}^2 \rangle = \hbar^2 j(j+1)$$

II Interprétation

Pour les quantons doués de moment cinétique, (P1) : $W= s\ P\ s^{-1}$ est une propriété caractéristique, si la conjecture (P2) est vérifiée, car elle permet toutes les prédictions quantitatives, qui coïncident avec celles de la mécanique quantique standard, obtenues à partir du principe de superposition des amplitudes de probabilité (auquel on ajoute de multiples hypothèses). La reformulation non-standard à partir de (P1) a l'avantage de réduire la théorie (pour le moment restreinte au quanton doué de moment cinétique) à un principe mathématique unique et intelligible : l'unicité ayant été vérifiée en I, mon objectif est de montrer comment (P1) découle d'un ensemble de faits qualitatifs dégagés de l'expérience, utilisés comme principes heuristiques, et choisis d'après trois critères :

(i) leur nombre doit être minimum;

(ii) leur validité doit s'étendre au-delà des quantons doués de moment cinétique à tous les systèmes quantiques;

(iii) ils doivent être purement qualitatifs, afin d'éviter l'introduction de grandeurs physiques a priori, non fondées rationnellement. Je restreins cependant cette exigence à l'objet quantique, en supposant qu'il n'y a pas lieu de remettre en cause les grandeurs intervenant dans la description des systèmes classiques. Les seules grandeurs que je m'autorise à introduire au départ pour les quantons sont celles dont la mesure s'effectue par comptage d'entiers : les nombres d'états et de variables, et les probabilités obtenues comme fréquences-limite. On a déjà vu en I comment les autres grandeurs pertinentes et leur caractère contextuel (le spin, dans le cas traité) découlent exclusivement de la structure du champ de probabilités.

La recherche de propriétés qualitatives sélectionnées d'après ces critères et *équivalentes* au principe mathématique (P1) fournit l'interprétation de la propriété (P1) ; mais elle est en même temps une méthode d'enquête visant à dévoiler la réalité de l'objet quantique sous forme de caractéristiques qualitatives, reproductibles et indépendantes des observateurs.

1°) Je propose d'ériger en principes les hypothèses physiques suivantes :

(H1) *L'existence d'états qualitativement distincts* (formant un "spectre discret" de $n=2j+1$ états, ou éventuellement un quasi-continuum) *associés à des contextes* r adéquats (les "appareils classiques de mesure"); par convention, je mettrai entre guillemets tous les emprunts à la terminologie de la théorie quantique standard).

(H2) *Un contexte r est caractérisé par un groupe d'invariance G_r particulier, par exemple le groupe de symétrie cylindrique autour de l'axe du champ magnétique de l'appareil de Stern et Gerlach pour l'observation du spin;* r désigne dans ce cas le vecteur unitaire dans la direction du champ. Pour le spin, le rôle primordial joué par la symétrie cylindrique du contexte est déjà attesté par la présence des fonctions spéciales associées à cette symétrie, les polynômes de Legendre, comme spectre de valeurs propres de la matrice W (appendice A). Le groupe G_r sous-tend l'existence d'états de spin dans la direction particulière r seulement . *La transition du contexte r au contexte r' entraîne la disparition des états et grandeurs sous-tendus par le groupe G_r et l'apparition de ceux sous-tendus par le groupe $G_{r'}$*. La présupposition que des quantons "préparés" dans le contexte r posséderaient simultanément des propriétés associées au contexte r' est dépourvue de tout fondement rationnel ; la violation des inégalités de Bell et l'argument de Greenberger, Horne et Zeilinger (ref 8 et 13) peuvent être considérés comme la preuve par l'absurde de l'impossibilité d'introduire des états et des grandeurs de cette façon (je fais voir en appendice A comment l'existence d'un groupe d'invariance conditionne la structure des grandeurs physiques mesurables (susceptibles d'addition), auxquelles il confère un caractère géométrique, et il sera établi plus loin que les probabilités quantiques sont des grandeurs de cette nature).

(H3) *Le multidéterminisme* (ou "déterminisme statistique") :
Soit un échantillon statistique de quantons conditionnés (j'emploierai ce terme dans un sens équivalent à "préparé" ou "mesuré") dans les états m relatifs à un contexte r particulier. Pris dans un nouveau contexte r', les quantons sont (re)conditionnés dans les états m' de r', *la transition de (r,m) à (r',m') s'effectuant de manière stochastique, mais de telle sorte que les fréquences-limite soient reproductibles, c.a.d. avec des probabilités $W_{m,m'}$ déterminées. Lorsque r et r' coïncident, $W_{m,m'} = 1$* . Il est impossible de concevoir la transition du contexte r au contexte r', sauf si elle s'effectue via des contextes r" intermédiaires, comme une évolution progressive décrite par la variation continue de paramètres d'état en correspondance biunivoque avec l'état du système dans les stades intermédiaires ; car l'existence de tels paramètres nécéssiterait à chaque étape de la transition la présence du groupe d'invariance lié à un contexte particulier pour être fondée. La transition a par conséquent un caractère discontinu. Le multidéterminisme est un déterminisme, car il est la négation de l'arbitraire : c'est le caractère stochastique de la transition qui permet l'existence de lois de conservation, sous la forme du théorème de projection (8 et 9).

(H4) *L'homogénéité des ensembles statistiques de quantons.*

L'énoncé de cette propriété exige quelques définitions préalables (les définitions non-standard sont repérables par le signe *) :

a) <u>ensemble statistique pur*</u> ("cas pur") : conditionnement d'un grand nombre N de quantons dans l'état m relatif au contexte r.

b) <u>ensemble statistique simple*</u> ("mélange" simple) : conditionnement d'un grand nombre N de quantons dans les différents états m relatifs au contexte r avec les probabilités v^m ; notation : (r , v)

c) <u>ensemble statistique hétérogène*</u> : échantillon statistique constitué par mélange au hasard de quantons prélevés en grands nombres N_i de différents ensembles statistiques simples (r_i ,v_i) dans les proportions N_i / N_0 , où $N_0 = \sum_i N_i$

d) <u>champ de probabilité* associé à un ensemble statistique E de quantons.</u>
Le champ de probabilité associé à E est une fonction du contexte r' considéré comme variable, définie par le processus de mesure suivant : on prélève un échantillon statistique E' dans E , dont les quantons sont (re)conditionnés dans le contexte r', où ils apparaissent dans les différents états m' avec les probabibités $w_{r'}^{m'}$. L'exploration du champ de probabilité correspondant à l'ensemble E est effectuée en prélevant dans E des échantillons statistiques E_j disjoints qui sont envoyés dans les différents contextes r'_j .

e) <u>paramètres de polarisation d'un ensemble statistique</u> .
Il découle de (H3) que le champ de probabilité correspondant à un ensemble statistique E quelconque est déterminé de manière univoque par ses conditions de "préparation" décrites par des "paramètres de polarisation" pour lesquels j'introduis la notation condensée p : p équivaut à la donnée de (r , v) dans le cas d'un ensemble simple , et de l'ensemble des paramètres N_i / N_0 , (r_i , v_i) , i=1, 2, 3, ... dans le cas d'un ensemble hétérogène. Le champ de probabilités $w_{r'}^{m'}$ correspondant à un ensemble hétérogène E_0 constitué de sous-ensembles simples E_i , auxquels sont associés les champs de probabilité $w_{r'}^{m'}(r_i ,v_i)$, est donné par la règle de factorisation séquentielle des probabilités conditionnelles ; quel que soit le contexte de "mesure" r', et l'état m', on a :

$$(13) \qquad N_0 \; w_{r'}^{m'} = \sum_i N_i \; w_{r'}^{m'}(r_i , v_i) \quad , \quad N_0 = \sum_i N_i$$

Le nombre de paramètres de polarisation p indépendants croît-il indéfiniment lorsque la complexité de l'ensemble hétérogène augmente ?

En physique quantique, c'est la tendance au nivellement le plus strict qui prévaut : pour n états, quel que soit le système quantique, il existe une limite supérieure

(14) $$L(n) = n^2 - 1 = (n-1)(n+1) = 3+5+7+ \dots +(2n-1)$$

C'est un fait expérimental, mais un postulat moins fort est suffisant :

(H4') *Il existe une limite supérieure L(n) du nombre de paramètres de polarisation indépendants*

L'existence d'une limite supérieure est une propriété générale : dans le formalisme quantique standard, la matrice densité pour n états discrets, hermitique et de trace nulle, est toujours décrite par $L(n) = n^2 - 1$ constantes réelles (ref 2,4, et 7) ; l'ensemble hétérogène le plus général est décrit dans ce formalisme par une matrice densité comportant exactement ce nombre de paramètres indépendants. Comme la mécanique quantique standard est pour le moment en accord avec l'expérience, on peut admettre que l'existence de L(n) est un fait d'observation de validité générale.

f) ensemble statistique homogène* :
c'est un ensemble statistique décrit exactement par L(n) paramètres de polarisation indépendants. Dans le cas du spin, l'expérience montre qu'il est le "mélange" de n-1 ensembles simples pouvant en général être choisis de multiples manières différentes, et apportant chacun n+1 paramètres indépendants : 2 angles définissant la direction r et n-1 probabilités indépendantes v^m .

Le principe d'homogénéité des ensembles statistiques peut maintenant être énoncé en ajoutant à (H4') la proposition :

(H4") *un ensemble hétérogène ne se distingue d'un ensemble homogène par aucune propriété objective.*

Le champ de probabilité pour un ensemble homogène est donné par les fonctions $w_{r'}^{m'}(p)$ des L(n) paramètres indépendants p , distinctes des fonctions $w_{r'}^{m'}(r , v)$ associées aux ensembles simples, qui comportent un nombre moindre $L(n)/(n-1) = n+1$ de paramètres indépendants. En vertu du principe d'homogénéité, il correspond à tout ensemble hétérogène E_0 une polarisation p_0 de même nature que pour un ensemble homogène et le champ de probabilité correspondant à E_0 est donné par la même fonction $w_{r'}^{m'}(p_0)$. Supposons que E_0 soit constitué du "mélange" de plusieurs ensembles homogènes E_i de polarisations p_i dans les proportions N_i / N_0 ; le champ de probabilités correspondant à E_0 vérifie les relations suivantes pour tous les r' et tous les m , qui s'interprètent comme un système d'équations déterminant la polarisation résultante p_0 :

(15) $$N_0 w_{r'}^{m'}(p_0) = \sum_i N_i w_{r'}^{m'}(p_i)$$

Or, il y a en tout L(n) équations indépendantes (dans le cas du spin, chaque direction r' fournissant n-1 équations indépendantes, pour déterminer n^2 -1 paramètres il suffit de choisir arbitrairement n+1 directions r'_γ différentes). Les raisonnements développés en appendice A permettent immédiatement de déduire la forme nécessaire des probabilités quantiques et des paramètres de polarisation ( ) de la condition de compatibilité de ces équations quel que soit r' . Cette déduction est fondée sur l'existence d'un groupe d'invariance G_R tel que les contextes r et r' soient reliés par une transformation R appartenant à G_R ; ainsi, dans le cas du spin, G_R est le groupe complet des rotations spatiales, dont G_r et $G_{r'}$ sont des sous-groupes, et on remarque de plus que $G_{r'} = R\, G_r\, R^{-1}$.

Remarques:
(i) il est équivalent de faire subir la transformation R aux polarisations ou bien de passer à un contexte r' se déduisant de r par la transformation inverse R^{-1} ; on a donc les relations barycentriques équivalentes :

(16) r' fixe, quel que soit R : $$N_0\ w_{r'}^{m'}(R\, p_0) = \sum_i N_i\ w_{r'}^{m'}(R\, p_i)$$

(ii) en théorie quantique standard, la propriété d'homogénéité est inhérente à la description par une matrice densité : pour un ensemble statistique hétérogène, la matrice densité $\rho^{(0)}_{m,m'}$ est la moyenne des matrices densité $\rho^{(i)}_{m,m'}$ effectuée sur les sous-ensembles statistiques

(17) $$N_0\ \rho^{(0)}_{m,m'} = \Sigma_i\ N_i\ \rho^{(i)}_{m,m'}$$

ce qui assure la généralité de (H4). Le principe d'homogénéité constitue cependant un postulat moins fort, car il ne concerne que les éléments diagonaux de la matrice densité.

2°) Application au spin

Il est démontré en appendice A (38) que le champ de probabilités $w_{r'}^{m'}(p)$ associé à un ensemble statistique homogène s'écrit sous la forme générale

(18) $$w_{r'}^{m'}(p) = \sum_i \sum_l J_{r_i}^{l}\, P_l\,(\cos(r_i, r'))\, s'_{l,m'}$$

d'une combinaison linéaire de composantes de tenseurs irréductibles sur le groupe des rotations (c.a.d. tels que la contraction sur tout couple d'indice soit zéro) ; en effet, si la somme sur i se réduit à un seul terme, le polynôme de Legendre $P_\ell(\cos(r_i,r'))$ n'est autre que la contraction du tenseur associé au moment ℓ-polaire, qu'on désignera par $\underline{J}^\ell$, avec le tenseur $\underline{r}'\underline{r}'...\underline{r}'(\ell$ fois) ; ce tenseur est dans ce cas "aligné" dans la direction r_i (il existe une analogie profonde avec la décomposition du champ électrostatique en moments multipolaires, voir la référence (11) pour les développements techniques) . La somme est étendue aux ensembles simples correspondant à l'indice i ; les facteurs $J^\ell_{r_i}$ sont indépendants de la direction d'observation r'. Enfin, les coefficients $s^\ell_{\ell,m'}$ sont des constantes universelles indépendantes de l'ensemble statistique considéré, dont le choix est fortement limité par la condition que les probabilités soient positives . En notations tensorielles :

$$(19) \qquad w^{m'}_{r'} = \sum_\ell \underline{J}^\ell\, \underline{r}'\underline{r}'...\underline{r}'(l\ fois)\, s^\ell_{\ell,m'} = \sum_\ell J^\ell_{r'}\, s^\ell_{\ell,m'}$$

où la composante diagonale $r'r'...(\ell$ fois) , désignée par $J^\ell_{r'}$, du tenseur de polarisation s'exprime par

$$(20) \qquad J^\ell_{r'} = \sum_i J^\ell_{r_i} P_\ell(\cos(r_i,r'))$$

Ainsi, le champ de probabilité quantique peut être analysé comme la superposition de schèmes de base de types s , p , d , f ,... , dans les notations de la physique atomique, correspondant respectivement aux moments scalaire, dipolaire, quadripolaire, etc...

Le concept de tenseur a en mathématiques, comme on le sait, une réalité "intrinsèque", indépendante du système particulier de coordonnées choisi, dans lequel ses composantes constituent son apparence. Cette situation trouve son pendant en physique, car l'observation des probabilités dans différents contextes fournit les images apparentes et complémentaires de l'objet quantique, tandis que les tenseurs (géométriques et physiques) $\underline{J}^\ell$ constituent sa réalité : il est autorisé de les considérer comme les ***nouveaux éléments de réalité*** (ref. 6), car les conditions de reproductibilité et d'indépendance par rapport aux systèmes physiques d'observation sont assurées. Il est à noter cependant que lors de la mise en relation avec un contexte nouveau, ces éléments de réalité subissent une variation décrite par le théorème de projection (8 et 9)

Il ressort de cela que la donnée de la polarisation d'un ensemble homogène est équivalente à celle de l'ensemble des tenseurs $(\underline{J}^0, \underline{J}^1,..., \underline{J}^\ell,..., \underline{J}^{n-1})$. Sachant que le nombre maximum de paramètres indépendants correspondant à J_ℓ est $(2\ell+1)$, on aura effectivement $3+5+7+ ... +(2(n-1)+1) = n^2 - 1$ paramètres si ***la polarisation comporte un nombre de tenseurs égal au nombre d'états*** $n=2j+1$ (par suite de $\Sigma_{m'} W_{m,m'} = 1$, le scalaire J_0 est constant). Cette propriété est déductible des principes précédemment énoncés :

L'objectif est à présent de relier la polarisation ($\underline{J}^0$, $\underline{J}^1$,..., $\underline{J}^\ell$,...,$\underline{J}^{n-1}$) aux conditions de "préparation" (r_i, ν_i) des ensembles simples. Le principe de multidéterminisme (H3) joue un rôle décisif pour la déduction de cette relation :

Les tenseurs de polarisation d'un ensemble hétérogène sont calculés à partir de ceux correspondant aux ensembles simples en effectuant les moyennes

(21) $$N_0 \, \underline{J}_0^\ell = \sum_i N_i \, \underline{J}_i^\ell$$

Pour la détermination des paramètres de polarisation, le cas général est donc ramené à celui d'un ensemble statistique simple (le i-ème).

La direction r_i d'un ensemble simple étant donnée, le champ de probabilité est déterminé de manière univoque soit par l'*ensemble des constantes* $J^\ell_{r_i}$, soit d'après (H3) par les conditions initiales, l'*ensemble des nombres d'occupation* ν_i^m. Les $J^\ell_{r_i}$ sont donc fonction des ν_i^m. En outre, $P_\ell(1) = 1$, ce qui entraîne $J^\ell_{r'} = J^\ell_{r_i}$ lorsque $r' = r_i$ et les ν_i^m sont déterminés en fonction des $J^\ell_{r_i}$ par les relations (19) où l'on pose $r' = r_i$:

(22) $$\nu_i^m = \sum_\ell J^\ell_{r_i} \, s'_{\ell,m'}$$

Les deux ensembles précédents sont donc en correspondance bijective, et il s'ensuit qu'ils comportent le même nombre n d'éléments : le nombre de tenseurs est nécéssairement égal au nombre d'états, et les relations* (22) *doivent être inversibles. Il y a dualité entre les tenseurs et les états.

Ainsi, on retrouve par inversion des relations (22) les expressions (8 et 9) des valeurs moyennes des grandeurs physiques d'indice ℓ prenant les valeurs $s_{m,\ell}$ dans les divers états m (les $s_{m,\ell}$ désignant les éléments de l'inverse de la matrice s') :

(23) $$J^\ell_{r_i} = \langle S^\ell_{r_i} \rangle = \sum_m \nu_i^m \, s_{m,\ell} \;, \quad J^\ell_{r'} = \langle S^\ell_{r'} \rangle = \sum_{m'} w_{r'}^{m'} \, s_{m',\ell} \;, \quad \langle S^\ell_{r'} \rangle = \langle S^\ell_{r_i} \rangle P^\ell(\cos(r_i, r'))$$

En particulier, $s_{m,1}$ correspond au spin moyen et les $s_{m,\ell}$ avec $\ell \neq 1$ aux moments supérieurs de la distribution statistique de spin. Ainsi l'existence de cette grandeur physique est pleinement fondée rationnellement, car elle est déduite en considérant la probabilité comme la donnée primordiale et sans recourir à des postulats autres que qualitatifs. On obtient la formule $W = s P s^{-1}$ en substituant (23) dans (18).

Conclusions

Une théorie complète des quantons de spin a été élaborée sur des bases qualitatives, et donc sans clivage entre formalisme et interprétation, équivalente à la théorie standard. La démonstration complète de l'équivalence nécéssite la reconstitution du formalisme standard, ce qui est possible sans difficultés particulières à partir des expressions des probabilités déterminées par les formules (18) et (23), et présentées explicitement en I , où les probabilités apparaissent comme les carrés de quantités ayant toutes les propriétés des amplitudes quantiques. On peut ainsi retrouver comme un théorème la propriété élevée au rang de principe premier de la théorie standard, et saisir la nécéssité logique de l'introduction de l'espace de Hilbert.

Le principe fondamental de la théorie standard est équivalent à nos principes heuristiques (H1 à H4) : il se trouve ainsi décomposé en éléments simples et intelligibles. Cependant, la mise au jour de caractéristiques qualitatives de l'objet quantique n'est certainement qu'une première étape vers la connaissance de la réalité de cet objet. Il faudra s'interroger sur la signification de ces propriétés. Toutefois, on peut raisonnablement penser que formulées dans le langage naturel, elles donnent immédiatement prise à l'analyse épistémologique. A l'opposé, la théorie standard, par le fait qu'elle repose principalement sur un seul grand principe mathématique, le principe de superposition, présente un obstacle à une telle analyse. Sa forme extrêmement condensée lui confère une valeur opératoire certaine, car l'algorithme statistique qui en découle permet toutes les prédictions en les facilitant (comme les formulations lagrangienne et hamiltonienne de la mécanique classique), et n'a encore jamais été mis en défaut par l'expérience, mais le prix à payer pour cette efficacité est l'occultation des multiples hypothèses dont ce principe est la condensation : ce sont en effet les propriétés (H1 à H4).

A partir des expressions (20) des tenseurs de polarisation, on pourra définir d'autres procédés de mesure en relation avec des contextes différents des appareils de Stern et Gerlach, et caractérisés par des types de symétrie différents ; on s'appuyera sur l'analogie entre le quanton $j=1/2$ de spin $s_r = \pm 1/2$ par rapport à une direction r et les états de photons à polarisation linéaire ; il existe des états de spin analogues aux états de photons à polarisation circulaire. Il sera intéressant, dans une recherche ultérieure, de faire la liste exhaustive de tous les procédés de mesure physiquement possibles : est-elle restreinte, ou bien est-elle aussi large que l'envisage la formalisation de von Neumann, ?

Le principe d'homogénéité (H4) est vérifié sur la totalité du domaine quantique , et les raisonnements exposés dans l'appendice A, qui en tirent les conséquences, restent valables pour une classe assez large de groupes d'invariance ; l'étude du spin sur le groupe des rotations est présentée à titre d'illustration. Il s'ensuit que les déductions (32) à (38) menant à la forme fondamentale (37, 38) des probabilités quantiques, et donc à une propriété analogue à (P1) (cf. I), sont généralisables dans une certaine mesure : l'objectif sera de construire une théorie analogue pour les quantons de l'espace-temps.

Appendice A : Relations barycentriques invariantes

La généralité nécéssitant un certain degré d'abstraction, divers exemples d'application sont proposés plus loin pour éclairer le sens physique des définitions et hypothèses suivantes :

(i) Définition : on range dans une même *classe* K les *phénomènes physiques* ϕ ayant une caractéristique commune : ils sont *décrits par un ensemble de couples de paramètres entiers ou rationnels positifs* N_i et réels p_i , de même nature pour tous les ϕ, en nombre variable avec ϕ : $i = 1$ à $N_{max}(\phi)$. L'ensemble de tous les phénomènes de collision de particules ponctuelles en est un exemple : les N_i sont les masses des particules et les p_i leurs vitesses données dans un certain référentiel r.

(ii) Définition : Les paramètres N et p sont relatifs à un *système physique d'observation* particulier *(en abrégé*: SPO ; cette notion généralise la notion classique de *référentiel* en évitant l'emploi du terme d' "observateur" trop connoté avec une position philosophique particulière par rapport aux problèmes d'interprétation de la mécanique quantique; par convention, on emploiera aussi le terme de "référentiel" dans le même sens). *La configuration d'un SPO est décrite par les paramètres réels r*; lorsque K est la classe des collisions de particules ponctuelles en dynamique relativiste, par exemple, r est la vitesse du référentiel galiléen auquel la description des ϕ est rapportée.

(iii) Hypothèse a : On suppose que du "point de vue" SPO r, quel que soit le phénomène ϕ pris dans la classe K, les paramètres p et N sont reliés exclusivement par *n relations barycentriques indépendantes :*

$$(24) \qquad \sum_i N_i\, w^m(p_i) = N_0\, w^m(p_0) \quad , \quad -j \leq m \leq j \quad , \quad n = 2j+1$$

Ces relations (qu'on appelera aussi *"lois de conservation"*) sont par exemple les règles de sélection des évolutions possibles, c.a.d. compatibles avec la conservation de l'énergie et de l'impulsion dans le cas des collisions de particules ponctuelles, ou bien l'ensemble des conditions d'équilibre en statique, les N désignant les forces en valeur absolue, et les p leurs directions et leurs points d'application, ou bien elles traduisent le multidéterminisme et l'homogénéité des ensembles statistiques en mécanique quantique, etc...

Le problème est d'examiner dans quelle mesure la forme mathématique des fonctions $w^m(p)$ est déterminée par l'existence d'un groupe d'invariance. Précisons cette notion :

(iv) Hypothèse b : *On suppose que tous les phénomènes de la classe K, considérés du point de vue SPO r, sont reproductibles* : si les lois de conservation (24) autorisent un phénomène ϕ décrit par les paramètres (p_i, N_i), elles autorisent également le phénomène $T\phi$ tel que les paramètres p_i soient changés en Tp_i, tandis que les entiers N restent invariants. Autrement dit, les classes K et T K sont identiques. On a donc les relations supplémentaires, qui doivent être compatibles avec (24) :

$$(25) \quad \forall T \in G, \ \sum_i N_i w^m(Tp_i) = N_0 w^m(Tp_0) \quad , \quad -j \leq m \leq j \quad , \quad n=2j+1$$

L'ensemble G des transformations T vérifiant cette condition est le *groupe d'invariance de la classe K* On fera voir plus loin la relation intime qui existe entre ce groupe et la forme des fonctions $w^m(p)$ (Théorème T). Dans la reformulation de théories physiques sur des bases qualitatives, il sera possible de déterminer simultanément le groupe et les fonctions conservées $w^m(p)$, en circonscrivant progressivement les contours de la structure mathématique par l'injection des hypothèses qualitatives du physicien.

(v) Définition :
Considérant un phénomène ϕ arbitrairement choisi dans la classe K, le groupe G donnera également l'ensemble des points de vue SPO r' équivalents à SPO r : ce sont tous les SPO r' tels que le passage de r à r' entraîne pour tout $\phi \in K$ le changement des paramètres de p en T p, $T \in G$; on convient d'appeler cet ensemble *la classe Ω des SPO équivalents pour l'observation des phénomènes φ de la classe K.* Pour tous les SPO de la classe Ω les "lois de la physique", exprimées par les fonctions $w^m(p)$, sont les mêmes ; seuls changent les paramètres descriptifs d'un système donné, de p en Tp . Une application de cette structure est bien connue : le *principe de relativité* stipule que les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen ; la classe K comprend tous les phénomènes physiques, et Ω est la classe des référentiels galiléens équivalents en mouvement rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres, qui inclut aussi par extension les translations spatiale et temporelle, et la rotation spatiale. On a donc les équivalences :

$$(26) \qquad \exists G \Leftrightarrow \exists K \Leftrightarrow \exists \Omega$$

Il reste à régler le problème suivant : quelle est la transformation $\bar{T}$ telle que $r \rightarrow r' = \bar{T} r \Leftrightarrow p \rightarrow p' = T p$?

(vi) Hypothèse c : On se restreint à la seule considération des situations les plus courantes en physique, où *les variables r et p sont de même nature* : dans le cas des collisions de particules ponctuelles, r est la vitesse du référentiel galiléen d'observation ; et dans le cas des ensembles statistiques homogènes en physique quantique, on a $p = \{ \nu_i , r_i \}$, où les ν_i désignent les populations invariantes et les r_i les directions de préparation d'ensembles statistiques simples (voir II). On a donc $Tp = \{ \nu_i , Tr_i \}$, et *les transformations des p et des r sont données par les mêmes opérateurs* T ; pour les quantons doués de spin, ce sont les rotations de l'espace euclidien.

(vii) Définitions : on introduit deux types de fonctions :
(α) *Les fonctions* $w^m(p)$: on applique les lois de conservation invariantes par changement de référentiel à un phénomène ϕ quelconque $\in K$ dans un référentiel donné $\in \Omega$; les p dépendent alors du référentiel particulier choisi.

(β) *L'introduction d'un second type de fonctions se justifie par le sens différent qu'on leur accorde* : en effet, à un phénomène ϕ donné on associe des p fixes, et on considère un référentiel r' variable ; les fonctions $w^m_{r'}(p)$ expriment alors la variation des grandeurs correspondantes par changement de référentiel. Par rapport au SPO r initialement choisi, on a évidemment $w^m_r(p) = w^m(p)$.

Considérons les phénomènes ϕ et $T\phi$, dont les paramètres sont p et T p dans le SPO initial r. *La situation relative de ϕ par rapport au référentiel r' arbitraire $\in \Omega$ est identique à celle de $T\phi$ par rapport à Tr' ; les observations effectuées sur le phénomène ϕ du point de vue r' sont identiques à celles effectuées sur le phénomène $T\phi$ du point de vue Tr'*, ce que traduit la relation :

(27) $$w^m_{r'}(p) = w^m_{Tr'}(Tp) \quad \forall T \in G, \forall r' \in \Omega, \forall p \in K$$

ou bien la relation $w^m_{T^{-1}r}(p) = w^m_r(Tp)$
montrant qu'il est équivalent d'effectuer la transformation T de la polarisation et la transformation T^{-1} du référentiel.

Il en ressort que $\tilde{T} = T^{-1}$. Si l'on revient aux fonctions $w^m(p)$, les p sont variables pour un phénomène ϕ fixe lorsqu'on change de référentiel : p est transformé en Tp lors d'un changement de référentiel de r en $T^{-1}r$.

Représentation linéaire du groupe d'invariance:

Pour tirer toutes les conséquences de l'existence de transformations d'invariance, il convient de traîter un cas un peu plus général, en récrivant les équations (24) sous forme intégrale (l'analyse est effectuée dans un référentiel r fixe, ce qui permet d'omettre l'indice r) :

(28) $$\int N(p)\, w^m(p)\, dp = 0 \quad , \quad -j \leq m \leq j$$

où la fonction N(p) est à valeurs entières positives, négatives ou nulles (on peut aussi bien supposer qu'elle est à valeurs rationnelles). Pour retrouver la forme (   ), il suffit en effet de poser

(29) $$N(p) = \sum_i N(p_i)\, \delta(p-p_i) - N(p_0)\, \delta(p-p_0)$$

La reproductibilité des phénomènes de la classe K par une transformation d'invariance T quelconque implique que les équations supplémentaires

(30) $$\int N(p)\, w^m(Tp)\, dp = 0$$

soient compatibles avec les équations (28). Pour établir les conditions de compatibilité, on remarque que si l'on considère les valeurs des fonctions N(p) et $w^m(p)$ comme les composantes d'indice p de vecteurs **N** et $\mathbf{w}^m$ éléments d'un espace linéaire L , les équations (28) expriment que le vecteur **N** appartient au sous-espace C complémentaire du sous-espace C^* engendré par l'ensemble des n vecteurs linéairement indépendants $\mathbf{w}^m$. On considère ensuite dans la classe K un ensemble E de phénomènes physiques différents, distingués par l'indice supérieur j, tels que les n vecteurs $\mathbf{w}^m$ soient tous identiques quel que soit j , et les vecteurs $\mathbf{N}^j$ tous différents. Les $\mathbf{N}^j$ étant des éléments du sous-espace C complémentaire de C^*, on les choisit de telle sorte qu'ils forment une base de C. Par la transformation T, les $\mathbf{w}^m$ deviennent les vecteurs $T\mathbf{w}^m$ définis par leurs composantes $T\mathbf{w}^m(p) = \mathbf{w}^m(Tp)$, qui d'après les équations (30) sont nécéssairement des éléments de C^* et donc des combinaisons linéaires des vecteurs de base $\mathbf{w}^m$, d'où les relations

(31) $$w^m(Tp) = \sum_{m'} D_{m,m'}(T)\; w^{m'}(p)$$

vérifiées pour tout p, et telles que les matrices D (T) dépendent exclusivement de la transformation T . Comme on peut transposer dans le raisonnement les rôles joués par les deux phénomènes ϕ et $T\phi$, qui sont la répétition l'un de l'autre, la matrice D (T) est inversible ; de plus, on vérifie aisément que la matrice associée au produit de deux transformations est le produit des matrices correspondantes, qui est associatif. L'ensemble G est donc un groupe dont les matrices D (T) constituent une représentation.

D'où le **théorème T** :
L'ensemble des transformations d'invariance est un groupe et l'ensemble des fonctions w(p) intervenant dans les relations barycentriques (24) forme une base d'une représentation réelle de ce groupe..

1°) *Application à la théorie quantique* (on se reportera à II pour les définitions et les notations)

Il résulte du théorème T que les probabilités quantiques sont transformées par le groupe G de deux manières équivalentes :

(i) r' fixe, p variable : $w_{r'}^{m'}(Tp) = \sum_m w_{r'}^{m}(p)\ D_{m,m'}(T)$

(ii) p fixe, r' variable : $w_{Tr'}^{m'}(p) = \sum_m w_{r'}^{m}(p)\ \bar{D}_{m,m'}(T)$

et la condition $w_{r'}^{m'}(p) = w_{Tr'}^{m'}(Tp)$ est équivalente à $\bar{D}_{m,m'}(T) = D_{m,m'}(T^{-1})$

Tout en préparant la voie vers une généralisation ultérieure, on se restreint ici au cas où G est le groupe des rotations, dont les représentations sont complètement réductibles en somme directe de représentations irréductibles unitaires (9). Considérées comme fonctions de p, les grandeurs $w_{r'}^{m}(p)$ peuvent être écrites comme des combinaisons linéaires de fonctions de base $Y_m^l(p)$ associées aux différentes représentations ; l'indice l désigne la représentation, et parcourt toutes les valeurs entières positives; l'indice entier m tel que $|m| \leq l$ distingue les fonctions appartenant à la même représentation l de dimension $2l+1$. La loi de transformation des fonctions de base des sous-espaces irréductibles est de la forme

$$(32) \qquad Y_m^l(Tp) = \sum_{m'} Y_{m'}^l(p)\, D_{m',m}^l(T)$$

On convient de choisir les fonctions $Y_m^l(p)$ de telle sorte que les $D_{m',m}^l$ soient les matrices de transformation des harmoniques sphériques. Comme la polarisation p d'un ensemble statistique homogène est équivalente à la donnée des paramètres (v, r) pour chacun des ensembles statistiques simples dont il est le mélange, la forme la plus générale des fonctions $Y_m^l(p)$ est une combinaison linéaire d'harmoniques sphériques $Y_m^l(r_i)$, où $r_i = (\theta_i, \varphi_i)$ est la direction de préparation du i-ème ensemble simple, les

$J^l_{r_i}$ sont des constantes et le facteur $\omega_l = \dfrac{4\pi}{2l+1}$ est introduit pour la commodité :

(33) $$Y^l_m(p) = \omega_l \sum_i J^l_{r_i} Y^l_m(r_i)$$

La décomposition du champ de probabilité quantique sur cette base de fonctions s'écrit

(34) $$w^{m'}_{r'}(p) = \sum_{l,m} A^{m'}_{l,m}(r')Y^l_m(p)$$

avec des coefficients $A^{m'}_{l,m}$ dépendant de la direction du SPO r'. La dimension de l'espace C' engendré par les vecteurs-fonctions $w^{m'}_{r'}$ étant L(n)+1 , la décomposition comprend un nombre fini de représentations tel que

(35) $$L(n) + 1 = (2l_1+1)+(2l_2+1)+(2l_3+1)+ \ldots$$

Considérons à présent les $w^{m'}_{r'}(p)$ comme des fonctions de r' , avec p fixé. La loi de transformation des coefficients $A^{m'}_{l,m}(r')$ se déduit de la condition $w^{m'}_{Tr'}(p) = w^{m'}_{r'}(T^{-1}p)$, en tenant compte du fait que les représentations-l sont unitaires ; on obtient successivement :

$$w^{m'}_{r'}(T^{-1} p) = \sum_{l,m} A^{m'}_{l,m}(r') \left[\sum_{m_1} Y^{m_1}_l(p)\, D^l_{m_1,m}(T^{-1})\right] = \sum_{l,m_1} \left[\sum_m A^{m'}_{l,m}(r')\, D^{l\,*}_{m,m_1}(T)\right] Y^{m_1}_l(p)$$

et on en déduit que les $A^{m'}_{l,m}(r')$, avec $r' = (\theta', \varphi')$, sont à un facteur constant près identiques aux complexes conjugués des harmoniques sphériques :

(36) $$A^{m'}_{l,m}(r') = Y^{m'}_l(r')^*\, s'_{l,m'}$$

D'où la forme nécessaire du champ de probabilité quantique :

(37) $$w^{m'}_{r'}(p) = \sum_{l,m} Y^m_l(p)Y^m_l(r')^*\, s'_{l,m'}$$

Les constantes universelles $s'_{l,m'}$ doivent être choisies de telle sorte que les probabilités soient positives. En substituant (33) dans (37) , on s'aperçoit que le champ de probabilité associé à un ensemble homogène est une superposition de champs de probabilité correspondant à des ensembles simples (indice i) :

$$
(38) \qquad
\begin{aligned}
w_{r'}^{m'}(p) &= \sum_{l} \sum_{i} J_{q}^{l} \left(\omega_{l} \sum_{m} Y_{l}^{m}(\theta_{i},\varphi_{i}) Y_{l}^{m}(\theta',\varphi') \right) s'_{l,m'} \\
&= \sum_{l} \sum_{i} J_{q}^{l} \, P_{l}(\cos(r_{i},r')) \; s'_{l,m'}
\end{aligned}
$$

et ce résultat démontre en même temps que le champ de probabilité d'un ensemble statistique simple est à symétrie cylindrique . C.Q.F.D.

2°) A titre d'exercice, le lecteur pourra étudier les cas suivants (l'objectif est de montrer que les hypothèses à ajouter à celles du théorème T sont purement qualitatives, et par là de jauger la puissance des principes d'invariance et leur pouvoir unificateur) :

a) *Loi de composition des forces bidimensionnelles concourantes*:
le paramètre p est l'angle. Solution : $w_1(p) = \cos p$ et $w_2(p) = \sin p$

b) *Loi de composition de forces coplanaires et perpendiculaires à un levier*:
On postulera l'existence de deux conditions d'équilibre sous la forme de relations barycentriques, et on démontrera que l'invariance par translation le long de la droite-support du levier entraîne $w_1(p) = \cosh p/R$ et $w_2(p) = \sinh p/R$ où p est la coordonnée du point d'application d'une force. Supposant l'espace homogène, on démontrera que R est la courbure statique constante (pour cela, on calculera la somme des angles d'un triangle isocèle dont les côtés sont trois leviers). On distinguera trois géométries qualitativement différentes selon la valeur de R : les géométries de Lobachevsky, de Riemann (sphérique), et d'Euclide. Les lois du levier d'Archimède sont-elles équivalentes à l'hypothèse que la géométrie est euclidienne ? Comment le cas (a) est-il inclus dans (b) ?

c) *Théorie relativiste des collisions*:
On considèrera le processus de collision de particules ponctuelles le plus général en dimension un, en admettant au départ l'existence d'une seule loi de conservation. Les paramètres N seront les masses des particules, et p un paramètre de vitesse dont la loi de composition est l'addition, appelé la rapidité (ref 5), relié à la vitesse v par $v = c \tanh p$. On démontrera que la symétrie par changement de signe de la rapidité entraîne l'existence des deux lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion, correspondant à des fonctions $w_1(p)$ paire et $w_2(p)$ impaire respectivement. On démontrera que l'invariance par changement de référentiel galiléen détermine ces fonctions inconnues ; solution : $w_1 = \cosh p$ et $w_2 = \sinh p$. On établira les formules de la transformation de Lorentz pour l'énergie et l'impulsion.

d) *Cinématique relativiste :*

On définit des classes de propagations équivalentes : deux propagations sont équivalentes si partant simultanément d'un même point elles aboutissent simultanément au même point. Une propagation quelconque pouvant toujours être considérée comme la succession de propagations à rapidité constante, éventuellement infinitésimales, on écrira en dimension un les lois de conservation des temps de parcours et des espaces parcourus pour les propagations appartenant à une même classe, analogues à celles traitées en (c); quel est le sens physique du paramètre introduit par analogie avec la masse ? A partir des expressions des temps et des espaces obtenues par analogie avec (c), on retrouvera la relation entre la vitesse et la rapidité, on établira par analogie avec (b) que l'espace des vitesses est un espace de Lobachevsky de courbure c et on en démontrera que c est la vitesse limite de propagation de l'énergie et de l'information.

Appendice B

Je voudrais présenter sommairement les vérifications effectuées pour étayer la conjecture suivante :

Soit W une matrice carrée de dimension n dépendant du paramètre t ($-1 \le t \le +1$) de la manière suivante : $W(t) = s\,P(t)\,s^{-1}$, où P est la matrice diagonale dont les éléments non nuls sont la suite des polynômes de Legendre $P_0(t)$, $P_1(t)$,..., $P_{n-1}(t)$, et où s est une matrice carrée inversible indépendante de t. Si l'on exige de plus que tous les éléments matriciels de W soient positifs ou nuls, et que la somme de toutes les lignes de W soit l'unité, la matrice W est unique et identique à la matrice des probabilités quantiques de transition entre les états de spin dans une direction initiale r donnée et ceux relatifs à une direction finale r' telle que $t = \cos(r,r')$ (à condition de considérer comme identiques deux solutions se déduisant l'une de l'autre par une permutation effectuée sur les lignes et les colonnes de W)

1°) <u>Interprétation géométrique :</u>

A chacun des états quantiques est associé l'extrémité d'un vecteur unité e_m dans l'espace euclidien de dimension n ; la trajectoire du point défini comme l'extrémité du vecteur $e_m(t) = W(t)\, e_m = \sum_{m'} W_{m,m'}(t)\, e_{m'}$ est dans l'hyperplan de dimension n-1 passant par les points $e_{m'}$ et doit rester à l'intérieur du polyèdre régulier dont ces points sont les sommets ; les probabilités $W_{m,m'}(t)$ sont les coordonnées barycentriques de $e_m(t)$ par rapport aux sommets.

Appelant T la transformation particulière W(-1), l'identité $T^2 = I$ est une conséquence immédiate de $P_\ell(-1) = (-1)^\ell$; vu que $T_{m,m'} > 0$, on en déduit facilement que T effectue une permutation des sommets (l'idée-clé est : $\sum_i T_{i,j}\ T_{j,k} = 0 = T_{i,j} = 0$ et $T_{j,k} = 0 \quad j$) , ce qui justifie un classement des états ($-j \le m \le j$, $n = 2j+1$) tel que T soit représentée par une matrice diagonale gauche c.a.d. $e_{-m} = T\, e_m$, d'où l'on déduit aisément les propriétés de symétrie suivantes :

i) les vecteurs propres de W(t) sont alternativement pairs et impairs :
$s_{-m,\ell} = (-1)^\ell\, s_{m,\ell}$

ii) la matrice W(t) est à symétrie centrale : $W_{-m,-m'} = W_{m,m'}$

iii) $W_{m,-m'}(-t) = W_{m,m'}(t)$; le polynôme (de degré n-1) $W_{m,m'}(t)$ est divisible par 1+t lorsque $m' \neq -m$ et par 1-t lorsque $m' \neq m$.

2) Vérification de la conjecture pour n<6

La méthode consiste à exprimer les éléments matriciels de $W = s\,P\,s^{-1}$ sous la forme de polynômes de degré n-1 en $t=\cos\theta$ compte tenu des propriétés précédentes, et à étudier les conditions pour qu'ils soient positifs lorsque t est dans l'intervalle [-1, +1] ; on peut de plus imposer que les éléments de la première ligne et de la première colonne de la matrice s soient égaux à l'unité sans restreindre la généralité.

a) Spin 1/2 (n=2)

La matrice s est déterminée de manière univoque par les conditions ci-dessus, et on retrouve bien les expressions des probabilités quantiques :

$$W=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+t & 1-t\\ 1-t & 1+t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u^2 & v^2\\ v^2 & u^2\end{bmatrix}$$

b) Spin 1 (n=3)

La matrice s dépend d'un seul paramètre x et la forme générale de la matrice W s'écrit :

$$W=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2x\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & t & \\ & & \frac{3t^2-1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x & 2x & 2x\\ 1+2x & 0 & -1-2x\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{2(1+2x)}$$

On obtient successivement les inégalités suivantes :
$x \geq 0$ par suite de l'égalité $W_{0,1}=xW_{1,0}$; la valeur de l'élément central $W_{0,0}=(1+2x\,P_2(t))/(1+2x)$ pour t=0 est $(1-x)/(1+2x)$, d'où $x \leq 1$; la condition $W_{1,1}=(1+t)(3t+4x-1)/(8x+4) \geq 0$ pour $|t|\leq 1$ entraîne $x \geq 1$; finalement il subsiste une solution unique correspondant à x=1, la solution quantique.

c) Spin 3/2 (n=4)

L'expression de la matrice $W= s\,P\,s^{-1}$ peut en toute généralité être écrite sous la forme suivante dépendant de 3 paramètres a, k et x :

$$W = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & -a & -kx \\ 1 & -x & -a & kx \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & t & & \\ & & \frac{3t^2-1}{2} & \\ & & & \frac{5t^3-3t^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax(1+k) & x(1+k) & x(1+k) & ax(1+k) \\ kx(1+a) & 1+a & -1-a & -kx(1+a) \\ x(1+k) & -x(1+k) & -x(1+k) & x(1+k) \\ x(1+a) & -1-a & 1+a & -x(1+a) \end{bmatrix}$$

avec $D = 2x\,(1+a)\,(1+k)$. Les 3 paramètres sont déterminés par la condition que les éléments matriciels suivants soient positifs pour $|t| \leq 1$:

$$W_{3/2,3/2} = \frac{1}{D}(1+t)\left(\frac{5x}{2}(1+a)t^2 + \left(\frac{3x}{2}(1+k) - \frac{5x}{2}(1+a) \right)t + \left(a - \frac{1}{2}\right) x\,(1+k) \right)$$
$$W_{1/2,1/2} = \frac{1}{D}(1+t)\left(\frac{5kx}{2}(1+a)t^2 + \left(\frac{3ax}{2}(1+k) - \frac{5kx}{2}(1+a) \right)t + \left(1 - \frac{a}{2}\right) x\,(1+k) \right)$$
$$W_{3/2,1/2} = \frac{1}{D}(1-t^2)\left(\frac{3x}{2}(1+k) + \frac{5}{2}(1+a)t \right)$$
$$W_{1/2,3/2} = \frac{1}{D}(1-t^2)\left(\frac{3ax}{2}(1+k) + \frac{5kx^2}{2}(1+a)t \right)$$

En considérant le cas particulier $t=0$, on trouve immédiatement $1/2 \leq a \leq 2$ et l'invariance du système d'inéquations par la transformation de x en $-x$, équivalente à la transposition des lignes 2 et 3 de s, autorise la restriction du domaine d'étude à $x \geq 0$. En outre, l'invariance par la transformation des 3 paramètres en leurs inverses, qui revient à transposer les lignes 1 et 2, 3 et 4 de la matrice s, permet de poser $1/2 \leq a \leq 1$. Dans le cas $t=-1$, on obtient (respectivement) les inégalités :

$$k \leq k_2(a) \quad , \quad k_2(a) = -6 + \frac{9}{2-a}$$
$$x \leq x_2 \quad , \quad x_2 = \frac{3a\,(1+k)}{5k\,(1+a)}$$
$$x \geq x_1 \quad , \quad x_1 = \frac{5\,(1+a)}{3\,(1+k)}$$
$$k \geq k_1(a) \quad , \quad k_1(a) = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{5}{2+a} \right)$$

Supposons la valeur de a fixée, on peut choisir k dans l'intervalle $\lfloor k_1 , k_2 \rfloor$ car la condition $k_1 \leq k_2$ est toujours satisfaite. Un intervalle de valeurs possibles de x existe pourvu que $x_1 \leq x_2$; à cet effet, il faut que k ait été en plus choisi à l'extérieur de l'intervalle dont les bornes inférieure $k_1'(a)$ et supérieure $k_2'(a)$ sont définies par

$$k'_1 \; , \; k'_2 \; = \; -1 + (\frac{5}{3})^2 \frac{(1+a)^2}{2a} (1 \pm \sqrt{1 - \frac{6}{5} \frac{a}{(1+a)^2}})$$

Par conséquent, les valeurs possibles de k sont telles que $k_1(a) \leq k \leq k'_1(a)$ et on s'assure aisément que ce domaine existe, grâce à l'inégalité $1/10 \leq k'_1(a) \leq 1/9$.

Les extrema des polynômes du second degré en facteur dans les éléments diagonaux $W_{3/2,3/2}$ et $W_{1/2,1/2}$ sont situés respectivement en $t_0=(1+x_2)/2$ et $t'_0=(1-x_1^{-1})/2$. L'inégalité précédente permet d'établir aisément par majoration et minoration que $|t_0| < 1$ et $|t'_0| > 1$, d'où l'on déduit que $W_{1/2,1/2} \geq 0$ pour $|t| \leq 1 < 1$. La condition $W_{3/2,3/2} \geq 0$ pour $|t| \leq 1$ conduit à l'inéquation

$$9 k^2 - 2 k (20 a^2 + 25 a - 4) + 24 - 15 a^2 \leq 0$$

et k doit donc aussi être intérieur à l'intervalle dont les bornes sont les racines du trinôme précédent :

$$k''_1 \; , \; k''_2 \; = \frac{1}{9}(20 a^2 + 25a - 4 \pm 20 \sqrt{(a-\frac{1}{2})(a+1)^3})$$

Finalement, la compatibilité des inégalités concernant k exige que $a=1$, $k=1/9$ et $x=3$, et cette solution, unique, est équivalente à la solution quantique que l'on retrouve par la transformation d'invariance $a \to 1/a$, $k \to 1/k$, $x \to 1/x$

d) Spin 2 (n=5)

La vérification de l'unicité de la matrice positive $W = s P s^{-1}$ est effectuée avec l'hypothèse simplificatrice $W_{m,m'} = W_{m',m}$, dont on s'affranchira au paragraphe suivant, et qui permet d'écrire s sous la forme d'une matrice orthogonale dépendant de 2 paramètres a et b :

$$s = \begin{bmatrix} \sqrt{5}^{-1} & A^{-1} & B^{-1} & -aA^{-1} & (3b+2)C^{-1} \\ \sqrt{5}^{-1} & aA^{-1} & bB^{-1} & A^{-1} & -(2b+3)C^{-1} \\ \sqrt{5}^{-1} & 0 & -2(b+1)B^{-1} & 0 & 2(1-b)C^{-1} \\ \sqrt{5}^{-1} & -aA^{-1} & bB^{-1} & -A^{-1} & -(2b+3)C^{-1} \\ \sqrt{5}^{-1} & -A^{-1} & B^{-1} & aA^{-1} & (3b+2)C^{-1} \end{bmatrix} \quad , \quad s^{-1} = s^{+}$$

avec $A = \sqrt{2(1+a^2)}$, $B = \sqrt{2(3b^2+4b+3)}$, $C = B\sqrt{5}$

On forme d'abord les éléments matriciels indépendants de a :

$$W_{0,0}(t)=\frac{7(1-b)^2t^4+6(b^2+6b+1)t^2-(b^2+6b+1)}{4(3b^2+4b+3)}\geq 0$$
$$W_{0,1}(t)=(1-t^2)\frac{-7t^2(2b^2+3b-3)+10b^2+11b+3}{8(3b^2+4b+3)}\geq 0$$
$$W_{0,2}=(1-t^2)\frac{-7t^2(2+3b-3b^2)+10+11b+3b^2}{8(3b^2+4b+3)}\geq 0$$

Remarquant l'invariance de ce système d'inéquations par la transformation de b en 1/b , on restreint leur étude, qui ne présente pas de difficultés particulières, au domaine $|b| \leq 1$, et on trouve une solution unique $b=-1/2$ Substituant la valeur trouvée dans les autres éléments matriciels, on aboutit à un système d'inéquations invariant par le changement de a en -a :

$$W_{2,2}(t)=\frac{1+t}{16}\left(t^3+\frac{19a^2-1}{a^2+1}t^2+\frac{7-13a^2}{1+a^2}t+1\right)\geq 0$$
$$W_{2,1}=\frac{1-t^2}{4}\left(t^2+\frac{5a}{1+a^2}t+1\right)\geq 0$$
$$W_{1,1}(t)=(1+t)\left(t^3+\frac{1-4a^2}{4(1+a^2)}t^2+\frac{a^2-4}{4(a^2+1)}t+\frac{1}{4}\right)\geq 0$$

La valeur de a est déjà déterminée par les conditions $\lim_{t\to 1} W_{1,1}(t)/(1+t) \geq 0$ et $\lim_{t\to 1} W_{2,2}(t)/(1+t) \geq 0$, qui entraînent respectivement $a^2 \geq 1/4$ et $a^2 \leq 1/4$; d'où les deux valeurs équivalentes $a=1/2$ et $a=-1/2$, avec lesquelles on vérifie que toutes les autres inégalités sont satisfaites et qu'on retrouve bien la solution quantique.

3) Démonstration de l'isolement de la solution quantique

Soit $W= s\,P\,s^{-1}$ la solution quantique. L'objectif est de prouver l'impossibilité de former un ensemble continu de solutions, dépendant du paramètre $y > 0$, $W'= s'\,P\,s'^{-1}$ avec $s'=(I+y\,d)\,s$, et d une matrice de déformation indépendante de t et de y , telle que

$$(I+y\,d)^{-1}=I-y\,d+y^2d^2-y^3d^3+\ldots$$

et $$W'(t)=W(t)+y\,[d,W]-y^2[d,W]\,d+y^3[d,W]\,d^2+\ldots$$

Il suffit de considérer les valeurs de y proches de zéro, pour lesquelles la variation $W'(t)-W(t)$ est donnée au premier ordre par le commutateur $[d,W]$ La notation t_0 désigne un zéro réel quelconque de $W(t)$ tel que $|t_0| \le 1$ (tous les éléments matriciels de W en possèdent au moins un). La forme générale de la matrice d est restreinte par les conditions suivantes que l'on écrit pour tous les couples d'indices m,m' et tous les zéros t_0 :

$$W'_{m,m'}(t_0) - y\,(\,[\,d\,,W(t_0)\,]\,)_{m,m'} - y^2\,(\,[\,d\,,W(t_0)\,]\;d\,)_{m,m'}$$

d'où $(\,[\,d\,,W(t_0)\,]\,)_{m,m'} \ge 0$, et dans l'éventualité où ce terme serait nul, $(\,[\,d\,,W(t_0)]\,d\,)_{m,m'} \le 0$, etc...

Supposons qu'il existe une solution $d = d' + d''$, où d' et d'' sont des matrices symétrique et antisymétrique respectivement. On vérifie facilement d'une part que d', d'', $[\,d'\,,W\,]$, $[\,d''\,,W\,]$ sont des matrices à symétrie centrale, et d'autre part, la matrice W étant symétrique, que $[\,d'\,,W\,]$ et $[\,d''\,,W\,]$ sont respectivement antisymétrique et symétrique. $W_{m,m'}(t)$ et $W_{m',m}(t)$ sont identiques mais leurs variations induites par la partie symétrique d' sont opposées (ou nulles, éventuellement). Par conséquent, il existe certainement une autre solution, d'' , à moins que $d''=0$: dans ce cas, il faut et il suffit que $[\,d'\,,W\,] = 0$ pour que l'ensemble des conditions sur d' soient satisfaites, ce qui entraîne $d' = s\,K\,s^{-1}$, où K est une matrice diagonale, et on obtient ainsi la solution triviale consistant à multiplier les vecteurs propres de W par des constantes arbitraires, les éléments diagonaux de K. Nous examinons donc la possibilité d'une solution d'' antisymétrique, douée en plus de symétrie centrale ; s'il s'avère que nécéssairement $d''=0$, alors l'impossibilité d'une solution non triviale sera établie.

Prenons le cas n=5, à titre d'illustration. La méthode, en principe programmable sur ordinateur à tout ordre n, consiste :

i) à calculer les zéros t_0 de tous les éléments de la matrice quantique W, qui est connue, ainsi que leurs ordres $o(t_0)$

(ii) à calculer les termes d'ordre $o'(t_0)$ inférieur à $o(t_0)$ dans les expressions des variations des éléments matriciels induites par d'', puis à imposer la condition que leurs coefficients soient positifs, ce qui donnera un ensemble d'inéquations déterminant les éléments de la matrice de déformation d''

La matrice d'' est décomposée sur une base de 4 matrices Γ_i à la fois antisymétriques et à symétrie centrale

$$d'' = c_1\,\Gamma_1 + c_2\,\Gamma_2 + c_3\,\Gamma_3 + c_4\,\Gamma_4$$

avec les expressions suivantes des matrices Γ_i :

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où le système d'inéquations :

(1)$W_{2,2}$: $c_2 - c_1 \geq 0$

(2)$W_{2,1}$: $c_3 \geq c_2 - c_1$ *(2) et (7)* $\Rightarrow c_4 \leq 0$, *(1)et(4)* $\Rightarrow c_4 \geq 0$, *d'où* $c_4 = 0$

(3)$W_{2,0}$: $c_4 \leq 3c_2 - 2c_3$ *avec* $c_4 = 0$, *(7)* $\Rightarrow c_3 \leq 0$; *(1)et(2)* $\Rightarrow c_3 \geq 0$, *d'où* $c_3 = 0$

(4)$W_{1,1}$: $3c_4 \geq 2(c_2 - c_1)$ *et aussi* $c_1 = c_2$;

(5)$W_{1,1}$: $3c_4 \geq 5c_2 + 4c_1$ *compte tenu de* $c_3 = c_4 = 0$, *(3)* $\Rightarrow c_2 \geq 0$;

(6)$W_{1,0}$: $c_4 \leq -2c_3 - 3c_2$ *comme* $c_4 = 0$ *et* $c_1 = c_2$, *(5)* $\Rightarrow c_2 \leq 0$; *de là,* $c_1 = c_2 = 0$

(7)$W_{0,0}$: $2c_4 \leq -c_3$ *en définitive* $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ *et...*

...il ne subsiste que la solution quantique.

Références

(1) F. Balibar, J.M. Levy-Leblond : Quantique
(Editions du C.N.R.S.)

(2) K. Blum : Density Matrix Theory and Applications
(Plenum Press)

(3) N. Bohr : "Quantum mechanics and physical reality"
(Nature, **136**, (1935),65 and Phys. Rev. **48**,(1935),696-702)

(4) C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë : Mécanique Quantique I et II
(Ed. Hermann)

(5) C. Comte : "Leibniz aurait-il pu découvrir la relativité?"
(Eur. J. Phys. **7**,(1986),225-235)

(6) A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen : "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?"
(Phys. Rev. **47**, (1935),777-780)

(7) B. d'Espagnat : Conceptual Foundations of Quantum Mechanics
(Benjamin Press)

(8) D.M. Greenberger, M.A. Horne, A. Shimony, A. Zeilinger :
"Bell's theorem without inequalities"
(Am. J. Phys. **58**,(1990),1131-1142)

(9) M. Hamermesh : Group Theory and its Application to Physical Problems
(Addison Wesley)

(10) F. Klein : Le Programme d'Erlangen,
avec une introduction de Dieudonné et une postface de Russo
(Gauthiers-Villars, collection Discours de la Méthode)

(11) L. Landau, E. Lifchitz : Théorie classique des Champs
(Ed. de la Paix, Moscou)

(12) A. Messiah : Mecanique Quantique I et II (Dunod)

(13) N.D. Mermin : "What's wrong with these elements of reality?"
(Physics Today, June 1990 and Phys. Rev. Letters,**65**,**15**,(1990),1838)

(14) M. Redhead : Incompleteness, Nonlocality, and Realism,
a Prolegomenon to the Philosophy of Quantum Mechanics
(Oxford University Press)