

SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE ET MATHÉMATIQUES

P. V. GROSJEAN

La logique sur le corps de rupture des paradoxes

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1988, fascicule 7
« La logique sur les corps de rupture des paradoxes », , p. 1-30

http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1988__7_A1_0

© École normale supérieure – IREM Paris Nord – École centrale des arts et manufactures,
1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Séminaire de philosophie et mathématiques » implique
l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute
utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.
Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA LOGIQUE
SUR LE CORPS DE RUPTURE DES PARADOXES

ERRATA

Page 7 : §1.3, second alinéa, lettre \mathfrak{m} oubliée; lire :
... irréductible de degré \mathfrak{m} non nul

Page 17 : ligne 2, lire :
... Sa fonction caractéristique (à valeurs dans $\mathbb{I}\mathbb{B}^2$) sera ...

LA LOGIQUE SUR LE CORPS DE RUPTURE DES PARADOXES

Introduction

Dès l'Antiquité, la Logique s'est heurtée à de curieux paradoxes (ou antinomies) dont le plus ancien est sans doute celui du "Crétois menteur" (Cicéron). Sa structure est exactement celle du paradoxe ci-après :

Soit p la proposition :

p : La phrase ici encadrée est fausse

On voit immédiatement que si on suppose p vraie, alors elle est fausse; mais si elle est fausse, alors elle est vraie... Ce qui se traduit par la suite indéfinie d'implications (signe: \Rightarrow), où $\bar{p} = p + 1$ est la négation de p :

$$(0.1) \quad p \Rightarrow \bar{p} \Rightarrow p \Rightarrow \bar{p} \Rightarrow \dots$$

Parmi les autres exemples d'antinomie, l'un des plus typiques est celui des imprédictibles de Russell:

Une propriété est dite imprédictible lorsqu'elle ne possède pas elle-même la propriété qu'elle exprime (exemple: "être rouge" n'est pas rouge, $x \notin x$); elle est prédictible dans le cas contraire (exemple: "être abstrait" est abstraite, $x \in x$).

Soit X la classe des imprédictibles. Si X est elle-même imprédictible, on a $X \in X$, donc elle est prédictible; dès lors, elle n'appartient pas à la classe X , et l'on a: $X \notin X$, - c'est-à-dire qu'elle est imprédictible. On est ainsi retombé sur le schéma (0.1).

On sait que la théorie des types (Russell, Ramsay), tout comme celle des langues (Carnap), éliminent ces paradoxes en opérant une nette distinction entre les énoncés dits "bien formés" ou "dotés de sens", et les énoncés dits "mal formés" ou "dénués de sens" (Russell),

ceux que nous appellerons plus simplement, par la suite, les insensés. Selon ces théories, les insensés sont à rejeter, sans plus, leur péché étant de mélanger indûment les types entre eux et les langues entre elles.

Or, si l'on se réfère à l'histoire de la Mathématique, on est en droit de se demander si un tel ostracisme constitue bien la solution réelle du problème des antinomies. Car en plusieurs cas, la Mathématique, après avoir rencontré des paradoxes et après avoir manifesté une réaction initiale de rejet, n'en a pas moins fini par absorber les objets étranges, - les "sophistiques", disait Cardan, - qui se trouvaient à l'origine de ces paradoxes.

Tel fut le cas des irrationnels, issus d'un paradoxe qui fit scandale dans l'Ecole pythagoricienne: Si, avec cette dernière, nous nous cantonnons dans le cadre des seuls entiers pour appliquer le théorème de Pythagore au triangle rectangle isocèle, alors nous tombons en plein paradoxe: En effet, par un raisonnement élémentaire, on voit tout de suite que les deux entiers h et c , premiers entre eux, et obéissant à l'équation de Pythagore, $h^2 = c^2 + c^2 = 2 \cdot c^2$, sont à la fois pairs et impairs!

On sait que ce paradoxe disparaît dès qu'on adjoint à l'ensemble des entiers, - et, plus généralement au corps \mathbb{Q} des rationnels, - un "élément symbolique" nouveau, noté $\sqrt{2}$ et décrété racine de l'équation litigieuse $x^2 - 2 = 0$.

Autre cas bien connu, celui des imaginaires. Historiquement issu des équations algébriques du 3^{ème} degré, il se pose beaucoup plus simplement à propos de l'équation $x^2 + 1 = 0$. Si, avec les premiers mathématiciens de la Renaissance, nous refusons de quitter le corps \mathbb{R} de ces nombres qu'on appelle aujourd'hui les "réels", alors c'est le paradoxe: x devra être à la fois positif et négatif!

Ici aussi, l'antinomie se maîtrise, non point par cet ostracisme que voulait Simon Stevin, mais bien par l'adjonction à \mathbb{R} d'un symbole noté \hat{r} et décrété racine de la malencontreuse équation.

Il est frappant de constater que dans ces deux cas historiques, comme dans celui des antinomies de la Logique, l'élément "sophistique" a été affublé, dès l'origine, d'une épithète négative, voire péjorative, qui lui est restée: irrationnel, imaginaire (c'est-à-dire irréel), insensé.

Mais il est un autre point, très important, commun aux trois cas cités. Dans les deux exemples mathématiques d'abord, les équations contestées ne sont que des cas particuliers d'équations à deux variables, définissant des relations parfaitement innocentes :

$$(0.2) \quad x \cdot y = 2 \quad , \quad x \cdot y = -1 \quad ,$$

relations satisfaites par une infinité de couples $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ dans le premier cas, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dans le second cas.

Le paradoxe ne surgit que si l'on veut doter ces relations de réflexivité ($x = y$), sans pour cela quitter les ensembles dont on est parti, \mathbb{Q} et \mathbb{R} respectivement.

Or, les choses se passent exactement de la même manière dans le cas des antinomies de la Logique. Ainsi, prenons l'exemple des imprédictibles x , dont X est la classe. Posons

$$(0.3) \quad \bar{p} = (x \notin x) \quad , \quad q = (x \in X) \quad .$$

Pour tout imprédictible x , les deux propositions sont simultanément vraies; on a ainsi :

$$(0.4) \quad \bar{p} \cdot q = 1 \quad \text{c-à-d} \quad p \cdot q + q + 1 = 0 \quad .$$

C'est là une innocente relation, satisfaite par quantité de couples (p, q) de propositions "sensées". L'antinomie arrive avec la réflexivité; si X est elle-même une x , c'est-à-dire si $x = X$, alors (0.4) donne :

$$(0.5) \quad \boxed{p^2 + p + 1 = 0} \quad ,$$

ce qui contredit brutalement le principe d'identité:

$$(0.6) \quad p^2 = p \quad \text{c-à-d} \quad p^2 + p = 0$$

et le principe de contradiction, qui lui est algébriquement équivalent :

$$(0.7) \quad \bar{p} \cdot p = 0 \quad \text{c-à-d} \quad p^2 = p .$$

Nous appellerons (0.5) l'équation des paradoxes. Aucune proposition "sensée", c'est-à-dire aucune indéterminée à valeurs dans le corps binaire $\mathbb{B} = \{0,1\}$ ne peut satisfaire cette équation.

Ici, on se prend à songer à la vieille technique de l'adjonction symbolique, qui remonte à Cauchy et à Galois et qui a si bien réussi avec les irrationnels et avec les irréels (les imaginaires). Ne réussirait-elle pas aussi bien avec les "insensés"? La réponse est affirmative, comme nous allons le voir.

Il s'agit donc, maintenant, non plus de rejeter les "insensé(e)s", mais bien de les intégrer dans un calcul des insensées, lequel ne serait pas plus insensé que le calcul des irrationnels n'est irrationnel, ou que le calcul des imaginaires n'est imaginaire.

Qu'elles soient sensées ou insensées, les propositions complexes que nous allons introduire auront leurs valeurs dans une extension algébrique \mathbb{B}^2 du corps \mathbb{B} de la Logique classique. Ce corps, nous l'appellerons le corps de rupture des paradoxes.

Chapitre I. Le corps de rupture des paradoxes

§ 1.1.- Les corps de Galois

Dans les § 1.1, 1.2, 1.3 qui vont suivre, nous ne ferons que rappeler succinctement des notions et des théorèmes très classiques.

On donne le nom de corps (ou champ) de Galois à tout corps fini \mathbb{K} . Le plus simple d'entre eux est le corps binaire \mathbb{B} de la Logique classique.

\mathbb{K} étant fini, tous ses éléments sont cycliques, aussi bien pour l'addition que pour la multiplication. On appelle :

1°) caractéristique k de \mathbb{K} le nombre de fois qu'il suffit de répéter, dans une addition avec lui-même, un élément $x \in \mathbb{K}$, quelconque mais non nul, pour obtenir le neutre 0 de l'addition :

$$(1.1) \quad k \text{ fois: } x + x + \dots + x = 0 \quad \text{c-à-d} \quad k \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}$$

2°) ordre N de \mathbb{K} , le nombre de fois qu'il suffit de répéter, dans une multiplication avec lui-même, un élément $x \in \mathbb{K}$, quelconque mais $\neq 0$ et $\neq 1$, pour obtenir le neutre 1 de la multiplication :

$$(1.2) \quad \forall x \neq 0 : x^N = 1 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{K} : x^{N+1} = x$$

On démontre les théorèmes suivants :

- 1.- la caractéristique k est un nombre premier.
- 2.- le cardinal C du corps est k^n ; l'entier $n \neq 0$ est le degré du corps; pour $n = 1$, le corps est dit premier.
- 3.- \mathbb{K} admet n automorphismes, lesquels forment un groupe, dit "groupe de Galois" du corps \mathbb{K} .
4. l'ordre de \mathbb{K} est $N = C - 1 = k^n - 1$, $\Rightarrow x^C = x$.
5. Tout corps de Galois est commutatif (théorème de Wedderburn).

Ainsi, pour le corps \mathbb{B} de la logique, on a : Caractéristique $k = 2$; Cardinal $C = 2$; Degré $n = 1$; Ordre $N = 1$. C'est un corps premier et il n'a d'autre automorphisme que l'identité.

§ 1.2.- Les polynomes sur un corps de Galois

Soit X une indéterminée, c'est-à-dire l'élément générateur du demi-groupe multiplicatif monogène $\Delta = \{X, X^2, X^3, \dots\}$. Bien que X n'appartienne pas nécessairement au corps de Galois \mathbb{K} considéré, on postule que: 1°) X est multipliable par tout élément de \mathbb{K} , avec commutativité et associativité mixte; 2°) les résultats ainsi obtenus sont additionnables entre eux; 3°) la multiplication par tout élément de Δ ou de \mathbb{K} est distributive sur cette addition. En conséquence, on aura donc, d'après (1.1) :

$$(1.3) \quad X + X + \dots + X = (1+1+\dots+1).X = k.X = 0$$

Ces hypothèses permettent de construire sur \mathbb{K} des polynomes de degré m quelconque :

$$(1.4) \quad F_{(m)}(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \dots + a_1X + a_0, \quad a_i \in \mathbb{K}$$

L'ensemble de ces polynomes, noté $\mathbb{K}[X]$, possède une structure d'anneau.

Si, en particulier, X est une indéterminée x à valeur dans \mathbb{K} , alors, d'après (1.2), le degré d'un polynome ne pourra être supérieur à l'ordre N . Ainsi, sur le corps binaire \mathbb{B} , pour lequel $N = 1$, on ne pourra construire que 4 polynomes en x , à savoir: 0, 1, x , $x + 1$.

On reconnaît là les 2 fonctions logiques d'ordre zéro (les constantes "faux" et "vrai") et les deux fonctions d'ordre 1 (l'affirmation et la négation). Ce que le logicien appelle une "proposition sensée", l'algébriste l'appelle une "indéterminée à valeur dans \mathbb{B} ".

Si X est a priori quelconque, le nombre des polynomes distincts (1.4) de degré $m \neq 0$ sera celui des suites $\{a_0, a_1, \dots, a_{m-1}\}$ formées au moyen d'éléments de \mathbb{K} .
Ce nombre est donc :

$$(1.5) \quad D = C^m = k^{n \cdot m}.$$

Le nombre des polynomes d'ordre 0 est évidemment C .

§ 1.3.- La réductibilité et l'irréductibilité

$F_{(m)}(X) \in \mathbb{K}[X]$, de degré $m \neq 0$, est dit réductible ou irréductible sur \mathbb{K} selon qu'il est ou n'est pas le produit d'au moins deux polynomes de $\mathbb{K}[X]$ de degré non nul.
Tout binome $(X-a)$ est donc irréductible.

On démontre le théorème : Si n est le degré de \mathbb{K} , alors, dans $\mathbb{K}[X]$, tout polynome irréductible de degré non nul est diviseur de

$$(1.6) \quad G(X) = X^D - X$$

Pour $m = 1$ (c-à-d $D = C$), (1.6) est le polynome fondamental $G_{\mathbb{K}}$ de \mathbb{K} :

$$(1.7) \quad G_{\mathbb{K}}(X) = X^C - X = X \cdot (X^{N-1} - 1).$$

Pour le corps binaire, on a $X+X=0$ c-à-d $X=-X$;
(1.7) s'écrit alors, puisque $N=1$:

$$(1.8) \quad G_{\mathbb{K}}(X) = X^2 + X = X(X+1) \in \mathbb{B}[X]$$

Les deux seuls irréductibles représentent donc une proposition sensée et sa négation. En annulant le polynome fondamental (1.8) de la Logique on retrouve les deux grand principes classiques (0.6) et (0.7).

Passons au cas où $m=2$, toujours pour le corps binaire.
On a $D=4$, d'où, d'après (1.6) :

$$(1.9) \quad G(X) = X^4 + X = X(X+1)(X^2 + X + 1).$$

Donc,

$$(1.10) \quad \boxed{H(X) = X^2 + X + 1}$$

est le seul polynome de degré 2 irréductible sur \mathbb{B} .
Il est apparu ci-avant dans l'équation (0.5) des paradoxes.

Or, (1.6) est le polynome fondamental d'un certain corps \mathbb{K}' , doté de la même caractéristique k que le \mathbb{K} primitif, mais ayant le degré $n' = n \cdot m$ et le cardinal $C' = k^{n'}$. Pour \mathbb{K}' , les irréductibles seront tous de degré 1 ; en conséquence, les diviseurs de (1.6) qui étaient irréductibles sur \mathbb{K} seront réductibles sur \mathbb{K}' . Pour cette raison, \mathbb{K}' est appelé un corps de rupture pour chacun des ex-irréductibles. Ses éléments sont racines de (1.6); on démontre qu'elles sont toutes distinctes. Elles comprennent le zéro et $(N^2 - 1)$ autres éléments appelés les racines $(N^2 - 1)^{\text{èmes}}$ de l'unité.

Dans le cas qui nous occupe, où \mathbb{K} c'est \mathbb{B} , (1.9) sera le polynome fondamental du corps de rupture des paradoxes: sur ce corps, (1.10) est réductible. En l'annulant, on forme un nouveau principe d'identité pour la Logique :

$$(1.11) \quad X^4 = X$$

que nous appellerons le principe faible d'identité.

Ce principe va caractériser un ensemble de propositions complexes, -désormais notées ici par des majuscules P, Q, \dots , - dont certaines pourront être sensées, -et alors représentées par des minuscules p, q, \dots . Les non-sensées, les insensées ($P^2 \neq P$) seront peut-être "dépourvues de sens" selon le langage habituel de la Logique, mais elles ne seront nullement dépourvues de valeurs cohérentes.

§ 1.4.- Le corps de rupture des paradoxes

Strictement parlant, un corps de rupture \mathbb{K}' est une extension algébrique d'un corps \mathbb{K} , extension obtenue en adjoignant à \mathbb{K} un symbole nouveau α désignant une racine d'un certain polynome donné, $F \in \mathbb{K}[X]$, irréductible sur \mathbb{K} : $F(\alpha) = 0$. Exemple: le corps \mathbb{C} des complexes, extension algébrique de \mathbb{R} .

En général, il existe plusieurs corps de rupture pour $F(X)$ donné, mais on démontre qu'ils sont isomorphes.

On appelle corps de décomposition de $F(X) \in \mathbb{K}[X]$, irréductible sur \mathbb{K} , le corps-extension $\mathbb{K}'(F)$ qui contient les symboles de toutes les racines de $F(X)$.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{B}$ et $n = 2$, le corps de rupture des paradoxes sera aussi le corps de décomposition de (1.9), puisque, comme on va le voir, les deux racines de (1.10) sont la négation l'une de l'autre.

Désignons ces racines par α et ω . On a ainsi :

$$(1.12) \quad H(X) = (X + \alpha)(X + \omega) = X^2 + (\alpha + \omega)X + \alpha\omega.$$

D'où les relations ci-après :

$$(1.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \omega = 1 \quad , \quad \alpha \cdot \omega = 1 \\ \omega^2 = \omega + 1 = \alpha = \alpha^2 + 1 \\ \alpha^2 = \alpha + 1 = \omega = \omega^2 + 1 \\ \alpha^3 = 1 = \omega^3 \quad ; \quad \alpha^4 = \alpha \quad , \quad \omega^4 = \omega \end{array} \right.$$

La Logique s'enrichit donc maintenant de deux nouvelles valeurs, l'alpha et l'oméga, venant s'adjoindre au vrai et au faux. Alpha et oméga sont la négation l'une de l'autre; avec le "vrai" (c-à-d 1), elles constituent les 3 racines cubiques de l'unité. Par ailleurs, (1.13) montre que toute multiplication exécutée entre des α et des ω sera bien distincte de toute multiplication "ET" (signe \wedge) au sens de la Logique classique.

Les éléments \mathcal{P} les plus généraux de l'extension $\mathbb{B}' = \{0, 1, \alpha, \omega\}$ seront des combinaisons linéaires des éléments de \mathbb{B}' , les coefficients de ces combinaisons étant des "sensées" (lettres minuscules). On a les écritures équivalentes:

$$(1.14) \quad \mathcal{P} = p_1 \alpha^1 + p_2 \alpha^2 = p_1 + j \cdot \omega = p_2 + j \cdot \alpha$$

La proposition sensée j :

$$(1.15) \quad j = \beta_1 + \beta_2$$

qui se lit "ou bien β_1 , ou bien β_2 ", sera la proposition dirimante de P . Lorsqu'elle est vraie ($j=1$), elle interdit, sans objection possible, tout caractère "sensé" à la proposition complexe P , dont les composantes β_1 et β_2 sont alors contradictoires. Si elle est fautive ($j=0$), alors P est sensée et ses composantes sont équivalentes.

On voit immédiatement que l'on a :

$$(1.16) \quad P \cdot \bar{P} = P^2 + P = j$$

Donc: si P est sensée ($j=0$), elle est vraie ou fautive, et (1.16) restitue les principes classiques (0.6) et (0.7) ; si P est insensée ($j=1$), alors elle obéit à l'équation (0.5) des paradoxes, et elle n'est ni vraie ni fautive.

Le corps de rupture est de degré $n=2$; son groupe de Galois est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$. Dans l'extension de \mathbb{B} , il n'existe donc qu'un et un seul automorphisme non identique, lequel permute α et ω . Nous l'appellerons la conjugaison, nous noterons P^* la conjuguée de P . Cet automorphisme laisse invariants les éléments de \mathbb{B} et, par conséquent, les propositions (sensées) de la Logique classique. On a donc :

$$(1.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^* = \omega \quad \omega^* = \alpha \\ P^* = \beta_2 \alpha^1 + \beta_1 \alpha^2 = \beta_1 + j \cdot \alpha = \beta_2 + j \cdot \omega = P + j \end{array} \right.$$

$$(1.18) \quad P^2 = P^* = \left\{ \begin{array}{l} P, \text{ si } P \text{ est sensée} \\ \bar{P}, \text{ si } P \text{ est insensée} \end{array} \right\} \quad \overline{P^*} = \bar{P}^*$$

De par l'automorphisme du corps \mathbb{B}' , à toute propriété et à tout théorème relatifs aux propositions complexes, correspondra une propriété "conjuguée", un théorème "conjugué".

§ 1.5.- Représentation vectorielle

D'après (1.14), le corps \mathbb{B}' est visiblement un vectoriel à 2 dimensions; nous le noterons désormais \mathbb{B}^2 .

Les propositions sensées y jouent le rôle de scalaires.

Posant $P = (p_1, p_2)$, on voit que l'on a :

$$(1.19) \quad 0 = (0,0), \quad \alpha = (1,0), \quad \omega = (0,1), \quad 1 = (1,1).$$

Prises 2 à 2, les 3 dernières paires engendrent trois bases. En effet, d'après (1.13), il n'existe pas de combinaison linéaire nulle (à coefficients non tous nuls) au sein de chacune de ces 3 paires. Et ces 3 bases sont les seules possibles dans \mathbb{B}^2 .

Selon les bases $[1, \alpha]$ et $[1, \omega]$, les composantes de P sont respectivement (p_1, j) et (p_1, j) ; la formule (1.15) n'est donc qu'une formule de changement de composantes dû à un changement de base.

Si nous représentons ces vecteurs par des colonnes, le groupe de Galois sera représenté par les deux matrices ci-après:

$$(1.20) \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = N^{-1}$$

§ 1.6.- Représentation matricielle

Mais \mathbb{B}^2 est aussi une algèbre. On sait qu'un vectoriel devient une algèbre dès qu'on le dote d'une composition binaire interne ("multiplication" ou "produit") distributive sur l'addition. Une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ étant choisie l'algèbre sera fixée par un ensemble de constantes de structure C_{ij}^k telles que l'on ait :

$$(1.21) \quad e_i \cdot e_j = C_{ij}^k \cdot e_k$$

Si l'algèbre est associative, on montre aisément que \mathcal{C}_i est représentable par la matrice $[C_{(i)j}^k]$ où i est le n° du vecteur de base, j celui de la ligne et k celui de la colonne. Une seconde représentation est donnée par $[C_{j(i)}^k]$.

Ceci s'applique aux extensions algébriques; en particulier, il est facile d'arriver aux représentations ci-après pour les deux exemples traités dans l'Introduction :

$$(1.22) \quad \sqrt{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \sqrt{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les relations (1.13) sont des cas particuliers de (1.21), et l'on a :

$$(1.23) \quad 1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \omega = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

C'est une représentation d'ordre 2 sur \mathbb{B} . Il en existe une seconde, obtenue par automorphisme: permutation, dans (1.23), des lettres α et ω (elle est signalée ci-avant).

On a ainsi :

$$(1.24) \quad P = \begin{bmatrix} p_2 & j \\ j & p_1 \end{bmatrix} \quad P^* = \begin{bmatrix} p_1 & j \\ j & p_2 \end{bmatrix} \quad \text{rappel: } j = p_1 + p_2$$

Les propositions sensées se représentent donc par des matrices scalaires.

Quant à la conjugaison, elle s'effectue sur (1.24) grâce à la matrice N de (1.20) :

$$(1.25) \quad P^* = N \cdot P \cdot N .$$

Chapitre II. La logique des propositions complexes

§ 2.1.- L'algèbre sur \mathbb{B}^2

Le signe d'égalité (=), employé dans ce texte, désigne toujours l'identité; sa table de Pythagore est donc la matrice-unité à 4x4 éléments. La relation d'équivalence, (\Leftrightarrow), définie ci-après, est bien distincte, en général, de l'égalité (=), ceci contrairement à ce qui se passe en Logique classique.

L'addition sur \mathbb{B}^2 est évidemment l'addition vectorielle:

$$(2.1) \quad P + P' = (p_1 + p'_1)\alpha^1 + (p_2 + p'_2)\alpha^2 = (p_1 + p'_1) + (j + j')\omega$$

La somme de deux insensées est donc sensée. On a :

$$(2.2) \quad P + \bar{P} = 1 \quad P + P^* = j \quad \bar{P} + P^* = j + 1 = \bar{j}.$$

La multiplication est une composition isomorphe à la multiplication matricielle sur $(\mathbb{B}^2)^2$. Désormais, pour cette opération, nous utiliserons toujours le signe (x), et jamais le simple point (éventuellement sous-entendu), sauf si l'un des facteurs au moins est sensé. Le calcul donne :

$$(2.3) \quad P \times P' = p_1 p'_1 \alpha^1 + p_2 p'_2 \alpha^2 + j j'$$

En particulier, on a :

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} P \times P = P^2 = P^* \quad ; \quad P \times \bar{P} = P + P^* = j \\ P \times P^* = P^3 = P + j\bar{P} \quad ; \quad \bar{P} \times P^* = jP \\ P^* \times P^* = P^4 = P \quad ; \quad \bar{P} \times \bar{P} = \bar{P}^* = \bar{P} \end{array} \right.$$

Les tables de Pythagore de l'addition et de la multiplication sont données en l'annexe 1.

Précisons, pour mémoire, que les propositions sensées forment une sous-algèbre de l'algèbre des propositions complexes.

§ 2.2.- La logique sur \mathbb{B}^2

Les compositions logiques entre propositions complexes devront être telles que si les composantes sont sensées, ces nouvelles compositions se ramènent aux anciennes.

Ainsi, l'équivalence sera la négation de l'addition:

$$(2.5) \quad (P \Leftrightarrow P') = P + \overline{P'} = \overline{P} + P'$$

La table en est donnée en annexe, et l'on voit que l'égalité (=) n'est autre chose que l'équivalence classique: pas d' α ni d' ω .

Contrairement à celle-ci, l'équivalence entre complexes peut être à valeur a priori quelconque, vraie, fausse, alpha, oméga. Ainsi, pour $j \neq 0$, les équivalences ($P \Leftrightarrow 1$) et ($P \Leftrightarrow 0$) ne sont ni vraies ni fausses. Mais leur valeur est celle de P et de \overline{P} , respectivement, comme en Logique classique :

$$(2.6) \quad (P \Leftrightarrow 1) = P \quad (P \Leftrightarrow 0) = \overline{P}$$

Les compositions ET (\wedge) et OU (\vee) s'exécuteront entre termes homologues, entre composantes homologues des vecteurs:

$$(2.7) \quad P \wedge P' = (p_1 \wedge p'_1) \cdot \alpha + (p_2 \wedge p'_2) \cdot \omega$$

Ainsi, toutes les propriétés des compositions classiques se retrouveront pour les compositions entre propositions complexes.

La relation classique $p \wedge p' = p \cdot p'$ et la relation (2.3) montrent clairement que le produit (\times) de deux complexes n'est égal à leur conjonction (\wedge) que ssi l'un des deux facteurs au moins est sensé :

$$(2.8) \quad j \cdot j' = 0 \iff P \times P' = P \wedge P'$$

On peut définir le ET et le OU à partir de l'algèbre de \mathbb{B}^2 , c'est-à-dire à partir de la multiplication et de l'addition :

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} P \wedge Q = P \times Q^* + \overline{P} \times Q + P^* \times \overline{Q} \\ P \vee Q = P \times \overline{Q}^* + \overline{P} \times Q + P^* \times Q^* \end{array} \right.$$

Comme en Logique classique, on a :

$$(2.10) \quad P \wedge \bar{P} = 0 \quad P \vee \bar{P} = 1$$

Mais on a aussi :

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} P \wedge P^* = j \cdot P \quad , \quad P \vee P^* = j \cdot P + \bar{j} \\ \bar{P} \wedge P^* = \bar{j} \cdot \bar{P} \quad , \quad \bar{P} \vee P^* = \bar{j} \cdot \bar{P} + j \end{array} \right.$$

Enfin, l'automorphisme du corps impose à ces compositions et aux autres (signe général \top) l'identité :

$$(2.12) \quad (P \top Q)^* = P^* \top Q^* ,$$

ce que l'on pourra vérifier sur les tables de Pythagore données en annexe.

L'exclusion ($\bar{\wedge}$) est la négation de la conjugaison. On sait qu'on peut ramener toute l'axiomatique de la Logique à un seul axiome (Nicod, 1917) n'utilisant qu'une seule composition, l'exclusion. Cet axiome général reste donc valable pour la Logique des complexes.

L'exclusion d'une proposition par elle-même est sa négation :

$$(2.13) \quad P \bar{\wedge} P = \bar{P}$$

D'après (2.11), une insensée exclut toujours sa conjuguée :

$$(2.14) \quad j = 1 \Rightarrow P \bar{\wedge} P^* = 1$$

Pour $j = 0$, on retrouve (2.13). Par ailleurs, d'après (2.3), la multiplication pourra se définir à partir de l'exclusion :

$$(2.15) \quad P \times P' = P \bar{\wedge} P' + j j' + 1$$

Si deux facteurs sont insensés, leur produit est l'exclusion; si l'un au moins est sensé, le produit est la conjonction, c'est-à-dire la négation de l'exclusion.

L'implication (\Rightarrow) se définira comme en Logique classique par :

$$(2.16) \quad (P \Rightarrow P') = (\bar{P} \vee P') = (\beta_1 \Rightarrow \beta'_1) \cdot \alpha^1 + (\beta_2 \Rightarrow \beta'_2) \cdot \alpha^2$$

En particulier, on a :

$$(2.17) \quad (P \Rightarrow P^*) = (\bar{P} \vee P^*) = j \cdot P + 1 = \begin{cases} 1 & \text{si } P \text{ est sensée} \\ \bar{P} & \text{si } P \text{ est insensée.} \end{cases}$$

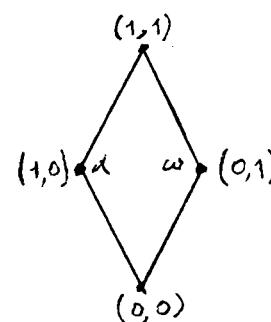
Notons que pour une insensée P , la valeur de l'implication (2.17) n'est jamais le vrai ou le faux. L'automorphisme associe à (2.17) l'implication inverse :

$$(2.18) \quad (P^* \Rightarrow P) = j \cdot \bar{P} + 1.$$

Lorsqu'elle est vraie, l'implication définit l'ordre d'Aristote, bien connu de la Logique classique: "Le vrai implique le vrai; le faux implique n'importe quoi" (Aristote). Autrement dit, très banalement :

$$1 \leq 1 \quad 0 \leq 0 \quad 0 \leq 1$$

Appliquons cet ordre aux composantes homologues des vecteurs de \mathbb{B}^2 . Ceci confère à \mathbb{B}^2 une structure de treillis de Boole, treillis dont le graphe de Hasse est donné ci-contre. On vérifiera cet ordre en se référant à la table de (\Rightarrow) donnée en annexe.



D'une façon plus générale, l'ordre $(P < Q)$ se définira comme en Logique classique par l'une des quatre relations équivalentes ci-après :

$$(2.19) \quad P \wedge Q = P; \quad P \vee Q = Q; \quad \bar{P} \vee Q = 1; \quad P \wedge \bar{Q} = 0$$

§ 2.3.- Compositions-relations

Une composition binaire interne à l'ensemble \mathbb{B} est une application de \mathbb{B}^2 sur \mathbb{B} ; elle est représentable par une matrice à 2×2 termes éléments de \mathbb{B} . Une relation binaire sur \mathbb{B} est une partie de \mathbb{B}^2 ; sa fonction caractéristique est représentable par une matrice à 2×2 termes éléments de \mathbb{B} . On peut donc dire qu'en Logique classique, toute composition binaire est une relation binaire, et inversement.

Cette remarque peut s'appliquer à la Logique des complexes, à condition de substituer à la notion classique de "relation", - désormais qualifiée de "scalaire", - la

notion de relation vectorielle, c'est-à-dire une partie de $(\mathbb{B}^2)^2$. La fonction caractéristique de cette relation sera donc une matrice à 4x4 termes éléments de \mathbb{B} , c-à-d une "table de Pythagore" (exemples en annexe). Par conséquent, une telle relation "vectorielle" est aussi une composition interne à \mathbb{B}^2 .

L'adjectif "vectorielle" se justifie aisément. Soit \mathcal{R} la matrice-table d'une relation-composition sur \mathbb{B}^2 . On a:

$$(2.20) \quad \mathcal{R} = 0. \mathcal{R}_a + 1. \mathcal{R}_b + \alpha. \mathcal{R}_c + \omega. \mathcal{R}_d$$

où les quatre \mathcal{R}_i représentent des relations "scalaires" disjointes 2 à 2, et dont la somme est la tautologie. Nous rappelant que $\alpha + \omega = 1$, on voit que (2.20) s'écrit:

$$(2.21) \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cdot \alpha' + \mathcal{R}_2 \cdot \alpha'' \quad (\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_b + \mathcal{R}_c; \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_d).$$

C'est l'écriture vectorielle (1.14), mais cette fois avec des composantes matricielles représentant des relations scalaires. \mathcal{R} sera scalaire ("sensée") ssi $\mathcal{J} \equiv \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = 0$.

Il existe 2^{2^2} relations scalaires sur \mathbb{B} , et 4^{4^2} relations vectorielles sur \mathbb{B}^2 . Celles-ci se représentent par des matrices entre lesquelles on peut définir un produit relationnel comme en Logique classique: produit matriciel où (\wedge) joue le rôle de multiplication et (\vee) celui d'addition.

Le produit relationnel confère une structure d'algèbre à l'ensemble des relations au sein duquel il agit. En Logique classique, cette algèbre permet une généralisation et une formulation élégante de la théorie du syllogisme. En Logique des complexes, une algèbre relationnelle et une théorie du syllogisme pourraient être construites de façon similaire, mais on n'en voit pas très bien l'utilité. D'ailleurs, le nombre des relations scalaires sur \mathbb{B}^2 est de 65.536, tandis que celui des relations vectorielles (carré du nombre précédent) dépasse les 4 milliards...

§ 2.4.- Retour aux paradoxes

Soit X la classe des imprédicables et \bar{X} sa complémentaire, la classe des prédicables. Considérons les propositions ci-après :

$$(2.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 = (x \in x) \\ p_2 = (x \in X) = (x \notin \bar{X}) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} j = (x = X) \\ i = (x = \bar{X}) \end{array} \right. \Rightarrow i \cdot j = 0$$

Relions ces propositions par la condition :

$$(2.23) \quad p_1 + p_2 = j$$

et formons la proposition complexe

$$(2.24) \quad P(j) = p_1 \alpha + p_2 \omega = p_1 + j \omega$$

Il est clair que :

1°) Pour $j = 0$, la proposition $P(0)$ est sensée et décrit le cas des imprédicables sans paradoxe ($x \neq X$), tandis que sa négation $\bar{P}(0)$ décrit le cas des prédicables, lequel ne donne jamais lieu à paradoxe, que l'on ait $i = 0$, (c-à-d $x \neq \bar{X}$) ou bien $i = 1$ (c-à-d $x = \bar{X}$).

2°) Pour $j = 1$, on a les deux propositions contradictoires

$$(2.25) \quad p_1 = (X \notin X) \quad \text{et} \quad p_2 = (X \in X),$$

ce qui rend $P(1)$ insensée; c'est le cas des imprédicables avec paradoxe classique. Puisque la seconde de ces relations désigne l'appartenance, ceci selon (2.22), $P(1)$ nous dira que "imprédicable est imprédicable", tandis que $P^*(1)$, où les propositions (2.25) se voient permutées, nous dira que "imprédicable est prédicable".

Les propositions $P(1)$ et $P^*(1) = \bar{P}(1)$ sont contradictoires certes, mais elles ne sont ni vraies ni fausses. Elles s'engendrent mutuellement par conjugaison, c'est-à-dire par l'action du groupe de Galois, du groupe des automorphismes de \mathbb{B}^2 .

Bien que contradictoires, les composantes de $P(1)$ ne s'opposent pas; elles se complètent en tant que composantes d'un même vecteur.

En faisant passer de $P(1)$ à $P^*(1)$ et vice versa, indéfiniment, la conjugaison engendre une suite $P \rightarrow P^* \rightarrow P \rightarrow \dots$ qui remplace la suite (0.1) si typique des paradoxes classiques. D'ailleurs, si l'on écrit $P(1) \Rightarrow P^*(1)$, on aura une implication (2.17) qui n'est ni vraie ni fausse. Et la conjugaison () fera passer à (2.18), ni vraie ni fausse elle non plus.

Le paradoxe de la phrase encadrée φ (voir page 1) se "déparadoxera" de la même manière. Ecrivons d'abord φ sans l'encadrer, sous la forme: "Ce qui est encadré est faux"; puis encadrons une proposition quelconque x . Enfin, écrivons la négation $\bar{\varphi}$ de φ : "Ce qui est encadré est vrai", mais sans l'encadrer au préalable.

Considérons les propositions ci-après :

$$(2.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 = x \text{ faux} \\ p_2 = \varphi \text{ vrai} = \bar{\varphi} \text{ faux} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} j = (x = \varphi) \\ i = (x = \bar{\varphi}) \end{array} \right. \Rightarrow i \cdot j = 0$$

Posons (2.23) et ré-écrivons (2.24).

Toutes les considérations émises ci-avant à propos des prédicables-imprédicables vont se répéter ici :

1°) Pour $j = 0$, la phrase φ ne sera pas encadrée; $P(0)$ sera toujours sensée, et aucune difficulté ne se présentera, que l'on encadre ou non la phrase $\bar{\varphi}$.

2°) Pour $j = 1$, la phrase φ se voit encadrée et la proposition complexe $P(1)$ décrit, sans paradoxe à présent, le "paradoxe de la phrase fausse encadrée", lequel est équivalent, rappelons-le, au vieux "paradoxe du menteur".

On peut donc conclure que des propositions telles que les $P(1)$ ci-avant ne sont "insensées" que de nom. Elles expriment, dans une formalisation ad hoc, une situation sortant du cadre de la Logique classique, situation qui était devenue paradoxale par suite d'une approche insuffisante et même erronée du problème. C'est ce que nous allons voir à propos d'un problème qui, pourtant, n'a jamais été considéré comme paradoxal, celui des feux de circulation.

§ 2.5.- La logique des feux de circulation

Il fut un temps où, dans certains pays tout au moins, les feux de circulation n'étaient que bicolores. Le rouge (ci-après noté R) et le vert (noté V) y avaient la même signification qu'aujourd'hui, rouge signifiant "défense de passer", et vert, "autorisation de circuler". (NB: le signal vert est effectivement permissif, mais l'usage courant en a fait un signal impératif).

Un feu bicolore donne des indications au conducteur quant à la marche (M) ou à l'arrêt (A) de son véhicule. Selon que ce conducteur s'y conforme ou non, il sera en droit (D) ou en faute (F).

La relation existant entre les termes des paires dichotomiques (R,V), (A,M), (D,F), est une implication, traduite par la table ci-contre. Celle-ci retrouve sa présentation classique si l'on pose: $V=\bar{R}=0$, $M=\bar{A}=0$, $F=\bar{D}=0$.

⇒	M	A
V	D	D
R	F	D

Mais les feux bicolores se sont complétés par un feu orange international, annonçant le passage du Vert au Rouge. Et dans certains pays (Allemagne, Autriche,...) il y a aussi un second orange (associé au Rouge) annonçant le passage du Rouge au Vert.

Or, au temps des bicolores, l'orange international actuel était remplacé par l'allumage simultané du Rouge et du Vert, le code de la route précisant bien la signification de cette couleur double. Nous pouvons donc désigner ici cet orange par la notation VR, tandis que le second orange éventuel, l'orange "allemand", sera RV.

Si nous uniformisons les notations en représentant le Vert par VV et le Rouge par RR, nous nous trouvons projetés dans l'espace vectoriel \mathbb{B}^2 , dont les 4 vecteurs sont les 4 feux allemands.

De même, introduisons la notation MA pour désigner le freinage, la décélération, et AM pour la mise en marche, l'accélération. Alors, MM sera la marche et AA l'arrêt. Nous introduirons de même les notations DD, DF, FD, FF, qui se comprennent d'elles-mêmes.

Nous sommes ainsi entrés dans la Logique des complexes. Les nouvelles valeurs introduites désignent le changement, le passage d'une situation à une autre. Si nous valons VV à 0 et RR à 1, nous valuerons tout naturellement VR par notre α et RV par notre ω (ou vice versa). Une valuation similaire portera sur les deux autres 4-uples, relatifs, l'un au mouvement du véhicule, l'autre à la situation juridique du conducteur.

L'implication classique, valable pour les feux bicolores, sera remplacée par l'implication nouvelle, valable pour les feux quadricolores, et reliant ceux-ci à la voiture et au conducteur; la table en est donnée en annexe, et ce n'est autre chose que la table de (\Rightarrow), donnée dans la même annexe.

Formalisons rigoureusement tout ceci: Désignons par V la proposition "Vert est allumé" et par R l'énoncé "Rouge est allumé". Dans le système bicolore primitif, R est la négation \overline{V} de V. Introduisons les propositions "sensées" a et b , puis la proposition complexe ci-après:

$$(2.27) \quad P_j(a, b) = (V + a) \cdot \alpha + (V + b) \cdot \omega \quad ; \quad j = a + b.$$

Nous aurons ainsi :

$$(2.28) \quad \left\{ \begin{array}{ll} P_0 = P_0(0,0) = (V, V) & \overline{P}_0 = P_0(1,1) = (R, R) \\ P_1 = P_1(0,1) = (V, R) & P_1^* = P_1(1,0) = (R, V) \end{array} \right.$$

Par leurs allumages et extinctions, les feux oranges font passer de P_0 à P_1 puis à \overline{P}_0 puis à P_1^* puis à P_0 , etc. Il n'y a rigoureusement rien de paradoxal dans tout ceci, sauf peut-être dans l'esprit de celui qui comprendrait mal la signification des feux bicolores de jadis. En effet :

Les feux bicolores ont longtemps survécu en Belgique, et il y a quelque dix ans, on pouvait encore en voir un, très ancien, à l'entrée d'une petite ville, non loin de la frontière française. Imaginons alors l'ahurissement d'un jeune conducteur français, ignorant tout des anciens codes de la route, et tombant en arrêt devant un signal lumineux où le vert et le rouge sont simultanément allumés; imaginons même que le signal électrique soit en panne sur cette couleur double...

Notre Français se sentira plongé en plein paradoxe, puisque Rouge et Vert lui donnent simultanément des indications contradictoires: S'il obéit au Vert, il se met en marche,- ce qui implique qu'il doit immédiatement s'arrêter, selon Rouge,- ce qui implique qu'il doit se mettre en marche, selon Vert,- ce qui implique... Notre homme est tombé sur la fameuse formule des paradoxes: $p \Rightarrow \bar{p} \Rightarrow p \Rightarrow \dots$

Désorienté, il conclura que le feu est insensé, qu'il contredit la Logique,- et que tout ça, c'est une histoire belge. Effectivement :

Comme dans toutes les "histoires belges" qui courent en France, l'absurdité de celle-ci est engendrée par une compréhension insuffisante ou incorrecte de la situation. Notre conducteur n'avait pas compris que si Rouge exclut Vert (exactement comme Vrai exclut Faux), il existe néanmoins une 3^{ème} valeur (et même une 4^{ème}), valeur symbolisée, justement, selon l'ancien code de la route, par la simultanéité de Rouge et de Vert,- nous dirons: par l'existence simultanée de deux composantes, contradictoires certes, d'un même vecteur \vec{P} , ni vrai ni faux, élément de l'extension \mathbb{B}^2 .

Ces composantes ne s'opposent nullement; elles se complètent, avons-nous dit plus haut, exactement comme l'abscisse et l'ordonnée se complètent pour définir la position d'un point dans le plan cartésien.

§ 2.6.- Paradoxe de la complémentarité

Dès sa naissance, la Théorie des Quanta a engendré des énoncés paradoxaux. Certes, son formalisme mathématique ne comportait ni contradiction ni antinomie, et il rendait parfaitement compte des phénomènes. Mais son "interprétation" en langage courant soulevait de sérieuses difficultés.

C'est ainsi que le dualisme onde-corpuscule a pu être considéré comme paradoxal, puisque l'électron et le photon, par exemple, étaient à la fois onde et corpuscule, à la fois continu et discontinu. Et bien que parfaitement conciliables en Mécanique classique, l'espace-temps d'une part et l'impulsion-énergie de l'autre apparaissaient contradictoires en Mécanique quantique, du moment qu'on essayait de fixer l'un de ces deux cadres avec une précision infinie.

Il n'est pas étonnant qu'au cours des soixante dernières années de nombreuses tentatives aient été faites pour créer une "Logique quantique", différente de la Logique booléenne. Certaines de ces tentatives reposaient sur un principe du "tiers inclus", c'est-à-dire sur l'emploi du corps premier $\mathbb{Z}/3$ à la place du corps booléen $\mathbb{Z}/2$. Cette Logique trivalente est la plus ancienne des Logiques multivalentes, puisqu'elle avait été créée par Lukasiewicz (1920) et Post (1921), quelques années avant la Théorie des Quanta.

On peut lui reprocher deux choses: a) C'est une Logique à caractéristique 3, contrairement à la Logique sur \mathbb{B}^2 ; en abandonnant la caractéristique 2, elle modifie fondamentalement une bonne partie de notre système de pensée. b) C'est une Logique "scalaire" (puisque $\mathbb{Z}/3$ est corps premier) et ainsi la tierce valeur qu'elle introduit ne peut jamais que s'opposer aux valeurs contradictoires 1 et 0, sans jamais les réunir en une même entité, sans leur donner cette simultanéité, spécifique des paradoxes traités ci-avant et, plus encore, des "paradoxes" quantiques, tels qu'ils apparaissent dans la pensée de Niels Bohr formulant son principe de complémentarité (1927).

A l'époque, l'idée était si étrange qu'en 1931 Emile Meyerson n'hésitait pas à comparer la "complémentarité" à la "participation", un schéma fondamental de la pensée primitive, d'après Lévy-Bruhl, schéma selon lequel des objets ou des vivants peuvent être à la fois eux-mêmes et autre chose qu'eux-mêmes. La complémentarité a été bien définie par un commentateur moderne, Gerald Holton (1981):

" Bohr demandait aux physiciens d'admettre à la fois Θ et $\bar{\Theta}$, - même s'il n'est pas question qu'ils se manifestent jamais simultanément sur le même plan de l'investigation. Et il ne s'agit plus de transmuter Θ et $\bar{\Theta}$ en quelque entité nouvelle (¹). Bien plus, ils coexistent sous la forme Ou bien Θ ou bien $\bar{\Theta}$, alternative décidée par le choix éventuel des questions, théoriques ou expérimentales, que l'on entend poser."

Voilà certes un appel direct au formalisme logique que nous venons de développer. Soit Θ un proposition telle que, par exemple, "l'électron est une onde". Sa contradictoire $\bar{\Theta}$ nous dira que "l'électron est un corpuscule". Posons alors, comme en (2.27) :

$$(2.29) \quad P_j(a, b) = (\Theta + a) \cdot \alpha + (\bar{\Theta} + b) \cdot \omega \quad ; \quad j = a + b$$

Nous aurons:

$$(2.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_0(0,0) = \Theta \text{ (onde)} \quad P_0(1,1) = \bar{\Theta} \text{ (corpuscule)} \quad ; \quad j = 0 \\ P_1(0,1) = P_1 \leftarrow \text{onde et corpuscule} \rightarrow P_1^* = P_1(1,0) \quad ; \quad j = 1 \end{array} \right.$$

Pour $j = 1$, c'est la coexistence "ou bien Θ ou bien $\bar{\Theta}$ ".
Pour $j = 0$, ce sont les cas purs, ceux que "décide" l'expérience; soit onde, soit corpuscule, - ou encore: soit espace-temps, soit impulsion-énergie.

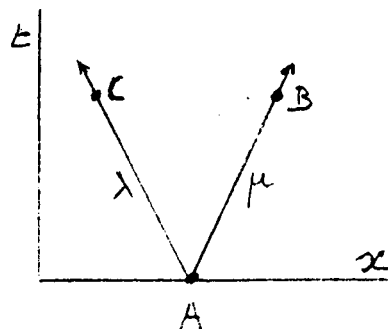
Répetons cependant ici que la Théorie des Quanta dispose de formalismes mathématiques plus poussés et plus pénétrants que notre petit schéma ^{de} logique, réservé aux "interprétations".

(¹) Allusion à la dialectique de Hegel et de Hamelin, laquelle fait passer du couple de contradictoires "thèse-antithèse" à une entité nouvelle, la synthèse.

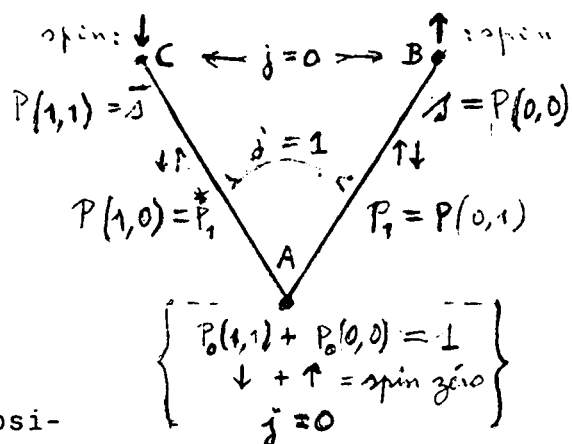
§ 2.7.- Paradoxe E.P.R.

Le "paradoxe E.P.R." (Einstein-Podolsky-Rosen, 1935) est certes l'un des plus coriaces de la physique quantique. Rappelons-le succinctement :

Dans le plan d'espace-temps ci-contre, l'événement A est l'éclatement d'une particule de spin 0 en deux particules λ et μ . Le spin de l'une peut être \uparrow , celui de l'autre peut être \downarrow , mais seule une mesure pourra donner soit \uparrow soit \downarrow à la particule observée.



Mesurons le spin de la particule de droite (c'est l'événement B), et soit \uparrow le résultat de la mesure. Alors, simultanément, la particule de gauche prend le spin \downarrow (et c'est l'événement symétrique C). Une telle action instantanée à distance est contraire aux principes de la Relativité, - ce à quoi on répond que le système étudié est "non-séparable", que ce soit lors de l'événement A ou de l'événement double B+C, ou entre A et B ou C.



Une fois de plus, ré-utilisons la formule (2.27) où \mathcal{A} sera la proposition "le spin est \uparrow ", et $\bar{\mathcal{A}}$ l'énoncé contradictoire au précédent: "le spin est \downarrow ". On a donc :

$$(2.31) \quad P_j(a,b) = (s+a).\alpha + (s+b).\omega ; \quad j = a + b$$

Les cas particuliers s'interprètent comme indiqué sur la seconde figure ci-dessus. Pour $j = 0$, les P_0 sont sensées et chaque particule est dans un état pur: spin bien déterminé. Pour $j = 1$, les propositions insensées P_1 expriment l'indétermination ou plutôt la coexistence de deux états contradictoires, figurés par les deux composantes \mathcal{A} et $\bar{\mathcal{A}}$ du vecteur P_1 et de son conjugué P_1^* .

Le jeu des paramètres a et b a été étudié ci-avant à propos des feux de circulation. Ici, il s'exerce au sein d'un système quantique non-séparable; en un certain sens, il est une manifestation de la non-séparabilité.

§ 2.8.- Logiques hiérarchisées

Dans la Logique sur \mathbb{B}^2 , il n'y a donc plus de paradoxe classique. Mais il n'est pas exclu qu'on s'y heurte à des "super-paradoxes", c'est-à-dire à des propositions violant le principe faible d'identité (1.11) et nous imposant la relation $X^4 \neq X$. Il faudra alors passer à une nouvelle extension, laquelle sera \mathbb{B}^4 et non \mathbb{B}^3 : En effet, notre polynôme (1.10) des paradoxes classiques ne divise pas le polynôme $X^8 + X$, fondamental pour \mathbb{B}^3 (voir annexe 2), et ainsi \mathbb{B}^3 ne résout pas ces paradoxes.

Il n'est pas exclu non plus que l'on ne puisse s'arrêter là, et qu'il faille passer à plusieurs autres extensions, et ce peut-être indéfiniment. On voit ainsi se dessiner une hiérarchie de Logiques, $\mathbb{B}, \mathbb{B}^2, \mathbb{B}^4, \dots$, où l'on a toujours la même caractéristique $k=2$, et où les degrés des extensions sont $n = 2^m$. Voilà qui rappelle ces hiérarchies désormais classiques en Logique, celle des types (Russell) et celle des langues (Tarski), imaginées l'une et l'autre pour résoudre le problème des antinomies.

Pour terminer, une conclusion: Il est désormais acquis que le problème des paradoxes logiques ne peut trouver de solution dans le cadre de la Logique booléenne. Peut-être en est-il de même pour les "paradoxes" quantiques, - qui ne surgissent que dans les problèmes d'"interprétation", répétons-le, - mais ceci reste encore à prouver.

Annexe 1 : Tables de Pythagore

X	0	1	x	w	+	0	1	x	w	\Leftrightarrow	0	1	x	w
0	0	0	0	0	0	0	1	x	w	0	1	0	w	x
1	0	1	x	w	1	1	0	w	x	1	0	1	x	w
x	0	x	w	1	x	x	w	0	1	x	w	x	1	0
w	0	w	1	x	w	w	x	1	0	w	x	w	0	1
A	0	1	x	w	$\bar{\wedge}$	0	1	x	w	V	0	1	x	w
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	x	w
1	0	1	x	w	1	1	0	w	x	1	1	1	1	1
x	0	x	x	0	x	1	w	w	1	x	x	1	x	1
w	0	w	0	w	w	1	x	1	x	w	w	1	1	w
										\Rightarrow	0	1	x	w
										0	1	1	1	1
										1	0	1	x	w
										x	w	1	1	w
										w	x	1	x	1

Application à la Logique des
feux de circulation :

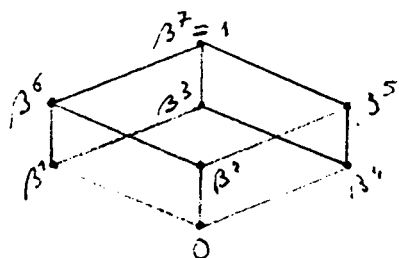
Signaux	\Rightarrow	Voiture			
		MM	MA	AA	AM
Vert	VV	DD	DD	DD	DD
Orange fr.	VR	DF	DD	DD	DF
Rouge	RR	FF	FD	DD	DF
Orange allem ^d	RV	FD	FD	DD	DD

Annexe 2 : Deux autres extensions de \mathbb{B}

Extension \mathbb{B}^3 : On a $k=2$; $\eta=3$; $C=8$; $N=7$. On a le polynome fondamental ci-après (décomposé en facteurs irréductibles) :

$$X^8 + X = X \cdot (X+1) (X^3 + X^2 + 1) (X^3 + X + 1)$$

Le polynome des paradoxes (1.10) n'est pas diviseur, et ainsi \mathbb{B}^3 ne permet pas de résoudre les paradoxes classiques, pour lesquels on a $X^2 \neq X$ et $X^3 = 1$. Mais il résoudrait les paradoxes (à découvrir!) pour lesquels $X^2 = 1$. Les racines du fondamental sont 0 et les 7 racines 7^{èmes} de l'unité, celles-ci notées β^p ($p=0,1,\dots,6$). Le calcul montre qu'elles s'ordonnent selon le treillis cubique de Boole dessiné ci-dessous. Sur ce treillis, on lira toutes les relations additives reliant les β^p entre elles; par exemple, $\beta^4 + \beta^6 = 1$. Ci-dessous aussi, la représentation canonique (de degré 3) de β sur \mathbb{B} .



$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

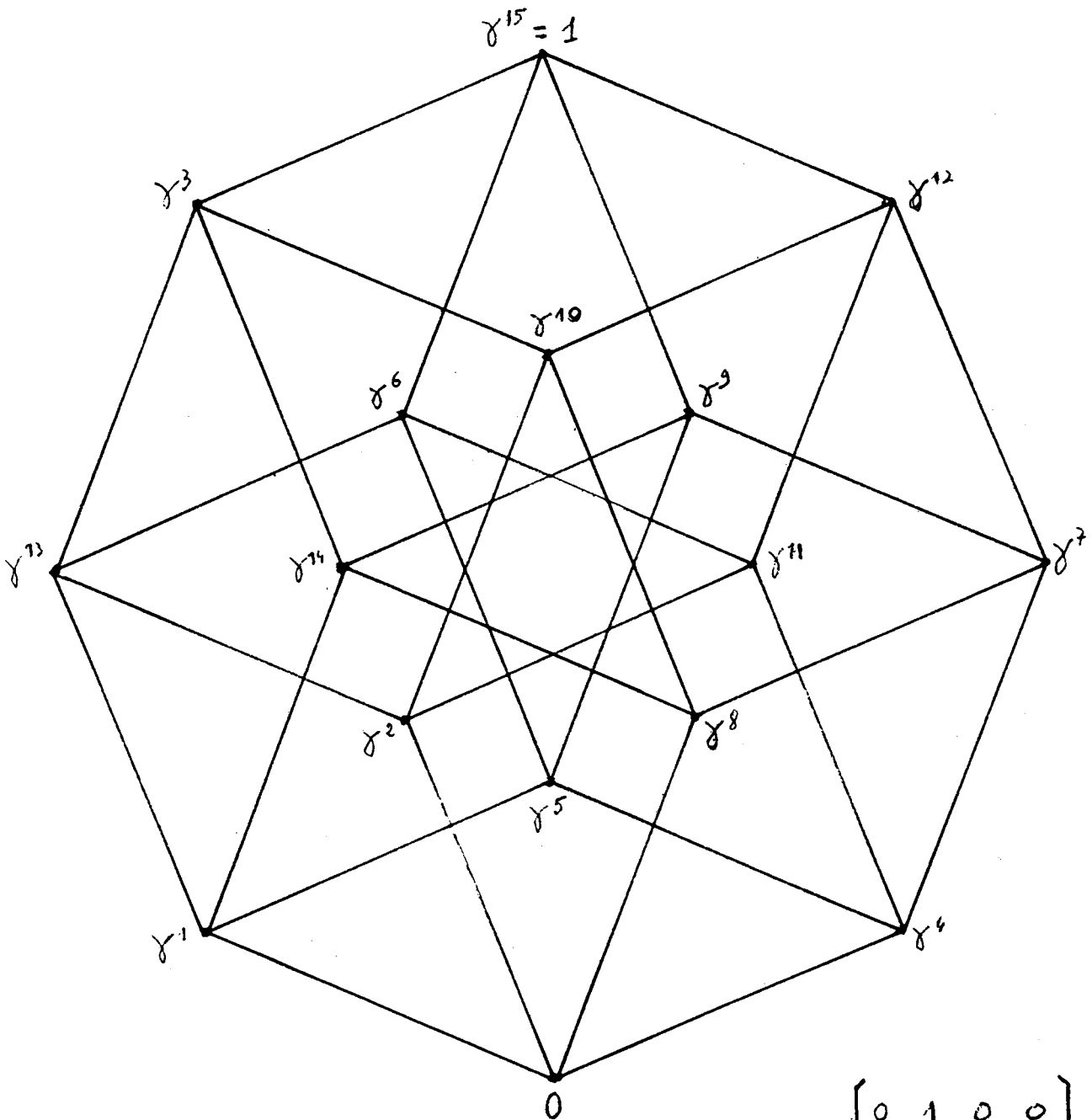
Extension \mathbb{B}^4 : On a $k=2$; $n=4$; $C=16$; $N=15$. Le polynome fondamental est multiple de (1.10) :

$$X^{16} + X = (X^4 + X) (X^4 + X^3 + 1) (X^4 + X + 1) (X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$$

La Logique booléenne et la Logique des complexes (sur \mathbb{B}^2) sont donc des sous-algèbres de \mathbb{B}^4 . Les paradoxes classiques y sont donc résolus ainsi que les super-paradoxes (à découvrir!) pour lesquels $X^3 \neq 1$ mais $X^{15} = 1$. Les racines du fondamental, c-à-d les éléments de \mathbb{B}^4 , sont 0 et les 15 racines 15^{èmes} de l'unité, notées γ^p ($p=0,1,\dots,14$). Le calcul montre qu'elles s'ordonnent en un treillis hypercubique de Boole (page ci-après) où se lisent les nombreuses relations additives reliant ces éléments. Les éléments γ^5 et γ^{10} sont racines de l'équation des paradoxes; on a donc $\gamma^5 = \alpha$ et $\gamma^{10} = \omega$ (ou vice versa). La représentation matricielle canonique de γ est donnée à la page suivante.

NB: La présente annexe n'est donnée que "pour mémoire"...

Treillis de Boole de \mathbb{B}^4 .



Représentation canonique :

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

TABLE DES MATIERES

Introduction	1
<u>Ch.I Le corps de rupture des paradoxes</u>	5
1.1 Les corps de Galois	5
1.2 Les polynomes sur un corps de Galois	6
1.3 La réductibilité et l'irréductibilité	7
1.4 Le corps de rupture des paradoxes	8
1.5 Représentation vectorielle	11
1.6 Représentation matricielle	11
<u>Ch.II La Logique des propositions complexes</u>	13
2.1 L'algèbre sur \mathbb{B}^2	13
2.2 La logique sur \mathbb{B}^2	14
2.3 Compositions-relations	16
2.4 Retour aux paradoxes	18
2.5 La logique des feux de circulation	20
2.6 Paradoxe de la complémentarité	23
2.7 Paradoxe E.P.R.	25
2.8 Logiques hiérarchisées	26
Ann. 1 Tables de Pythagore	27
Ann. 2 Deux autres extension de \mathbb{B}	28
Treillis de Boole de \mathbb{B}^4	29
Table	30