Séminaire de philosophie et mathématiques

GÉROLD STAHL

Existence et non-existence en logique mathématique

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1989, fascicule 3
« Existence et non-existence en logique mathématique », , p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1989___3_A1_0>

Gérold STAHL

CNRS (EHESS) Paris

EXISTENCE ET NON-EXISTENCE EN LOGIQUE MATHEMATIQUE

Pour la logique traditionnelle et dans une période initiale de la logique mathématique, l'existence a constitué un problème sérieux. Ce problème a été résolu, en grande partie, par la théorie des descriptions de Russell. Cependant, cette théorie laissait, quand même, certaines questions ouvertes et n'était pas suffisante en tout point. Dans les pages suivantes on ne s'éloignera pas trop de Russell en ce qui concerne le traitement formel, mais on ne le suivra pas dans ses appréciations extra-logiques, qui nous font perdre l'universalité qu'on devrait attendre d'une science formelle.

Cet article correspond pratiquement à une fusion et actualisation de STAHL 1960 (1977 chap.IV), 1985 et 1988 (voir bibliographie).

1.- Introduction

On peut s'approcher immédiatement de la problématique existentielle en reprenant la phrase de Russell "Le roi qui gouverne actuellement la France est chauve". Cette affirmation est fausse, non parce que le roi de France a des cheveux, mais parce qu'il n'y a pas de roi qui gouverne actuellement la France. Pour qu'une phrase de ce type soit vraie, il est nécessaire que le sujet existe, et qu'en outre le prédicat lui corresponde.

La logique, quoique formelle, doit donc s'occuper de l'existence. Toutefois, elle devrait se borner à parler de l'"existence formelle" ou de l'"existence relative à un système formel". Que quelque chose, qui existe formellement, existe de plus en réalité, cela dépend non de la logique formelle, mais de l'épistémologie : en d'autres termes, tout dépend de ce qu'on entend par "réel", si l'on concède une correspondance réelle au système, et jusqu'à quel point.

Avec cette limitation nous pouvons traiter rigoureusement l'existence formelle dans la logique mathématique, plus précisément dans le système fonctionnel supérieur, dans le système fonctionnel élémentaire avec identité et dans des sytèmes appliqués du même type. Dans ces systèmes on fait la distinction entre : individus, classes d'individus, relations entre individus et éventuellement classes de classes d'individus, etc. "Il existe quelques..." ou "Il existe le..." peuvent être définis formellement dans ces systèmes à partir des termes "ne...pas", "ou" et "tous" non seulement par rapport aux individus mais (dans le système supérieur) aussi par rapport aux classes et relations; cependant presque tout cet article (à l'exception du quatrième et cinquième problèmes) traitera l'existence seulement par rapport aux individus, ce qui est suffisant pour voir l'essentiel. A partir des définitions mentionnées on peut démontrer que *l'existence formelle* n'est pas autre chose que *l'appartenance à l'univers du discours*, où ce qu'on appelle "univers du discours" est la collection des individus, c'est-à-dire, des valeurs qui satisfont ou ne satisfont pas une fonction (de premier ordre) quelconque du système correspondant.

Mais cet univers n'est pas quelque chose d'absolu et donné de prime abord. Au contraire, si nous appliquons la logique mathématique à un champ quelconque de la science, ou aux problèmes de la vie quotidienne, nous fixons (explicitement ou non) un univers du discours. Cette fixation, bien qu'arbitraire, est soumise à deux conditions. La première, qui résulte d'un axiome des systèmes mentionnés, exige que l'univers du discours ait au moins un élément [1], la deuxième, due à la théorie des types, exige qu'il n'y ait pas d'éléments d'ordre différent (comme individus et classes d'individus). Une fois satisfaites ces deux conditions, la liberté est complète.

Nous pourrions considérer, par exemple, un système appliqué dont l'univers du discours consiste en tous les joueurs de football. La

---

[1] Sur la base d'une autre axiomatisation on peut travailler aussi avec les univers du discours sans éléments.

valeur pratique de ce système serait très petite puisqu'on ne pourrait traiter aucun problème qui ne se réfère pas *directement* à des joueurs de football. Dans ce cas ce sont uniquement les joueurs de football qui existent.

Mais il n'y a rien d'exceptionnel à travailler avec un univers du discours très restreint. C'est fréquemment le cas en mathématique où on le restreint, par exemple, aux nombres naturels, ou aux points du plan, etc. Donc seulement les nombres naturels ou les points du plan existent. On peut même changer d'univers d'un problème à l'autre.

D'après tout cela, le terme "existe formellement" acquiert un caractère très relatif. Ce qui existe pour un système (ou pour une application d'un système) n'existe pas nécessairement pour un autre. Ordinairement on forme l'univers du discours de la technique de façon que la machine en mouvement perpétuel ne lui appartienne pas; elle n'existe pas dans ce cas. Cependant on pourrait écrire un traité sur un système technique fantastique, qui comprendrait la machine en mouvement perpétuel dans son univers du discours; pour ce système, une telle machine existe. De même dans une recherche sur les animaux mythologiques, le licorne existe, contrairement à ce que reconnaissent les investigations biologiques.

Cette relativisation de l'existence surprend seulement si l'on donne au mot "exister" de la langue quotidienne un caractère absolu. Or il y a des expressions qui utilisent "exister" dans un sens relatif, comme "Cet individu n'existe pas pour moi", expression dans laquelle on forme un univers du discours qui exclut une certaine personne. En général, cependant, on utilise le terme "exister", en lui accordant un sens absolu et universel. Toutefois si l'on veut le préciser, des problèmes se présentent et l'on distingue entre "exister en réalité", "exister dans la conscience de l'homme", etc. Chacun de ces termes pour sa part est la source d enouvelles discussions (Le champ électro-magnétique existe-t-il réellement ? Et l'énergie potentielle ?) qui sont caractérisés fréquemment par leur obscurité et leur confusion.

Le terme "exister" avec toutes ces additions est en général plus étroit que "appartenir à l'univers du discours", si nous employons l'univers de la langue quotidienne ou de la logique traditionnelle. Nous nous demandons si l'on peut délimiter au moins ce dernier univers de manière à ce qu'il ait un caractère absolu et universel.

On ne parle pas d'"univers du discours" dans la logique traditionnelle [2], mais il est possible de trouver des indications dans ses exemples, qui permettent de donner une réponse négative à la question que nous nous posons. L'univers du discours de ces exemples comprend *ce qui existe réellement* ou *ce qui a existé réellement* (selon une position demi-scientifique et nullement invariable), et, en outre, l'esprit, la justice, la résignation, etc., mais non Pégase ou les Centaures. Qui en décide et quel est le critère ? *Ce qui existera réellement* avec une certaine probabilité appartient-il à l'univers ? En ce cas les jumeaux siamois qui pourraient naître le 1er janvier de l'an 2000 seraient inclus. Mais dans le cas contraire, l'éclipse prochaine du soleil ne serait pas comprise. Où est la limite ?

Malgré tout cela, plusieurs logiciens modernes acceptèrent cet univers supposé de la logique traditionnelle ou essayèrent de "découvrir" le "vrai". Ainsi, pour Russell l'univers du discours consistait à peu près en ce qui existe ou a existé réellement. Dans cet univers qui est beaucoup plus restreint que celui de la langue quotidienne et de la logique traditionnelle, il y a des problèmes spéciaux, si l'on a des références à des individus qui appartiennent à l'univers de la langue quotidienne, mais non à l'univers de Russell. Pour justifier cette différence qui n'est pas conventionnelle pour lui, il doit introduire des artifices spéciaux qui imposent une limitation sérieuse à l'universalité de la logique formelle.

De point de vue formel, aucun univers du discours n'est donné de prime abord; et tout univers qui satisfait aux conditions indiquées peut être utilisé. La croyance - si l'on veut - épistémologique, qu'il

---

[2] En cherchant des déterminations formelles pour "exister" on croyait les trouver par exemple en des formulations telles que "avoir une essence propre".

y ait un univers rigoureusement délimité qui serait le vrai et devrait être "l'"univers par excellence du discours de la logique, ne peut, comme on l'a montré, se justifier.

La relativisation indiquée n'est pas quelque chose de négatif. Au contraire ! Elle permet de choisir des univers rigoureusement délimités pour chaque science, en particulier quand cette science est déjà complètement formalisée.

Après ces indications sur la relativisation de l'existence, deux théorèmes seront présentés qui montrent les traits caractéristiques de l'existence formelle. Dans ces théorèmes, des symboles spéciaux seront utilisés, qui s'appellent "descriptions" et qui sont de la forme "$\iota x(Fx)$". Ils se lisent comme "le x qui satisfait F", par exemple "le x qui est roi de France" ("le x qui satisfait la fonction *être roi de France*"). Les descriptions ne dénotent rien directement et peuvent s'utiliser pour cette raison non seulement dans les phrases où l'on parle de quelque chose d'existant, mais aussi dans les phrases où l'on parle de quelque chose de non existant ou de quelque chose dont l'existence n'est pas assurée, comme le roi de France et le carré rond. Les phrases dans lesquelles apparaissent les descriptions sont de cinq types : "$E!\iota x(Fx)$" ("Le x qui satisfait F existe formellement"), "$\sim E!\iota x(Fx)$" ("Le x qui satisfait F n'existe pas formellement"), "$G\iota x(Fx)$" ("Le x qui satisfait F satisfait G"), "$\sim[G\iota x(Fx)]$" ("Ce n'est pas le cas que le x qui satisfait F satisfait G") et "$\sim G\iota x(Fx)$" ("Le x qui satisfait F ne satisfait pas G"). Dans ces phrases, là où se présentent les descriptions, il n'y a pas de référence à des individus mais seulement à des fonctions (comme F et G) et à des opérateurs comme (Ex) et (y); ces derniers apparaissent quand on donne les définitions explicites des phrases mentionnées, comme :

$$E!\iota x(Fx) =_{df} (Ex)(Fx \wedge (y)(Fy \supset x = y))$$
$$G\iota x(Fx) =_{df} (Ex)(Fx \wedge (y)(Fy \supset x = y) \wedge Gx)$$

Le premier théorème est :

$$G\iota x(Fx) \supset E!\iota x(Fx)$$

Si $\iota x(Fx)$ satisfait une fonction, alors il existe formellement. Exemple:

Si le roi de France est chauve (satisfait la fonction *être chauve*) alors le roi de France existe formellement.

Pour éviter des pseudo-paradoxes, on doit prendre une précaution : l'expression "ne pas exister formellement" ne représente pas une fonction; il s'agit d'un prédicat grammatical mais non d'un prédicat logique[3]. En logique mathématique, cette expression a une symbolisation différente (avec "E!") de celle des fonctions. Sans cette précaution, nous aurions par exemple :

Le roi de France n'existe pas formellement.

Donc d'après ce théorème :

Le roi de France existe formellement.

Le deuxième théorème est :

$$\sim[G\iota x(Fx)] \equiv \langle \sim E!\iota x(Fx) \vee \sim G\iota x(Fx)\rangle$$

Si et seulement si ce n'est pas le cas que $\iota x(Fx)$ satisfait G (c'est-à-dire, si et seulement si l'on nie la phrase singulière entièrement), alors $\iota x(Fx)$ n'existe pas formellement ou ne satisfait pas la fonction G. Exemple : Si ce n'est pas le cas, que le roi de France soit chauve, alors le roi de France n'existe pas formellement ou le roi de France n'est pas chauve. Nous avons toujours dans la logique bivalente l'alternative entre "Le roi de France est chauve" et "Ce n'est pas le cas que le roi de France soit chauve"; mais non l'alternative entre "Le roi de France est chauve" et "Le roi de France n'est pas chauve". Dans ce dernier cas, les deux phrases peuvent être fausses pour la simple raison que le roi de France n'existe pas.

Ces théorèmes nous indiquent comment traiter des objets qui, une fois choisi l'univers du discours, lui appartiennent ou ne lui appartiennent pas. Il y a en outre de nombreux théorèmes dans lesquels l'existence formelle joue un rôle (par exemple relatif à la subalternation traditionnelle), qui ne seront pas mentionnés ici.

---

[3] Déjà Kant soutint qu'"être" n'est pas un "prédicat réel".

Un problème particulièrement intéressant se présente avec des phrases comme "Charles existe", "Il y a des démocraties", etc. Comment les traitons-nous en général du point de vue formel ? Nous pouvons les traiter comme "Charles existe formellement", "Quelques démocraties existent formellement"; mais ce n'est pas l'unique possibilité, et, souvent, il n'est pas très opportun de procéder ainsi.

Il peut être plus avantageux d'interpréter les phrases comme "Charles existe effectivement" et "Quelques démocraties existent en réalité", dans lesquelles nous traitons "exister effectivement", "exister en réalité", "exister dans la conscience de l'homme", "exister subjectivement pour moi", etc., comme des expressions de fonctions quelconques du même type que "être philosophe" ou "manger". Si nous procédons ainsi, les différentes formes de *exister non formellement* n'ont aucune symbolisation propre et ne se distinguent en rien d'autres prédicats logiques, tandis que pour *ne pas exister formellement* nous devons utiliser une symbolisation spéciale, que nous ne pouvons pas traiter comme un prédicat logique.

Ce procédé n'entraîne aucune contradiction. Si nous disons "Le roi de France n'existe pas *effectivement*", en traitant "ne pas exister effectivement" comme représentation d'une fonction, ceci implique seulement, d'après notre premier théorème, "Le roi de France existe *formellement*". Les deux phrases sont parfaitement compatibles.

2.- Quelques exemples historiques

Des exemples tirés de l'histoire de la philosophie peuvent servir à illustrer ce qui a été indiqué. Notre intention sera, cependant, de nous maintenir avant tout dans le cadre de la logique formelle.

Nous commençons avec l'investigation du *"Cogito ergo sum"* de Descartes, en le considérant comme un raisonnement. Il y a principalement deux possibilités de traitement formel qui se présentent :

1°- Je pense (je satisfais la fonction *penser*), donc j'existe formellement. Ce raisonnement est exact d'après le premier théorème (symboliquement avec "P" pour "penser" et "M" pour "être moi" :

"$P\iota x(Mx) \supset E!\iota x(Mx)$"). On peut accepter la prémisse; mais la conclusion ne dit rien sur l'existence réelle, puisque l'univers du discours de la philosophie est plus étendu que celui de ce qui existe réellement.

2°- Pour obtenir la conclusion : "J'existe réellement" nous pouvons utiliser un autre raisonnement, comme par exemple le syllogisme *Barbara* singulier : Tout ce qui pense existe réellement. Je pense. Donc j'existe réellement. Mais en ce cas le résultat n'est pas impressionnant, en comparaison avec les prémisses qu'on doit accepter.

Nous pourrions noter parmi d'autres un raisonnement semblable dans des formulations de la démonstration ontologique de l'existence de Dieu : Le *ens perfectissimum* satisfait la fonction *être tenu par nous dans son idée*, donc (d'après le premier théorème) il existe formellement. Nous n'avons pas besoin de recourir à la plus haute perfection, mais de nouveau nous ne pouvons rien dire sur l'existence réelle. Pour obtenir ce dernier résultat nous devrions accepter deux prémisses comme "Ce qui est la chose la plus parfaite dans l'idée, existe réellement", et "Dieu est la chose la plus parfaite dans l'idée".

Comme troisième exemple nous en indiquons un qui, en différentes formulations, a inquiété les logiciens dès John Stuart Mill. La phrase "Pégase est une invention des poètes" veut dire que Pégase n'existe pas, tandis qu'au contraire, en satisfaisant la fonction *être invention des poètes*, il existe formellement d'après le premier théorème.

On résout facilement cette contradiction si l'on considère que Pégase est compris dans l'univers du discours et qu'on distingue entre existence formelle et existence effective. Satisfaire la fonction *être une invention des poètes* implique non-existence effective (selon l'idée exprimée dans le prédicat) et existence formelle (d'après le première théorème). Pégase n'existe pas effectivement, tandis qu'il existe formellement. En utilisant "I" pour "être une invention des poètes", "P" pour "être Pégase" et "X" pour "exister effectivement" on aura d'un côté :

$$I\iota x(Px) \supset \sim X\iota x(Px)$$

et de l'autre :

$$I\iota x(Px) \supset E!\iota x(Px).$$

Notre quatrième problème est celui des universels[4] : Est-ce que les classes existent ? Quoique, d'après la théorie des types, une classe ne puisse pas appartenir au même univers du discours que ses éléments, elle peut appartenir cependant à un univers de deuxième ordre. Cet univers dépend de l'univers des individus. Selon l'univers des individus que nous choisissons, existeront *formellement* (existence formelle de deuxième ordre) beaucoup ou peu de classes, mais au moins deux : l'univers du discours de premier ordre et la classe vide (la classe qui ne contient pas d'éléments).

Classes de classes, relations, etc., admettent un traitement analogue.

Si nous identifions *exister formellement* avec *exister réellement* dans tous les ordres, alors au moins deux classes existent *réellement*. L'extension de l'identification à d'autres ordres n'est pas logiquement nécessaire. Au contraire, c'est seulement une position épistémologique possible et rien de plus.

Le cinquième et dernier problème est l'antique question de Platon pour l'existence du non-être ou néant. Nous avons vu que *ne pas être* (si nous l'identifions avec *ne pas exister formellement*) n'est pas une fonction, et pour cette raison nous ne pouvons pas former la classe de ce qui n'est pas. Cependant si la classe de ce qui est, est plus étroite que l'univers du discours utilisé, alors la classe de ce qui n'est pas, est une classe d'individus et existe formellement. On travaille aussi avec la classe vide qui ne contient pas d'éléments et on l'appelle quelquefois "néant". Le néant dans ce sens existe formellement, comme cela a été indiqué précédemment.

---

[4] Dans une forme simplifiée, c'est-à-dire sans inclure des considérations sur *les concepts* de classes, etc.

3.- Prédicats existentiels

Omne quod potest esse est
J. Buridan (*sophisme* V, 9).

Afin d'analyser certains problèmes liés aux prédicats existentiels, sans avoir recours à des systèmes créés *ad hoc*, nous prenons un univers du discours assez large qui contient non seulement les individus réellement existants ou une partie de ceux-ci (en supposant qu'on se soit mis d'accord sur une définition de "exister réellement"), mais aussi des produits de notre imagination et de notre pensée, des objets potentiels, etc. Par rapport à un univers de ce genre, on peut faire des déductions logiques qui concernent, d'une part, des prédicats comme "dormir", "être philosophique" etc., et, d'autre part, des prédicats existentiels comme "*XV*" ("exister" au sens de "être vivant"), "*XR*" ("exister réellement"), "*XI*" ("exister dans l'imagination des hommes"), "*XP*" ("pouvoir exister réellement")[5], etc. Tous ces prédicats représentent des fonctions propositionnelles, qui peuvent être satisfaites, ou ne pas être satisfaites, par des individus de l'univers choisi. Ce sont des prédicats tout à fait réguliers, qui ne posent aucun problème logique, à la différence de "exister formellement", qui correspond à l'appartenance à l'univers du duscours et exige un traitement formel spécial. Ainsi de :

Tous les centaures existent dans notre imagination.
Quelques Elyséens sont des centaures

on déduit :

Quelques Elyséens existent dans notre imagination

où "*XI*" est un prédicat qui ne se distingue en rien de, par exemple, "avoir des oreilles courtes".

A part les prédicats existentiels unaires comme "*XV*", "*XR*", etc., on verra aussi des prédicats binaires correspondants "*XV**", "*XR**", etc.

---

5 "*XP*" est traité ici simplement comme prédicat unaire, il représente une classe, qui a *XR* comme sous-classe. Pour un traitement modal, voir STAHL 1978 et 1983b.

Leur première place d'argument est occupée par des termes temporels, comme "a" ("actuellement"), "m_1" ("au moment m_1"), etc. Avec ces prédicats binaires, on peut dire, par exemple, que Pégase (g) existe actuellement dans notre imagination :

$XI^* ag$.

Un univers très large pourrait inclure des objets physiques pour ainsi dire "entiers" (comme Socrate, la chaise du bureau), mais aussi leurs parties *et leurs "tranches temporelles"* (comme le jeune Socrate, la chaise du bureau pendant qu'elle était peinte en jaune). On peut faire des affirmations temporalisées sur tous ces objets, même avant leur formation et après leur disparition (pour dire, par exemple, qu'ils n'existent plus réellement à un moment donné; voir aussi STAHL 1978 et 1979b).

Grâce aux prédicats existentiels simples (unaires) ou temporalisés (binaires), on peut formaliser et analyser avec précision, des problèmes qui ont un intérêt logique, sans s'aventurer dans des spéculations gratuites. Déjà dans la logique du Moyen Age on avait analysé la problématique existentielle à l'aide de ce qu'on pourrait considérer, dans un certain sens, comme des élargissements de l'univers du discours. C'était la théorie de l'amplification (*ampliatio*). Cependant cette théorie élargissait chichement, cas par cas, quelques prédicats ("prédicat" au sens logique) dans certains contextes. Le premier essai d'un élargissement généralisé (mais sans utiliser les univers du discours et les autres techniques de la logique moderne) est probablement dû à MEINONG 1913 (voir aussi HALLER 1986).

Il faut encore mentionner que, en logique, au moins dans les systèmes appliqués, on peut introduire des symboles de constantes individuelles comme "a", "b", etc. Ces symboles sont utilisés seulement pour des individus existants. Cela permet de les corrélationner aux descriptions avec "E!". Plus précisément : Pour chaque symbole de constnate individuelle on peut former des descriptions avec existence et, inversement, chaque description avec existence peut être abrégée (par définition)et cette abréviation peut être traitée comme un symbole de constante individuelle. Par exemple pour "a" on peut former une description comme "$\imath x(x = a)$"

et on a "$E!\iota x(x = a)$". Inversement, si l'on a "$E!\iota x(Fx)$", on peut définir :

$$b =_{df} \iota x(Fx)$$

et "b" serait alors un symbole de constante individuelle.

3.a.- Les chers disparus

Considérons une phrase comme :

Notre cher confrère a cessé d'exister.

Le prédicat "cesser d'exister" veut dire qu'il a existé (supposons à un moment m_1) et qu'il n'existe plus (au moment m_2). Comme le cher confrère ("c") appartient à l'univers du discours, même après sa disparition, on a sans problème :

$$XV^* m_1 c \wedge \sim XV^* m_2 c.$$

On parle des grands hommes qui n'existent plus. Pour dire qu'il y en a[6] (avec "G" pour "grands hommes"), on s'exprime symboliquement par :

$$(Ey)(Gy \wedge \sim XVy)$$

ou avec des prédicats temporalisés :

$$(Ey)(G^* m_1 y \wedge \sim XV^* m_2 y).$$

En général il y a deux utilisations de l'expression "homme", l'une rigoureusement limitée aux hommes vivants à un moment donné (par ex. dans certaines statistiques) et l'autre incluant des morts (les livres d'histoire). Si l'on fait la distinction entre H et H' (avec les morts), on a bien que tous les H existent mais pas tous les H' :

$$(y)(Hy \supset XVy)$$
$$(Ey)(H'y \supset \sim XVy)$$

[6] Ici on ne fera pas de distinction entre "il y a" et "il existe" ("formellement", "réellement", etc.).

tandis que pour feu les maris (F) on a automatiquement :

$$(y)(Fy \supset {\sim}XVy).$$

Pour les H qui vivent au moment m_1 et qui vont mourir (supposons qu'ils n'existent plus au moment m_2), on a :

$$(y)(H^*m_1y \supset {\sim}XV^*m_2y).$$

3.b.- Ce qui n'existe pas réellement

Il y a des maisons qui (une fois démolies) n'existent plus. Symboliquement cela donne (avec "S" pour "maisons") :

$$(Ey)(Sy \supset {\sim}XRy)$$

ou avec des prédicats temporalisés :

$$(Ey)(S^*m_1y \supset {\sim}XR^*m_2y).$$

En général on peut constater que tout ce qui a été démoli (D) n'existe plus (comme tel) :

$$(y)(Dy \supset {\sim}XRy).$$

On pourrait appeler "corruptibles" ("C") les objets qui, à partir d'un moment donné, n'existent pas. Une définition formelle serait :

$$Cy =_{df} (Em'')(m)(m'' < m \supset {\sim}XR^*my)^7.$$

Cependant, dans notre univers il y a pas mal d'individus qui n'existent jamais réellement et qui tomberaient sous cette définition. Afin de les exclure (au moins en partie), on peut restreindre la définition de "C" de deux façons : (a) on exige, en plus, que les objets corruptibles aient existé réellement avant m'' ou (b) qu'ils aient pu exister réellement (avec XP) avant m'' :

$$C'y =_{df} (Em')(Em'')(m' < m'' \wedge XR^*m'y \wedge (m)(m'' < m \supset {\sim}XR^*my))$$

$$C''y =_{df} (Em')(Em'')(m' < m'' \wedge XP^*m'y \wedge (m)(m'' < m \supset {\sim}XR^*my)).$$

---

[7] "(m)" et "(Em'')" sont des quantificateurs limités aux moments. On peut toujours écrire explicitement "$(m)(Mm \supset \ldots)$", etc.

On considère ici que C'' comprend C'. A moins qu'on ne veuille introduire des axiomes "théologiques" spéciaux, un individu corruptible n'est pas nécessairement engendré (*du point de vue de la logique*, il peut avoir existé à tous les moments jusqu'à m'') et inversement un individu incorruptible peut avoir été engendré.

Supposons que nous ayons une phrase qui affirme que tout ce qui a existé au moment m_1 (dans le passé) a actuellement la propriété L :

$$(y)(XR^*m_1y \supset L^*ay). \qquad \text{(i)}$$

Il est absolument contre-intuitif d'en vouloir déduire :

$$(y)(XR^*ay \supset L^*m_1y) \qquad \text{(ii)}$$

"Tout ce qui existe actuellement a eu, au moment m_1, la propriété L". Un contre-exemple est le suivant : Supposons qu'à un moment m_1, peu après le *big bang*, cher à certains physiciens, il existe (XR) en tout et pour tout seulement deux particules, qui seraient toutes deux chargées électriquement (L). Supposons, en plus, que ces deux particules aient survécu, sans s'être transformées en autre chose. Alors (i) serait vraie, tandis que (ii) est visiblement fausse.

Si on veut dire que toujours (passé, présent, futur) il y a au moins un électron ("T") existant réellement, une fois celui-ci et une fois celui-là, on a :

$$(m)(\text{E}y)(Ty \wedge XR^*my).$$

Cette formule n'est pas équivalente à :

$$(\text{E}y)(m)(Ty \wedge XR^*my)$$

"Il y a au moins un électron qui existe toujours réellement".

3.c.- Les individus possibles

Pour exprimer symboliquement une phrase comme :"Tout ce qui sera (au moment m_2) existe", il faut réfléchir un peu sur le mot "existe". Une interprétation raisonnable consiste à traiter "existe" comme "existe formellement", c'est-à-dire comme "appartient à l'univers du discours" (U). On a alors :

$$(y)(XR^*m_2y \supset Uy).$$

De la même façon on traduira en symbolisme "Tout ce qui existe possiblement, existe" :

$(y)(XPy \supset Uy)$.

Pour "Il y a des possibles qui ne se réalisent jamais", on a recours aux prédicats "XP" et "XR" , en quantifiant universellement sur les moments :

$(Ey)(XPy \wedge (m) \sim XR^{*}my)$.

On peut choisir un univers qui contient des individus dont on nie non seulement l'existence réelle mais même la possibilité d'exister réellement. Supposons que Pégase soit un de ces individus "impossibles". On aura alors :

$\sim XPg$

sans que cela pose le moindre problème du point de vue formel[8]. On en déduit :

$(Ey) \sim XPy$.

La relation de sous-classe propre entre XR, XP et U serait dans ce cas :

$XR \subset XP \subset U$.

La richesse des langues naturelles en ce qui concerne des expressions (simples ou complexes) de type "exister", correspond à une richesse d'idées assez précises. Quelques exemples de phrases avec des prédicats existentiels ont été traduits en langue formelle, afin de montrer que la logique peut traiter ce genre de problèmes sans aucune difficulté et sans introduire des systèmes spéciaux. La seule condition est qu'on ne croie pas qu'une attitude scientifique exige un appauvrissement des langues formelles et une limitation des univers du discours à ce qui "existe réellement".

4.- Descriptions contradictoires et descriptions individualisables

Faut-il de la largesse dans l'attribution de l'existence à des des-

---

[8] Il faut distinguer l'expression indiquée ("Pégase ne peut pas exister réellement") de "Pégase peut ne pas exister réellement" qui, dans un système modal, serait "*Possible* : $\sim XRg$" ou "$(-XR)_{pos}g$".

criptions (définies) ? Ou faut-il chichement identifier existence à existence réelle, en faisant peut-être quelques concessions occasionnelles ? Préfère-t-on un univers peuplé des monstres de Meinong ou un univers économique, comme Russell l'a proposé au moins pendant une certaine période ? Ici on opte pour la première alternative, c'est-à-dire, pour la plus grande ouverture : On exclut de l'attribution d'existence tout juste les descriptions qui conduisent à des contradictions *logiques*. Toutes les autres descriptions sont considérées comme "individualisables". Je suis convaincu que cette attitude correspond au caractère général de la logique formelle et la rend plus indépendante des diverses positions épistémologiques.

L'analyse suivante sera développée exclusivement par rapport aux systèmes logiques (pur ou appliqués) de premier ordre avec identité, sans référence à la "free logic" et autres systèmes spéciaux. Soit S le système fonctionnel pur de premier ordre avec identité formé de façon habituelle et soit Σ la classe des systèmes qui comprend S et tous les systèmes appliqués de premier ordre avec identité qu'on peut former à partir de S. Soit T un élément quelconque de Σ et L_T le langage (la classe des expressions bien formées) correspondant.

Supposons que "$A(x)$" soit une expression bien formée de L_T dans laquelle "x" se présente au moins une fois libre (afin de simplifier, on supposera quelquefois que "$A(x)$" ne contient pas d'autres variables libres). Pour la description au sens russellien on a les définitions habituelles :

$$E!\iota x(A(x)) =_{df} (Ex)(A(x) \wedge (y)(A(y) \supset y = x))$$

$$G\iota x(A(x)) =_{df} (Ex)(A(x) \wedge (y)(A(y) \supset y = x) \wedge Gx)$$

où "G" est un prédicat unaire quelconque. "$E!\iota x(A(x))$" veut dire que le x qui satisfait $A(x)$ existe, et "$G\iota x(A(x)$" veut dire que cet individu satisfait G . Du fait qu'une description peut être une expression très complexe et peut se présenter dans des expressions très complexes, on devrait utiliser "l'opérateur descriptif" et écrire dans la deuxième définition plutôt "$[\iota x(A(x))]\ G\,\iota x(A(x))$" à la place de "$G\iota\, x(A(x))$", afin d'éviter tout risque d'ambiguïté; selon le contexte je supprime l'opérateur descriptif quand il n'est pas indispensable.

Le terme "existe" qui correspond à "E!" et à "(Ex)" sera interprété ici comme "existe formellement", et cette existence formelle coïncide avec l'appartenance à l'univers du discours du modèle ou des modèles envisagés. Nous avons vu qu'on peut choisir ou construire des univers d'une façon tout à fait arbitraire. Ainsi un univers donné peut parfaitement contenir non seulement la maison dont on a planifié et non réalisé la construction, mais aussi Pégase et d'autres produits de notre imagination ou de nos activités théorisantes. Tandis que des prédicats comme "exister réellement", "exister dans l'imagination des hommes", etc. représentent des fonctions propositionnelles et peuvent être traités de la même façon que "dormir" ou "être philosophe", les expressions "exister formellement" et particulièrement "ne pas exister formellement" exigent un traitement formel spécial[9].

Quoique cette particularité de l'existence formelle ait créé des problèmes, la théorie des descriptions de Russell les a résolus, au moins du point de vue formel. Dans les pages qui viennent on suivra Russell dans le traitement formel, sans partager pour autant son interprétation du prédicat "exister".

---

[9] Dans certains cas on affirme que $\iota x(A(x))$ n'existe pas formellement. Si "ne pas exister formellement" était un prédicat logique, alors on arriverait à une contradiction, grâce au théorème :

$$G\iota x(A(x)) \supset E!\iota x(A(x))$$

avec "G" pour "ne pas exister formellement". On a bien le théorème suivant, avec le prédicat logique "U" pour "appartenir à l'univers du discours (respectif)" :

$$E!\iota x(A(x)) \equiv U\iota x(A(x)).$$

Mais si l'on nie les deux côtés (les deux phrases entières), on arrive seulement à :

$$\sim E!\iota x(A(x) \equiv \sim[\iota x(A(x))]\, U\iota x(A(x)).$$

D'autre part l'expression "$\sim U\iota x(A(x))$" avec "$\sim$" appliqué à "U", c'est-à-dire "$[\iota x(A(x))] \sim U\iota x(A(x))$" (l'individu existant $\iota x(A(x))$ satisfait $\sim U$), est la négation du théorème "$(x)Ux$" et ne correspond pas à "$\sim E!\iota x(A(x))$", qui est parfaitement acceptable dans certains cas.

Soit $L_{S'}$, le langage L_S enrichi par les symboles de constantes individuelles et des fonctions propositionnelles dont on a besoin pour analyser les problèmes des pages suivantes. Soit S' le système S étendu adéquatement au langage $L_{S'}$. Pour S' (mais aussi pour S) n'importe quelle classe non-vide d'individus peut être choisie comme univers du discours (et tous ces individus existent donc formellement par rapport à cet univers). Mais attention ! Il faut se mettre d'accord sur ce qui veut dire "individu". Tout symbole de constante individuelle comme "a", "b", etc. dénote un individu (qui existe formellement); cette convention de notation sera maintenue sans discussion. Avec les descriptions c'est autre chose; elles ont été introduites pour les cas où l'existence formelle était niée ou considérée discutable. Ainsi elles ne dénotent pas automatiquement des individus. Si l'on a une description avec existence formelle, c'est-à-dire si :

$$E!\iota x(A(x)),$$

alors "$\iota x(A(x))$" peut être abrégée (par définition), et cette abréviation peut être traitée comme symbole de constante individuelle. Mais une description sans existence formelle parle seulement d'un prédicat ("$A(x)$") et d'une combinaison d'opérateurs; il n'y a pas d'individu correspondant. Seulement avec cette précision on peut parler du libre choix des univers du discours.

4.a.- Les descriptions contradictoires

On appellera "description contradictoire" une description "$\iota x(A(x))$" dans laquelle "$A(x)$" est la négation d'un théorème du système S'. Des exemples seraient :

$$\iota x(Fx \wedge \sim Fx)$$
$$\iota x(Fx \equiv \sim Fx)$$
$$\iota x(x \neq x).$$

Les descriptions contradictoires n'établissent l'existence formelle dans aucun système de Σ, elles ne dénotent rien. Il ne fait pas de sens d'utiliser, à leur égard, les termes "individu" ou "objet", même si ces derniers sont accompagnés d'adjectifs comme "contradictoire " ou "inconsistant".

Si on leur attribuait l'existence formelle ("$E!\iota x(A(x))$"), on obtiendrait trivialement la négation d'un théorème du type "$(Ex)A(x)$". Pour nos exemples on aurait :

$$(Ex)(Fx \wedge \sim Fx)$$
$$(Ex)(Fx \equiv \sim Fx)$$
$$(Ex)(x \neq x).$$

Ainsi des expressions comme "$E!\iota x(A(x))$" ou "$G\iota x(A(x))$" qui contiennent des descriptions contradictoires, sont toujours fausses, ce qui n'empêche pas qu'on puisse les utiliser à l'intérieur d'expressions bien formées complexes.

4.b.- <u>Les descriptions individualisables</u>

Les descriptions qui ne sont pas contradictoires seront appelées "descriptions non-contradictoires" ou "descriptions individualisables". On peut démontrer :

Pour toute description individualisable "$\iota x(A(x))$", il y a des modèles dans lesquels $\iota x(A(x))$ existe.

Dem.: On ajoute "$E!\iota x(A(x))$" à S'. La classe $S' \cup \langle$"$E!\iota x(A(x))$"$\rangle$ est consistante, selon la définition de "description individualisable", et a donc des modèles.

Si la description "$\iota x(A(x))$" est individualisable, elle dénote, par rapport à au moins un modèle, un individu, qui existe ainsi formellement. Naturellement ce qui est individu (et existe formellement) par rapport à un modèle ne l'est pas nécessairement par rapport à tel ou tel autre modèle. Il faut se rappeler que ce ne sont pas seulement les systèmes appliqués qui restreignent la classe des modèles, le fait d'ajouter une ou plusieurs prémisses élimine aussi certains modèles (ceux par rapport auxquels les négations des prémisses sont vraies).

Ainsi, par exemple, supposons (HALLER 1986, p.83) que les trois descriptions "$\iota x(A(x))$", "$\iota x(Fx \wedge A(x))$" et "$\iota x(\sim Fx \wedge A(x))$" soient individualisables. Si j'ajoute une quelconque des trois descriptions (avec "E!") à S', j'obtiens une classe consistante (S_1), qui a des modèles. Si je prends une deuxième et je l'ajoute à S_1 (S_1 n'est plus S', elle a déjà une prémisse), j'obtiens encore une classe consistante (S_2) avec des modèles. Mais si j'ajoute la troisième à S_2, la classe résultante S_3 sera inconsistante (on a "$F\iota x(A(x)$" et "$\sim F\iota x(A(x)$"); S_3 n'aura donc pas de modèle. Les trois descriptions dénotent des individus, mais ces trois individus ne peuvent jamais appartenir au même modèle.

Parmi les descriptions individualisables, il y a un certain nombre de drôles d'oiseaux, qu'il faut mentionner. Le plus connu est sans doute le carré rond ("$\iota x(Cx \wedge Rx)$"). Rien n'empêche qu'on ajoute l'affirmation de son existence formelle à S' ou à d'autres systèmes de Σ, à condition que dans ces systèmes on n'ait pas "$(x)(Cx \supset \sim Rx)$". Le carré rond existerait donc pour certains modèles. On pourrait même s'imaginer une géométrie très particulière dont un individu soit à la fois carré et rond.

Les descriptions dans lesquelles "$A(x)$" est la négation d'un théorème de S' n'étaient pas individualisables. Et si "$A(x)$" était la négation d'un théorème d'un système appliqué T de Σ(sans être négation d'un théorème de S') ? Pas de problème, une description de ce genre est parfaitement individualisable, quoique cela ne soit pas le cas par rapport à n'importe quel modèle; Pour commencer elle est individualisable dans S' (sans autres prémisses). En plus il y a quelquefois des systèmes très intéressants qui permettent son individualisation. Prenons par exemple l'expression "Fzy" ("z est le successeur de y", "$z = suc(y)$"); "$F0x$" est la négation de l'axiome "$\sim F0x$" de la théorie des nombres naturels (de premier ordre), qui est un système de Σ. Il n'y a aucun modèle de ce système (même pas un modèle non-standard), pour lequel $\iota x(F0x)$ (l'individu dont 0 est le successeur) existe formellement. Cependant dans la théorie des nombres entiers on a parfaitement "$E!\iota x(F0x)$"; l'individu correspondant est normalement symbolisé par "-1" et existe dans tous les modèles de la théorie des nombres entiers.

4.c.- Les modèles qu'on peut construire autour d'individus particuliers

On dit quelquefois que pour les individus qui sont des produits de fantaisie, le tiers exclu n'est pas toujorus satisfait; on les appelle des "objets incomplets". Par exemple, grâce à une littérature abondante, on en sait beaucoup sur le personnage fictif qu'est Don Quichotte, mais il est possible qu'on ne sache pas s'il avait des cors ou non. Seulement, le sait-on de Jules César, un personnage historique dont l'existence réelle (dans le passé) n'est pas discutée ? Même en réunissant tout le matériel historique qu'on a établi autour de César, il reste encore une marge pour construire beaucoup de modèles, dont quelques-uns avec des cors et d'autres sans cors. Par rapport à Don Quichotte on procèdera exactement de la même façon (à l'aide de l'oeuvre de Cervantès). Pour Pégase (tout en préférant les modèles qui l'incluent parmi les chevaux ailés et non parmi les vaches ailées) il nous reste aussi un grand choix de modèles. En ce qui concerne le roi actuel de la France, dont on ne connaît pratiquement rien, c'est encore la même chose; pour certains modèles il est chauve, pour d'autres il a une chevelure abondante.

Ce qu'on peut dire pour tous ces cas, c'est que dans chacun de leurs modèles le tiers exclu et tous les autres théorèmes de S' sont rigoureusement respectés. Notre ignorance signifie seulement que nous hésitons (pour Don Quichotte, pour Pégase, pour le roi actuel de la France et aussi pour Jules César) dans notre choix parmi divers modèles.

Les univers des rêves et de la fantaisie sont largement ouverts au traitement indiqué, même avec des cas très particuliers comme des personnages en partie fictifs et en partie réels, des personnages fictifs dans des endroits réels, des personnages fictifs inventés (dans la fiction) par d'autres personnages fictifs et ainsi de suite. Tout ce monde charmant ou monstrueux a ses modèles, et il n'y a aucune raison logique pour le mettre en quarantaine.

4. d.- <u>To be and not bo be, une petite histoire[10] pour terminer</u>

Achille et la tortue, deux personnages chers à Zenon d'Elée, à Lewis Carrol et à Douglas R. Hofstadter, ont pris une décision importante. Ils vont organiser une petite fête, mais avec des invités hauts en couleurs.

Un de leurs invités principaux est le roi nu. Sa nudité ne les dérange

---

10 Dans cette histoire tous les personnages existent formellement ("E!"),

.../...

pas, au moins en ce qui concerne la tortue, qui n'est pas particulièrement puritaine. Ce qui dérange est que le roi parle constamment de la chemise qu'il porte et qui, selon lui, est faite de fibres d'or et parsemée de couronnes noires. Comme Achille et la tortue sont bien élevés (et assez hypocrites), ils félicitent le roi de sa jolie chemise. Pendant toute la soirée, la chemise, qui, en théorie, devrait vêtir le roi, change et se modifie comme un être vivant. Selon les invités et leur tempérament, elle est quelquefois plus longue et quelquefois plus courte; elle a plus ou moins de couronnes noires (le nombre varie entre 40 et 7). Avec tout cela on peut se demander si c'est bien le roi qui est l'invité d'honneur, ou plutôt sa chemise.

Un autre invité important est le métaphysicien. C'est un homme cultivé et charmant. Le problème avec lui est qu'il sait qu'il n'existe pas. Pour Achille et la tortue :

savoir A

implique :

A.

Donc il n'existe pas. Question fondamentale et pratique en même temps : Faut-il payer le coq au vin que le métaphysicien a mangé ? [11]

.../... leurs descriptions sont parfaitement individualisables. Cependant, parmi eux, il y en a qui existent dans l'histoire ("XH"), sans exister en réalité ("$\sim XR$"). D'autres individus n'ont même pas une existence dans cette histoire ("$\sim XH$"); on peut leur attribuer seulement quelque chose comme une "existence de deuxième degré" ("XD") dans l'histoire.

11 Commentaire additionnel : La logique est, avant tout, la science de la déduction et non un art pour raconter des histoires. En principe toutes les histoires peuvent être représentées et affirmées dans le langage symbolique de la logique, même des histoires avec des descriptions contradictoires ou avec d'autres phrases qui sont des négations de théorèmes (comme "Tout individu est différent de lui-même"). Seulement dans ce cas on n'a pas de modèles, on peut déduire n'importe quoi de n'importe quoi. .../...

Bibliographie

BURIDANUS, J. 1977, Sophismata, Stuttgart, Ed. T.K. Scott.

HALLER, R. 1986, Non-existence and Predicaiton, Amsterdam.

MEINONG, A. 1913, Gesammelte Abhandlungen II, Leipzig.

PRANTL, C. 1957, Geschichte der Logik im Abendlande, Berlin.

RUSSELL, B. 1919, Introduction to Mathematical Philosophy, Londres.

STAHL, G. 1960, Le problème de l'existence dans la logique symbolique, Revue philos. de la France et de l'étranger, Paris, n° 1, pp.97-104.

STAHL, G. 1969, Intensional Universes, Philosophy and Phenom. Research, Philadelphie, vo. XXX, n°2, pp. 252-257.

STAHL, G. 1977, Estructura y conocimiento cientifico, Editorial Paidos, Buenos Aires (trad. franç.: Structure et connaissance scientifique, IREM Université Paris-Nord, Villetaneuse, 1980).

STAHL, G. 1978, Identité et descriptions dans un système temporel et modal, Revue philos. de la France et de l'étranger, Paris, n° 2, pp. 145-156.

STAHL, G. 1979a, Logical Treatment of the Relations of Knowing and Believing, Philosophy and Phenom. Research, Philadelphie, vol. XXXIX, pp. 511-523.

.../... Ainsi on n'attend pas qu'une phrase avec description contradictoire comme "Juliette construit l'objet qui est rond et non-rond ($\iota x(Rx \wedge \sim Rx)$)" ait un modèle. Et une phrase comme "Juliette pense à l'objet qui est rond et non-rond" ? On serait plutôt tenté de l'accepter, on aimerait avoir un modèle pour elle. Seulement on se trouve maintenant dans un contexte oblique, où on ne peut appliquer la logique de premier ordre qu'avec certaines accomodations. Juliette pourrait penser à une expression (solution métalinguistique) ou à une entité intensionnelle comme une éventualité (voir Stahl 1979a) ou à quelque chose liée à une éventualité, etc. Dans tous ces cas les descriptions sont individualisables, parce que les expressions, les éventualités ou les objets liés à des éventualités sont des individus sans problème; une suite de signes typographiques existe, même si elle formule une contradiction, et on a un résultat analogue pour les autres solutions envisagées.

STAHL, G. 1979b, Les objets physiques et leurs coupes temporelles, Revue philos. de la France et de l'étranger, Paris, n°3, pp.273-277.

STAHL, G. 1981, Divisions of Intensional Universes, Logique et analyse, Louvain, pp. 389-397.

STAHL, G. 1982, Descriptions et présuppositions en logique, Revue philos. de la France et de l'étranger, Paris, n°3, pp. 487-493.

STAHL, G. 1983a, Une autre façon de voir les "désignateurs rigides", Revue philos. de la France et de l'étranger, Paris, n°3, pp.311-316.

STAHL, G. 1983b, Quelques caractéristiques des modalités logiques, dans J. David et G. Kleiber, La notion sémantico-logique de modalité, Metz, pp. 43-53.

STAHL, G. 1985, Prédicats existentiels en logique formelle, Revue philos. de la France et de l'étranger, Paris, n° 3, pp. 289-295.

STAHL, G. 1989, Descriptions contradictoires et descriptions individualisables, Revue philos. de la France et de l'étranger, Paris, n°1, pp. 85-91.

WHITEHEAD, A.N. et RUSSEL, B. 1925/27, Principia Mathematica, Cambridge, 2ème éd.