Séminaire de philosophie et mathématiques

Yvon Gauthier

Hilbert et la logique interne des mathématiques

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1993, fascicule 6
« Hilbert et la logique interne des mathématiques », , p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1993___6_A1_0>

Hilbert et la logique interne des mathématiques

par

Yvon Gauthier

Yvon Gauthier est professeur au département de philosophie de l'Université de Montréal

Hilbert a admis en 1930 que son programme métamathématique, le point de vue fini ("finit") dans les fondements des mathématiques correspondait essentiellement à celui de Kronecker. Nous montrons comment les travaux de Kronecker, en particulier ses Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, ont influencé l'oeuvre logique et mathématique de Hilbert. Mais Hilbert a voulu étendre son programme au-delà d'une théorie arithmétique dans une "transarithmétique" qui n'est plus finitaire et son programme doit être révisé.

0. Introduction. La métamathématique

Hilbert emploie comme Weyl et Brouwer à qui il s'est parfois violemment opposé, l'expression "das inhaltliche logische Schliessen"(1) que je traduis par "logique interne" plutôt que "logique du contenu". Hilbert, Weyl(2) et Brouwer partagent donc l'idée d'une logique plus fondamentale que la logique externe ou ordinaire qui ne serait que la structure superficielle ou apparente des mathématiques. Pour Hilbert, la logique interne n'est pas la logique formelle (externe) qui n'a qu'un rôle ancillaire — la démonstration des théorèmes d'une théorie donnée. Mais la logique interne qu'il identifie souvent à la métamathématique(3) pourrait plutôt être considérée comme une "intramathématique" dans le sens précisément où c'est la non-contradiction ou la consistance des axiomes d'une théorie qui est en jeu davantage que la déduction des théorèmes particuliers. En d'autres mots, la théorie des démonstrations, "Beweistheorie" ou "Metamathematik", est une logique interne dans la mesure où elle porte sur la démarche mathématique à l'oeuvre dans la théorie mathématique. L'expression "théorie des démonstrations" en est venue à signifier théorie des systèmes formels et, par extension, formalisme. Or, et c'est l'hypothèse que je veux défendre, la logique interne du contenu est tout le contraire du formalisme et l'entreprise ou le programme de Hilbert pourrait être formulé dans les termes suivants: la logique interne (finitaire) réduit la logique formelle (infinitaire) dans la même mesure que la théorie mathématique finitaire réduit les problèmes infinis de la théorie des formes ou théorie des invariants à un calcul fini. Il faut rappeler ici les résultats importants qu'a obtenus Hilbert et les situer brièvement dans la tradition mathématique qu'il a revendiquée, l'héritage de Gauss et de Kronecker. Il est utile de préciser que Hilbert admet au fondement de toute son entreprise le socle de l'arithmétique intuitive finie (énoncés arithmétiques clos sans quantificateurs). Viennent ensuite les énoncés arithmétiques quantifiés (avec $\exists$ ou $\forall$) qui introduisent un ensemble infini (dénombrable) d'éléments, e.g. le théorème d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers, le dernier théorème de Fermat, qui ne peuvent pas être immédiatement soumis à la négation, parce qu'ils réfèrent à la suite entière (l'ensemble) des nombres naturels et, enfin, les énoncés mathématiques transfinis qui sont transarithmétiques par définition et qui doivent être considérés comme des structures idéales, de la même manière que les éléments idéaux de Kummer ou mieux, comme nous allons le voir, les indéterminées de Kronecker. Pour sauvegarder la logique aristotélicienne, il faut alors introduire un langage formalisé qui préserve les lois classiques de la quantification pour les énoncés arithmétiques infinis et les énoncés transfinis ou transarithmétiques. C'est ici que la logique interne devient métamathématique, se formalise en une théorie des démonstrations qui est devenue la logique formelle ou plutôt la théorie des systèmes formels. Ce que Hilbert entendait auparavant par logique formelle n'était que la logique usuelle des mathématiques ordinaires interprétée comme calcul formel (externe). Mais il fallait aller plus loin pour rendre compte du caractère interne de l'arithmétique intuitive finie. De là, on pouvait concevoir une logique arithmétique interne en extension: transarithmétique qui gouverne l'ensemble des mathématiques. Pour garantir que cette extension soit conservatrice, i.e., qu'elle conserve la validité de l'arithmétique finie, une preuve de consistance de l'arithmétique (et de l'analyse) était nécessaire. La métamathématique est donc l'expression formelle du point de vue fini.

1. L'arithmétique

Hilbert a la plus grande admiration pour les travaux de Kronecker en arithmétique, mais il ne partage pas sa réprobation de Cantor pourfendu comme "pervertisseur de la jeunesse". Selon son mot célèbre, personne ne doit nous chasser du paradis que Cantor a créé pour nous(4). L'ambivalence de Hilbert vis-à-vis Kronecker l'amène à lui prêter le fameux motto "Dieu a créé le nombre entier, tout le reste est l'oeuvre de l'homme"(5). Pourtant, ce que l'on trouve chez Kronecker n'est pas d'inspiration divine, mais plutôt gaussienne, lorsqu'il dit que le nombre est une création de notre esprit, alors que l'espace et le temps ont une réalité (hors de notre esprit) que nous ne pouvons déterminer a priori ou de façon absolue(6). Kronecker suit ici Gauss et Riemann contre Kant. Mais les mathématiques sont l'oeuvre d'un esprit fini et les méthodes de construction de l'objet — les solutions explicites — doivent remplacer les théorèmes d'existence comme dans le théorème fondamental de l'algèbre où une équation algébrique sans racine (ou solution) mène à une contradiction. Hilbert ne manquera pas de suivre cette dernière leçon de Kronecker dans ses travaux arithmétiques, mais il l'oubliera quand il pourra emprunter la voie royale transcendante des théorèmes d'existence dans la théorie des invariants.

Cette voie, il la pratique déjà dans ses travaux de théorie des nombres et s'il vénère les travaux de Kummer et Kronecker, il veut faire l'économie de longs calculs. Dans son rapport sur "La théorie des corps de nombres algébriques", Hilbert écrit:

> J'ai cherché à éviter le lourd appareil de calcul de Kummer pour suivre le précepte de Riemann qui voulait qu'on obtienne les résultats au moyen des concepts et non par le calcul(7).

Pourtant, c'est l'esprit de Kummer et Kronecker en théorie des nombres que Hilbert partage. La mathématique moderne est placée sous le signe du nombre "*unter dem Zeichen der Zahl*"(8) et l'arithmétisation de la théorie des fonctions (analyse) a pour but de montrer que là aussi la preuve d'un fait mathématique doit se ramener ultimement à des relations sur les entiers rationnels(9). Kronecker ne parlait pas autrement et les coefficients indéterminés ou simplement indéterminées ("Unbestimmte") qu'il introduit en 1881 sont des grandeurs algébriques (variables indépendantes) qui jouent le rôle d'extensions idéales[10]. La théorie des corps de nombres algébriques, rappelons-le brièvement, repose sur des concepts finitaires: en termes contemporains, nous disons qu'un sous-corps F des nombres complexes est un corps de nombres algébriques s'il est restreint au corps des nombres rationnels Q - un corps est tout ensemble de nombres qui pour deux nombres quelconques α et β, contient $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha\beta$ et α / β (pour $\beta \neq 0$). Dans le cas où F est un corps de nombres algébriques, le sous-ensemble de F constitué des seuls entiers algébriques ω est un anneau (de Dedekind); ω est ici un nombre complexe qui est la racine d'un polynôme

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0$$

où les b_n sont des entiers. Un idéal A est engendré par les entiers algébriques $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ d'un corps de nombres algébriques K s'il est défini par les sommes

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n$$

où les λ_n sont des entiers arbitraires. Le résultat principal dans ce domaine est un résultat démontré par Dedekind et Kronecker sur le nombre fini des classes d'équivalence d'un corps de nombres algébriques et entraîne le théorème fondemental de la factorisation unique d'un idéal en idéaux premiers (divisibles par eux-mêmes et par l'idéal unité) par la divisibilité de tout idéal en un nombre fini d'idéaux. C'est la théorie des corps de classes d'équivalence d'idéaux qui intéresse Hilbert; ses derniers travaux en théorie des nombres ont porté sur les corps abéliens relatifs et ont donné naissance à ce que l'on appelle maintenant la théorie des groupes de classes. Hilbert soutient qu'il faut dans chaque cas[11] trouver le corps des classes Kk pour un corps de base arbitraire k par des moyens purement arithmétiques, bien qu'il existe des méthodes transcendantes, comme celle de Dirichlet (séries de Dirichlet). Qu'il soit difficile encore aujourd'hui[12] de calculer le nombre de classes (des classes d'équivalence d'idéaux) témoigne de l'esprit arithmétique de Hilbert.

En réalité, les résultats principaux en théorie des nombres, la loi de réciprocité quadratique (et ses généralisations), la factorisation unique — le théorème fondamental de l'arithmétique énonce que tout entier est représentable de façon unique par un produit de facteurs premiers — et sa généralisation dans les corps finis (de nombres algébriques), la distribution des nombres premiers

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1$$

et le théorème de Dirichlet sur l'infinité des nombres premiers dans toute progression arithmétique a+nb (démontrés par Selberg en 1949 par des moyens purement arithmétiques), tout cela manifeste le caractère finitaire de l'arithmétique: si les preuves sont souvent analytiques (ou transcendantes), l'objet est essentiellement de nature finie. On pourrait dire la même chose en géométrie algébrique (ou mieux arithmétique) des résultats de Weil sur le nombre fini de solutions rationnelles sur les corps finis et ceux de Faltings sur le nombre fini de points rationnels sur toute courbe elliptique de genus ≥ 2 où la méthode de descente infinie de Fermat(13), bien qu'arithmétique dans son essence, est souvent utilisée d'une manière non constructive ou non effective.

Hilbert conçoit l'idéal finitaire de l'arithmétique, mais il accepte d'y accéder par des moyens non finitaires. L'arithmétisation de l'analyse est un rêve chez lui aussi bien que chez Kronecker; il dira même que l'arithmétisation de la géométrie est accomplie dans les géométries non euclidiennes par l'introduction directe du concept de nombre en géométrie(14). Les travaux de Hilbert en théorie des invariants vont dans le même sens et c'est ce que nous allons voir maintenant.

2. Algèbre

La théorie des invariants algébriques remonte à la théorie des nombres, mais son histoire est intrinsèquement liée à la géométrie, puisque les invariants algébriques représentent les propriétés invariantes de figures géométriques. Paul Gordan a été le premier à définir un système complet des formes binaires

$$ax^n + 2bxy + cy^n$$

(binaires, parce qu'en deux variables) de degré arbitraire n; ce système est fini et computable. Hilbert établit le théorème d'existence plus général de la finitude des formes dans un système de formes arbitraires(15) avec

$$F = A_1F_1 + A_2F_2 + ... + A_mF_m$$

pour des formes définies $F_1, F_2, ..., F_m$ du système et des formes arbitraires des variables appartenant à un corps donné. Le théorème de la base (du système de formes) est le coeur de la théorie des invariants algébriques et il n'est pas difficile de montrer sa parenté avec la théorie du corps de classes; encore ici, c'est Kronecker qui ouvre la voie. Dans son article "Ueber die vollen Invarientensysteme"(16), Hilbert reconnaît que la théorie des invariants n'est qu'un exemple (remarquable, à vrai dire) de la théorie du corps de fonctions algébriques à plusieurs variables: Kronecker définit une fonction algébrique comme racine d'une équation irréductible $f(x) = 0$ (de degré n) où $f(x)$ est un polynôme irréductible (ou premier) dans un domaine de rationalité "Rationalitats-Bereich" (i.e. corps). Là-dessus, Kronecker avait démontré que dans tout corps de fonctions, il y a toujours un nombre fini de fonctions entières tel que toute autre fonction entière du corps peut être représentée par une fonction linéaire de ce nombre(17). Le théorème de la base, qui établit que toute forme peut s'écrire de la façon qu'on a vue plus haut, n'est pas effectif, dans le sens où il ne permet pas de calculer une borne supérieure pour le nombre des invariants du système(18). Or Hilbert donne une preuve effective pour le cas particulier d'une forme fondamentale ternaire d'ordre n. Dans le cas général du corps des invariants de la forme fondamentale qui constitue le système total des invariants, il suffit de calculer les discriminants D(19) de l'équation de degré k pour les invariants $J, J_1, ..., J_x$; les invariants de la forme fondamentale, i.e. les fonctions algébriques entières du corps des invariants sont alors représentables par

$$i = A_1J_1 + ... + A_mJ_m$$

où les $A_1, ... , A_m$ sont des fonctions rationnelles entières de $J_1, ..., J_x$. Le système complet des invariants se laisse ainsi dériver arithmétiquement selon la théorie du corps des fonctions algébriques entières de Kronecker, une fois définis les invariants(20).

Le célèbre *Nullstellensatz* de Hilbert est formulé dans ce contexte comme cas spécial d'une courbe algébrique qui détermine un ensemble fini de surfaces

$$F_1 = 0, F_2 = 0, ..., F_m = 0$$

engendrant l'équation homogène

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + ... + A_m F_m = 0$$

qui est une combinaison linéaire de formes dans un module ou système modulaire (i.e. idéal).

C'est la pratique mathématique de Kronecker qui a marqué Hilbert et le texte qui a déterminé le cours des travaux hilbertiens en théorie des nombres et en théorie des invariants est sans nul doute le texte sur les "Fondements d'une théorie arithmétique des grandeurs algébriques" dédié à Kummer(21). Kronecker y introduit ses indéterminées, "Unbestimmte", variables ou coefficients indéterminés qu'on adjoint ou associe à un domaine de rationalité (Rätionalitats-Bereich), terme qu'il préfère à celui de corps "Körper" qu'il trouve trop matériellement chargé. Ces indéterminées, dont il fait remonter l'idée à Gauss, ne sont pas définies autrement que par leur espèce ou leur genre — on pourrait les appeler ensembles ou extensions génériques si le terme n'avait pas d'autres sens en géométrie algébrique et plus récemment en logique mathématique (ou en théorie des ensembles). Ces indéterminées sont aussi soumises à des conditions ou contraintes (forcing ?) et sont sujettes à des procédures d'élimination(22).

Le domaine de rationalité (des fonctions rationnelles) peut être enrichi de toutes les fonctions algébriques d'ordre arbitraire et le domaine devient alors le domaine de l'espèce G: il importe de noter que les éléments d'un domaine de rationalité ne sont constitués que de grandeurs variables ou indéterminées et des fonctions algébriques. C'est la théorie de la divisibilité de ces domaines de rationalité qui est le moteur ici et le "genre" principal des grandeurs algébriques entières (représentable par une fonction linéaire d'un nombre fini d'éléments) permet d'obtenir directement leur divisibilité. Les formes algébriques entières comprennent les formes rationnelles entières et sont définies à partir des coefficients entiers (essentiels) et des indéterminées (coefficients inessentiels). Le résultat principal est la représentation unique d'une forme algébrique entière par un produit de formes premières ("Primformen")(23).

Le but de Kronecker est de formuler une théorie arithmétique des grandeurs algébriques en adjoignant des indéterminées à la théorie des domaines de rationalité, mais ces adjonctions ou extensions sont contrôlées et peuvent être réduites librement en vertu même de leur indétermination. On fait ainsi l'économie d'entités réelles (nombres réels, transcendants ou transfinis) et on obtient une théorie arithmétique pure. Nous allons voir que Hilbert s'est inspiré directement de l'entreprise de Kronecker pour définir son programme métamathématique.

3. Logique

Quand Hilbert, dans sa conférence "Ueber das Unendliche"(24), "Sur l'infini", explique que du point de vue finitaire ("finiter Standpunkt") il y a deux sortes de formules en mathématiques, les premières qui correspondent aux énoncés finitaires et les secondes aux structures idéales — qui ne signifient rien —, il ne fait que transposer Kronecker et son langage d'une arithmétique pure et de ses extensions indéterminées (qui recouvrent les idéaux ou éléments idéaux) dans le contexte de la métamathématique ou théorie des preuves qu'il veut ériger. Mais si les opérations extra-arithmétiques de la logique ne signifient rien, pas plus que les grandeurs algébriques hors d'un domaine de rationalité, et si seule l'arithmétique est interne alors que l'algèbre est formelle, le système formel des opérations logiques n'aura que le rôle d'une extension dénuée de sens de l'arithmétique, à condition que cette extension soit consistante, c'est-à-dire qu'une fois éliminées les structures idéales (ou les indéterminées), on conserve toujours la validité des lois logiques (du domaine primitif de l'arithmétique) ou l'arithmétique pure du domaine de rationalité. On voit le parallèle évident entre la démarche de Kronecker et celle de Hilbert. La parenté est si grande qu'on peut supposer que Hilbert s'inspire toujours, consciemment ou non, de l'idéal arithméticien de Kronecker.

Les objets concrets qui vont remplacer les entiers dans la mathématique hilbertienne sont les signes et la combinatoire finie qu'ils génèrent est le pendant formel de l'arithmétique. Au commencement est le signe , c'est le motto philosophique de Hilbert en 1922[25]. Sur cette base finitaire, on peut formaliser les théories mathématiques existantes en construisant ensemble logique et arithmétique. Cette logique arithmétique, comme nous pouvons l'appeler, recèle une logique interne — une métamathématique — qui, par-delà les preuves formelles des mathématiques ordinaires, doit mener à une preuve de non-contradiction des mathématiques, puisque l'objet de la métamathématique est l'ensemble des preuves de la mathématique usuelle. Cette logique interne doit produire de nouveaux axiomes, alors que la logique formelle ne fait que dériver de nouveaux théorèmes des axiomes connus. La logique finitaire suffit à garantir la vérité intuitive de l'arithmétique élémentaire. On connaît la définition hilbertienne de système formel avec connecteurs et quantificateurs. Les quantificateurs universel et existentiel sont définis à l'aide d'une fonction de choix transfinie $\varepsilon(A)$ qui associe à tout prédicat un objet ou à toute fonction un nombre

$$A(a) \rightarrow A(\varepsilon_x A(x)).$$

Le quantificateur universel est défini

$$\forall x\, Ax \equiv A\,(\varepsilon_x \neg A(x))$$

et le quantificateur existentiel

$$\exists x\, Ax \equiv A\,(\varepsilon_x A(x)).$$

Deux principes s'ensuivent

$$\forall x\, Ax \rightarrow A(a) \qquad \text{(axiome aristotélicien)}^{(26)}$$

et

$$\neg\forall x\, Ax \rightarrow \exists x\, \neg Ax \qquad \text{(tiers exclu).}$$

On sait que l'espoir que fondait Hilbert de démontrer la consistance de l'arithmétique et au-delà, de l'analyse, ne s'est pas réalisé, sans doute parce qu'il s'éloignait trop du point de vue finitaire et qu'il voulait même justifier la théorie des ensembles transfinis de Cantor.

Le programme de Hilbert n'a pas échoué en vertu des résultats de Gödel sur l'incomplétude des systèmes formels contenant au moins l'arithmétique, il a échoué en tout cas parce qu'il a voulu aller plus loin que l'arithmétique au sens de Kronecker, arithmétique qu'on peut appeler finitaire ou prédicative et qui trouve des échos contemporains dans les travaux de E. Nelson(27). L'arithmétique prédicative exige les mêmes bornes supérieures (ou logarithmiques) que Hilbert dans sa théorie des systèmes d'invariants complets qui est fondée, comme on l'a vu, sur la théorie du corps (ou du domaine de rationalité) des fonctions algébriques de Kronecker.

Le point de vue génétique de Kronecker lui a permis d'échapper à la tentation formaliste infinitaire de Hilbert qui a cru finalement à la réalité des indéterminées formelles, pourrait-on dire, parce qu'il n'a pas réussi à les réduire ou à les éliminer. Par ailleurs, le point de vue prédicatif (formaliste ou nominaliste) de Nelson est plus près de Kronecker que de Hilbert, quoi qu'en pense Nelson. En effet, l'arithmétique prédicative s'adjoint des entiers non standards (infinitésimaux) $\nu = \infty$ à la manière des indéterminées de Kronecker et il y a passage de l'interne à l'externe dans une théorie interne des ensembles(28), mais la théorie malheureusement n'est pas prédicative cette fois. Seule une logique prédicative de l'arithmétique prédicative semble répondre adéquatement à l'intuitionnisme de Kronecker.

Le formalisme de Hilbert ne serait donc que l'extension infinitaire (indéterministe, si l'on suit Kronecker) du point de vue fini (finiter Standpunkt) qui serait tributaire de l'intuitionnisme ou mieux du constructivisme arithmétique de Kronecker. La vérité intuitive ou interne de l'arithmétique lui confère le statut d'une véritable logique arithmétique qui est au fondement de tout l'édifice mathématique.

4. Conclusion. La logique interne

En dépit de ses nombreuses attaques contre l'attitude de Kronecker qu'il qualifie à plusieurs reprises de "dictateur de l'interdit" ("Verbotsdiktator"), Hilbert a fini par reconnaître en 1930 que

> Kronecker a formulé clairement une conception qu'il a explicitée dans de nombreux exemples: cette conception correspond pour l'essentiel à notre point de vue fini(29).

Le finitisme de Hilbert est donc très proche par la filiation de Kronecker de l'intuitionnisme brouwerien et du semi-intuitionnisme d'un Poincaré, par exemple. Ce finitisme n'est pas touché par les résultats d'incomplétude infinitaire, c'est uniquement son extension formaliste infinitaire avec son idéal de consistance absolue qui est affectée. Il n'est pas étonnant à ce compte que ce soit l'induction infinie, le postulat d'induction dans l'aritmétique de Peano, qui constitue l'obstacle majeur. La preuve de Gentzen de la consistance de l'arithmétique fait appel à une induction transfinie jusqu'à ε_0 qui est la limite de la hiérarchie des ω

$$\lim \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}} = \varepsilon_0.$$

Le postulat d'induction de Peano n'est pas prédicatif, l'induction transfinie ne saurait l'être. La logique interne de l'arithmétique(30) requiert une induction bornée, une suite "effinie", i.e. potentiellement infinie, de nombres naturels, rien de plus. Kronecker, Poincaré, Brouwer ont reconnu le caractère ouvert du procès de l'induction. Les propriétés métamathématiques de consistance, complétude, décidabilité, etc., perdent leur signification concrète, génétique dans une théorie des démontrations ("Beweistheorie") qui emprunte son arsenal infinitaire à la théorie des ensembles se confondant par là à une théorie des modèles qui est essentiellement une sémantique ensembliste des théories mathématiques.

L'idéal de la consistance est pourtant simple: accéder pour l'analyse (et la théorie des ensembles) à la même certitude ("Sicherheit") que possède l'arithmétique finie qui est le fondement intuitif dernier(31); c'est pourtant cette même certitude qui devrait guider la métamathématique et sa logique interne ("inhaltiches logisches Schliessen", selon l'expression de Hilbert). Que cet idéal se soit dévoyé dans un programme formaliste voué à l'échec n'a rien de surprenant, puisque Hilbert n'a pas su s'en tenir au cadre finitaire de l'arithmétique et de ses extensions indéterminées à la manière de Kronecker. Entretemps, c'est Hilbert (ou son programme) qui a engendré par coups et contrecoups, de Herbrand à Gödel et de Tarski à Robinson, la logique contemporaine. L'avenir proche de la logique, avec la théorie de la computation, les langages informatiques et la logique arithmétique (ou prédicative), verra peut-être un retour à l'inspirateur de Hilbert, Kronecker et à son idéal arithméticien.

NOTES

1. Cf. D. Hilbert [4].
2. Pour Weyl, voir [1].
3. Cf. D. Hilbert ([5],III), p. 174. Pour le programme de Hilbert, voir le texte de G. Kreisel [8] qui ne le rattache pas cependant à quelque paternité kroneckerienne.
4. Voir [4], p. 170.
5. Cf. D. Hilbert ([5],I), p. 64 et ([5],III), p. 161. Hilbert continue en disant que Kronecker a rejeté tout ce qui transcendait les entiers.
6. Cf. L. Kronecker ([9],III), "Ueber den Zahlbegriff", pp. 249-274.
7. Cf. D. Hilbert ([5],I), p. 67. Helmut Hasse renchérit ici en disant que Hilbert a donné des preuves nouvelles dégagées des calculs détaillés et opaques de Kummer, *idem*, p. 529.
8. Souligné par Hilbert ([5],I), p. 66.
9. Idem, p. 66.
10. Cf. L. Kronecker "Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen", ([9],II), pp. 237-387.
11. Cf. "Ueber die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper", ([5],II), pp. 483-509.
12. Voir K. Ireland and M. Rosen [7], chap. 12.
13. Voir [2]. Remarquons que André Weil n'a pas manqué de reconnaître la place importante qu'occupe Kronecker dans l'histoire de la théorie des nombres et de la géométrie algébrique, comme il a insisté sur le rôle primordial de Fermat.
14. Cf. D. Hilbert ([5],I), p. 64. Hilbert aurait pu dire aussi bien algébrisation, puisque ses travaux en fondements de la géométrie cherchent à faire l'économie des présupposés spatiaux de la continuité (au profit de la notion de congruence).
15. Cf. D. Hilbert ([5], II), pp. 199-257.
16. Cf. D. Hilbert ([5], II), pp. 287-365.
17. Cf. D. Hilbert, idem, p. 293.
18. Cf. D. Hilbert, idem, p. 319. C'est à propos de ce théorème que Gordan s'est exclamé qu'il s'agissait là de théologie et non de mathématiques. On doit la version effective du théorème à E. Noether.
19. Le discriminant est le produit des carrés des différences des racines prises deux à deux. Pour une équation quadratique, par exemple, $ax^2 + bx + c = 0$, le discriminant est $b^2 - 4ac$.
20. L'esprit arithmétique se retrouve parfois dans les travaux d'analyse de Hilbert, e.g. la théorie d'un ensemble infini de variables indépendantes ([5],III, pp. 56-72) qui est aussi importante en théorie des équations intégrales, dont Hilbert a été un pionnier. Là c'est l'unité des méthodes de l'algèbre et de l'analyse qui prévaut et la finitude n'a de place ici que dans l'expression linéaire
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ...$$
qui n'est une fonction linéaire des variables en nombre infini $x_1, x_2, \ldots$ que lorsque la somme des carrés des coefficients $a_1, a_2, \ldots$, est fini.
21. Cf. L. Kronecker ([9],II).
22. Ce langage que Kronecker dit emprunter à Dirichlet rappelle aussi le style d'une autre orientation mathématique, celle de Grassmann dans son "Ausdehnungslehre" ou théorie de l'extension.

23. Cf. L. Kronecker ([9], p. 352). Le théorème fondamental de l'arithmétique sur la représentation canonique de tout entier par un produit de facteurs premiers se trouve déjà (presque) dans Euclide, mais il ne sera démontré que par Gauss. La formule de produit d'Euler pour n entiers et p nombres premiers qui donne

$$\sum_n n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^1$$

et

$$f(s) = \sum_p \frac{1}{p_1^{n_1 s}, p_2^{n_2 s}, \ldots, p_k^{n_k s}}$$

peut être considéré comme l'équivalent analytique du théorème fondamental de l'arithmétique. La fonction ζ, i.e.

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z$$

qui est un cas particulier des séries de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}$ est l'extension pour les nombres complexes de la fonction d'Euler et a pour conséquence l'infinité des nombres premiers par la divergence de $\sum_n n^{-s}$ pour les valeurs intégrales s. Kummer appliquera la même formule pour trouver l'équivalent du théorème fondamental de l'arithmétique dans sa théorie des nombres idéaux complexes ou entiers cyclotomiques (qui divisent le cercle). Ces nombres idéaux donneront naissance à la théorie des idéaux de Dedekind où la représentation canonique est définie dans le corps des nombres algébriques: tout idéal dans l'anneau (de Dedekind) des entiers algébriques peut être écrit comme produit d'idéaux premiers, comme on l'a vu plus haut.

24. Cf. D. Hilbert [4].

25. Cf. D. Hilbert ([5],III), p. 163. Le signe de nombre "Zahlzeichen" deviendra plus tard chiffre "Ziffer".

26. Nous suivons ici l'exposé de P. Bernays ([5],III), pp. 190-216.

27. Cf. E. Nelson [10].

28. Cf. E. Nelson [11].

29. Voir D. Hilbert [6].
" ... hat Kronecker eine Auffassung klar ausgesprochen und durch zahlreiche Beispiele erläutert, die heute im wesentlichen mit unserer finiten Einstellung zusammenfällt" ... cité par P. Bernays dans ([5],III), p. 203. Mais Hilbert ajoute ([6], p. 487) que l'erreur de Kronecker a été de bannir les méthodes de preuves infinitaires (transfinite) — l'expression "transfini" doit être prise ici dans un sens littéral d'"au-delà du fini" et non dans le sens de la théorie des ensembles transfinis de Cantor, bien qu'elle y conduise naturellement aux yeux de Hilbert.

30. Je me permets de renvoyer ici à mon ouvrage [3].

31. En géométrie, la consistance consiste simplement à trouver un modèle arithmétique, l'arithmétique étant en soi consistante. C'est la leçon des preuves d'indépendance chez Hilbert.

SOURCES

1. Y. Gauthier "Constructivity and the Internal Logic of Mathematics" — *Exact Sciences and their Philosophical Foundations* Vorträge des Internationalen Hermann Weyl — Kongresses, Kiel, 1985, hrsg. v. W. Deppert et alii, Verlag Peter Lang, (Frankfurt am Main: 1988), pp. 311-323.

2. Y. Gauthier "Finite Arithmetic with infinite Descent" *Dialectica*, vo. 43, Fasc. 4, 1989, pp. 329-337.

3. Y. Gauthier *La logique interne*, Paris, collection Mathesis, Vrin, 1991.

4. D. Hilbert "Ueber das Unendliche" *Math. Ann.*, B. 95 (1926), pp. 161-190.

5. D. Hilbert *Gesammelte Abhandlungen*, 3 Bände, Chelsea, New-York, 1932, 1933, 1935.

6. D. Hilbert "Die Grundlagen der elementaren Zahlenlehre"*Math. Ann.*, Bd. 104, Heft 4, pp. 485-494.

7. K. Ireland and M. Rosen *A Classical Introduction to Modern Number Theory* Springer-Verlag (New York, Heidelberg, Berlin, 1982).

8. G. Kreisel "Hilbert's Programme" *Dialectica* 12 (1958), pp. 346-372. Révisé avec un "Postcript" dans *Philosophy of Mathematics*, ed. by P. Benacerraf and H. Putnam, 2nd ed. Englewood Cliffs, N. J., (Prentice-Hall:1983).

9. L. Kronecker *Werke*, hrsg. K. Hensel, 5 Bände, Chelsea, (New-York, 1968).

10. E. Nelson *Predicative Arithmetic*, Mathematical Notes 32, Princeton University Press, (Princeton, N.J., 1986).

11. E. Nelson "Internal Set Theory: a new approach to nonstandard analysis" *Bull. Amer. Math. Soc* 83 (1977), pp. 1165-1198.