Séminaire de philosophie et mathématiques

Labib Haddad

Condorcet et les ultrafiltres

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1987, fascicule 5
« Condorcet et les ultrafiltres », , p. 0-26
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1987___5_A1_0>

CONDORCET ET LES ULTRAFILTRES

Labib HADDAD

Résumé

On peut interpréter un ultrafiltre non trivial comme l'ensemble des coalitions efficaces ("majoritaires") d'une procédure de vote qui, sans être dictatoriale, évite le paradoxe de Condorcet.

En poussant un peu plus loin cette interprétation, on fait apparaître l'analyse nonstandard et, plus généralement, ultraproduits et ultralimites, comme des procédés qui permettent de concilier les points de vues éventuellement divergents au sein d'une même, ou de plusieurs, communautés.... infinies.

Apologue.- Un Conseil municipal discute de l'opportunité de construire une école communale et de l'endroit où il conviendrait de la construire, éventuellement. Certains disent oui, d'autres disent non à la construction. Quant à l'endroit, il n'y a que deux terrains disponibles X et Y.

On passe au vote. A la question

p : doit-on construire une école ?

le Conseil répond oui à la majorité absolue.

A la question suivante

q : doit-on construire l'école sur le terrain X ?

le Conseil répond non à la majorité absolue.

Le Maire annonce alors que l'on construira donc l'école sur le terrain Y. Un membre du Conseil réclame un vote sur la question suivante

r : doit-on construire l'école sur le terrain Y ?

On rit. Sur son insistance, on passe au vote. Et le résultat est non, à la majorité absolue. Pourtant aucun conseiller ne s'est déjugé et chacun est resté parfaitement cohérent avec lui-même. Que s'est-il donc passé ?

Le Conseil était divisé en trois groupes équivalents de 20 membres chacun. Le point de vue de chacun de ces groupes est résumé dans le tableau suivant :

G1	p+	q+	r-	on doit construire l'école sur le terrain X
G2	p+	q-	r+	on doit construire l'école sur le terrain Y
G3	p-	q-	r-	on ne doit pas construire d'école

Chacune des trois décisions est acquise à la majorité confortable des 2/3. Chacun des membres du Conseil est parfaitement logique avec lui-même. Cependant, l'ensemble des décisions collectives est incohérent.

Le paradoxe de Condorcet.- Cette situation qui surprend beaucoup la première fois qu'on la rencontre a été signalée explicitement par CONDORCET dès 1785. Elle est connue, depuis, sous le nom "d'effet Condorcet". L'illustration qu'en donne CONDORCET est celle d'une Assemblée qui aurait à choisir entre trois candidats A B C. Respectons son orthographe et sa ponctuation savoureuses :

"Supposons, par exemple, 60 votans, dont 23 en faveur de A, 19 en faveur de B & 18 en faveur de C[...] Supposons que [...] les 23 voix pour A soient pour la proposition B vaut mieux que C ; cette proposition aura la pluralité de 42 voix contre 18.

Supposons ensuite que des 19 voix en faveur de B, il y en ait 17 pour C vaut mieux que A, & 2 pour la proposition contradictoire ; cette proposition C vaut mieux que A aura une pluralité de 35 voix contre 25. Supposons enfin que des 18 voix pour C, 10 soient pour la proposition A vaut mieux que B, & 8 pour la proposition contradictoire, nous aurons une pluralité de 33 voix contre 27 en faveur de la proposition A vaut mieux que B. Le système qui obtient la pluralité sera donc composé des trois propositions,

A vaut mieux que B,
C vaut mieux que A,
B vaut mieux que C."

Les préférences individuelles sont cohérentes. Le classement collectif est cyclique !

On pourrait multiplier les exemples. Ce n'est pas nécessaire. Cependant, un jour où je présentais l'exemple du conseil municipal à des étudiants en philosophie, l'un d'eux me dit : "Oui, mais c'est de la politique tout cela". Je lui soumis alors l'exemple suivant.

L'impossible quadrilatère.- Dans un lycée, les membres d'un Club de mathématiques sont convenus d'adopter pour emblème un quadrilatère convexe. Reste à choisir la forme précise. Trois questions sont ainsi successivement posées :

p : voulez-vous avoir quatre côtés égaux ?

q : voulez-vous avoir quatre angles égaux ?

r : voulez-vous avoir un carré ?

Il advient ce que vous pensez. Les réponses viennent, chacune à la majorité absolue,

p+ : on veut quatre côtés égaux.

q+ : on veut quatre angles égaux.

r- : on ne veut pas d'un carré !

L'explication est encore une fois la même. Le Club est composé de trois groupes équivalents. Le premier groupe est partisan d'un losange formé de deux triangles équilatéraux accolés. Le second préférerait un "rectangle d'or". Et le troisième groupe opte pour le carré !

Système (ou procédure) de vote.- Introduisons les notions suivantes afin d'analyser le "paradoxe de Condorcet".

Soit A une assemblée. Chaque partie K de A sera appelée coalition. On posera $K^c = A \setminus K$. Les deux coalitions K et K^c sont dites complémentaires (ou opposées).

On appelera système de vote, pour l'assemblée A, un ensemble E de coalitions de A. Autrement dit, E est une partie de l'ensemble P(A) de toutes les coalitions de A ((i.e.) $E \subset P(A)$). Aux questions posées à l'assemblée, ses membres répondent pour oui ou par non (il n'y a pas d'abstention). Devant un choix X, ils se déterminent soit pour, soit contre. On désigne alors par X+ l'ensemble des membres de l'assemblée qui sont pour X (ceux qui disent oui, le parti des "pour") et par X- l'ensemble des membres qui sont contre X (ceux qui disent non, le parti des "contre"). Les deux coalitions X+ et X- sont évidemment complémentaires.

On dira que l'assemblée adopte le choix X (qu'elle répond oui) lorsque la coalition X+ appartient à l'ensemble E. Et on dira que l'assemblée rejette ce choix X (qu'elle répond non) lorsque la coalition X- appartient à l'ensemble E.

Si l'on veut alors que l'assemblée ne puisse, en même temps et d'un même mouvement, accepter et rejeter un choix, et si l'on veut également que l'assemblée se détermine en toutes circonstances, il faut (et il suffit de) supposer que l'ensemble E satisfait la double condition suivante :

(C1) Pour chaque coalition K de A,

(i) si $K \in E$ alors $K^c \notin E$,

et (ii) si $K \notin E$ alors $K^c \in E$.

Autrement dit,

(C1) $K \in E$ ssi $K^c \notin E$.

Si l'on veut de plus que, devant deux choix consécutifs, l'assemblée ne se déjuge pas, autrement dit, si l'on veut que devant deux choix incompatibles l'assemblée ne puisse adopter les deux à la fois, il faut, et il suffit, que l'ensemble E satisfasse à la condition suivante :

(C2) Pour toutes coalitions K et L de A,

si $K \in E$ et $L \supset K$ alors $L \in E$.

En effet, dire que les choix X et Y sont incompatibles revient à dire que les deux coalitions X+ et Y+ sont disjointes, autrement dit $X+ \subset Y-$ et $Y+ \subset X-$! Si l'assemblée accepte X, elle doit refuser Y ; si elle accepte Y, elle doit refuser X.

Les coalitions $K \in E$ sont appelées les coalitions efficaces, et les coalitions $K \notin E$ les coalitions inefficaces. On peut alors paraphraser les deux conditions C1 et C2 comme suit :

(C1) De deux coalitions complémentaires, une et une seule est efficace.

(C2) Toute coalition qui contient une coalition efficace est elle-même efficace.

La règle de procédure s'énonce alors ainsi : l'opinion qui l'emporte est celle que soutient une coalition efficace.

Remarques.- On observera au passage que la condition C1 entraîne la conséquence suivante : deux membres distincts x et y ne peuvent appartenir à toutes les coalitions efficaces à la fois, puisque, du singleton $\{ x \}$ et de sa complémentaire, une seule des deux coalitions est efficace !

Cette même condition C1 implique qu'il y a autant de coalitions efficaces que de coalitions inefficaces.

Il est bien clair aussi que les conditions C1 et C2 réunies font que l'unanimité est efficace !

(C'est un problème amusant (et pas très simple) d'énumérer les systèmes qui satisfont les conditions C1 et C2 pour une assemblée donnée).

Deux exemples.- L'exemple-type de système de vote est le système majoritaire dans lequel sont efficaces, par définition, les coalitions majoritaires. Autrement dit, les coalitions K qui surpassent en nombre leur complémentaire K^c. Ce système satisfait bien la condition C2. Mais il ne satisfait la condition C1 que pour les assemblées qui comportent un nombre impair de membres car, sinon, on peut se trouver devant le cas de "partage égal des voix" où $|K| = |K^c|$.

Pour une assemblée paire, il y a un moyen très couramment employé pour éviter ce défaut. On adopte le système "majoritaire avec voix prépondérante du président". Dans ce système, on distingue un membre particulier a de l'assemblée ("le président" ou "le doyen d'âge" ou toute autre personne désignée à l'avance) et l'on pose

$$E = \{ K \mid (K \text{ est majoritaire}) \text{ ou } (|K| = |K^c| \text{ et } a \in K)\} .$$

On vérifie, simplement, que ce système satisfait les conditions C1 et C2 (même pour une assemblée impaire !).

On notera au passage que le système suivant satisfait également ces deux conditions

$$E = \{ K \mid (K \text{ est majoritaire}) \text{ ou } (|K| = |K^c| \text{ et } a \in K^c) \} ,$$

même s'il n'est jamais utilisé (sauf peut-être dans certaines cours de récréation lorsque a serait le benjamin d'un groupe de quatre écoliers dont on aurait décidé, par avance et entre les trois grands, que sa voix "compte pour du beurre"). On dit, dans ce cas, que la voix de a est minorée.

L'autre système le mieux connu est le système dictatorial : un membre particulier d de l'assemblée est désigné (ou, plus souvent, se désigne lui-même !) et l'on a

$$E = \{ K \mid d \in K \} .$$

Dans ce système, seules sont efficaces les coalitions qui partagent l'opinion du dictateur d ! Et le système satisfait les conditions C1 et C2 !

On remarquera que le singleton $\{d\}$ est alors "la plus petite" des coalitions efficaces, dans le sens suivant : elle est efficace et contenue dans toute autre coalition efficace.

On observera de même, et réciproquement, qu'un système de vote E qui possède une plus petite coalition efficace et satisfait les conditions C1 et C2 est nécessairement dictatorial. En effet, cette plus petite coalition efficace ne peut être qu'un singleton, en vertu de l'une des remarques déjà faites auparavant.

On se divertira enfin (peut-être) à considérer que, pour une assemblée paire formée de deux membres seulement (une sorte de ménage !), système majoritaire "avec voix prépondérante", système majoritaire "avec voix minorée", et système dictatorial se confondent !

Comment éviter le paradoxe de Condorcet ? - On a vu comment le système majoritaire peut produire "l'effet Condorcet". On observera qu'il suffit de trois personnes pour obtenir un effet Condorcet mais il y faut au moins trois questions. Un calcul relativement simple montre que, pour une assemblée de trois personnes, et en supposant l'équirépartition des opinions, la probabilité de se trouver dans une situation à la Condorcet dans une élection entre trois candidats est égale à 1/18, soit un peu plus de 5,5 % des cas. Cette probabilité augmente évidemment avec le nombre de votants. Nous reviendrons sur ces probabilités un peu plus tard.

Pour les systèmes de vote tels que nous les avons envisagés (systèmes simples, sans droit de veto, avec une règle de procédure unique non évolutive, des membres qui ne changent pas d'avis et restent "cohérents" dans leurs décisions, choix, réponses et préférences) la première condition C1 assure la cohérence de la décision collective au niveau d'une seule question posée, d'un seul choix binaire. La condition C2, jointe à la première, assure la cohérence collective au niveau de deux questions posées, de deux choix binaires consécutifs (liés ou non !) Mais que faut-il ajouter afin d'assurer la cohérence au niveau de trois questions, ou davantage ? comment éviter le paradoxe de Condorcet ?

La réponse est simple, la même à toutes ces interrogations : il faut et il suffit que l'intersection de deux coalitions efficaces soit toujours elle-même efficace.

Lemme.- Soit E un système satisfaisant aux conditions C1 et C2. Pour éviter l'effet Condorcet, il faut et il suffit que le système possède aussi la propriété suivante :

(C3) si $K \in E$ et $L \in E$ alors $K \cap L \in E$.

En effet, si K et L appartiennent à E et si, cependant, $H = K \cap L$ n'appartienait pas à E, on se trouverait dans une situation bien connue en théorie des jeux. On pourrait imaginer une série de trois questions p , q et r telles que une réponse positive aux deux premières implique une réponse positive à la troisième et de sorte que l'on ait $p+ = K$ $q+ = L$ et $r+ = H$. Trois questions du genre suivant :

p : voulez-vous que le gros lot revienne à un membre du groupe K ?

q : voulez-vous que le gros lot revienne à un membre du groupe L ?

r : voulez-vous que le gros lot revienne à un membre du groupe H ?

Réciproquement, si la condition C3 est satisfaite, alors aucune décision incohérente de l'assemblée n'est possible puisqu'il y aura toujours au moins un membre de l'assemblée qui appartient à toutes les coalitions qui ont imposé ces décisions, qu'il les aura donc toutes entérinées, et que cet individu est, par hypothèse, logique avec lui-même.

Hélas ! Et cette dernière démonstration nous le laissait un peu pressentir.

Théorème de ARROW (version faible).- Tout système qui satisfait à la fois les conditions C1, C2 et C3 est dictatorial !

En effet : soit M l'intersection de toutes les coalitions efficaces. Par récurrence, c'est une coalition efficace (condition C3). Elle est donc la plus petite des coalitions efficaces !

L'impasse et l'issue.- Nous sommes dans l'impasse. Pour en sortir, on pourrait élaborer, et on l'a fait, toutes sortes de systèmes moins rudimentaires que les nôtres. Mais le théorème de Arrow semble présenter un certain caractère de robustesse et, bien entendu, il s'applique aussi à ces systèmes beaucoup plus complexes. En un mot, la difficulté est telle qu'il ne suffira, sans doute, pas de souffler dessus pour la faire tomber. Aussi, n'était-ce pas notre propos en esquissant ainsi le parcours de Condorcet à Arrow.

(Le noeud est solide. Il mérite mieux qu'une attention amusée. Y concourent, tout à la fois, la politique bien entendu ! mais également la sociologie, la psychologie, l'économie,..., et les mathématiques.)

Que faire ? contre le théorème de ARROW. Ah ! Nous allions presque oublier de le dire : ce résultat suppose que l'Assemblée A est <u>finie</u> !

Pour une assemblée infinie, par contre...

<u>Les ultrafiltres.</u>- Pour une assemblée <u>infinie</u> par contre, tout ultrafiltre non trivial U est un système non dictatorial qui satisfait aux conditions C1, C2 et C3.

On le sait, c'est Henri CARTAN qui a introduit les ultrafiltres en 1937 : un ultrafiltre est un filtre maximal. Ce sont des objets situés au grand carrefour de presque tous les chapitres de la mathématique (théorie des ensembles, algèbre, topologie, analyse, logique, probabilités). De ce fait, ils sont susceptibles de présentations, illustrations et interprétations très nombreuses et variées.

Une manière de définir les ultrafiltres est la suivante :
un ultrafiltre sur l'ensemble A est un ensemble U non vide de parties non vides de A qui possède les deux propriétés que voici :

pour toutes parties K et L de A

$K \cap L \in U$ <u>ssi</u> $K \in U$ et $L \in U$

$K \cup L \in U$ <u>ssi</u> $K \in U$ ou $L \in U$.

On vérifie sans peine qu'un système de vote pour A, satisfaisant à C1, C2 et C3, n'est autre qu'un ultrafiltre sur A. Cela procure encore un habit aux ultrafiltres.

La version (très) faible du théorème de Arrow mentionnée ci-dessus traduit simplement le fait bien connu suivant : sur un ensemble fini, tout ultrafiltre est trivial !

"La vérité en mathématiques ne se décide pas à coups de votes".- Cette phrase de bon sens manque rarement d'être lancée, au moins une fois, au cours de chacune des nombreuses réunions auxquelles nous sommes, de plus en plus souvent, conviés dans nos Départements et au moment où le débat commence à produire ses arguments les plus spécieux.

Eh ! bien, essayons tout de même. Ceux qui savent et m'ont suivi jusqu'ici auront déjà compris ! Faisons des mathématiques en faisant voter l'ensemble d'individus I, suivant le système de vote U.

Autrement dit, considérons un ensemble I d'indices et un ultrafiltre U sur I.

Ultrapuissances.- Considérons également un ensemble X quelconque et demandons à chacun des individus i de l'assemblée I de choisir un élément x_i de l'ensemble X. On obtient ainsi une famille $x = (x_i)_{i \in I}$ d'éléments de X indexés par I et qui constitue, en quelque sorte, la collection des choix individuels des membres de l'assemblée. Mais quel est alors le choix collectif de l'assemblée I suivant le système de vote U ?

S'il existe un élément e bien déterminé de X pour lequel une coalition efficace a opté, on n'hésitera pas à considérer que cet élément représente le choix collectif de l'assemblée puisque le vote le désigne comme élu. Autrement dit, si l'ensemble $\{ i \in I \mid x_i = e \}$ appartient à l'ultrafiltre U, il est légitime de dire que $x = e$ (modulo U).

Plus généralement, si l'assemblée procède à deux choix consécutifs $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$, on dira que ces deux choix sont les mêmes lorsqu'il y a une coalition efficace pour en juger ainsi, autrement dit, lorsque la coalition $\{ i \in I \mid x_i = y_i \}$ appartient à U. On dira alors que x = y (modulo U).

On aura reconnu sans détour la notion d'ultrapuissance. En effet, l'ensemble ainsi défini de tous les "choix collectifs" de l'assemblée n'est autre, on le voit, que l'ultrapuissance X^I/U de X suivant l'ultrafiltre U.

A la notion d'ultrapuissance, on associe généralement le nom de ŁOŚ et la date de 1955, voire 1949, ainsi que le nom de SKOLEM et les années 1930. (Notons en passant qu'il n'a échappé à personne que cette notion est, si l'on peut dire, en germe dans la notion.....de germe de fonction, bien connue des géomètres et analystes.)

Qu'arrive-t-il cependant si, pour une collection donnée $x = (x_i)$ de choix individuels, il n'existe aucun élément e bien déterminé de X pour lequel on ait x = e (modulo U) ? Et cela risque fatalement de se produire dès que l'ultrafiltre U n'est pas trivial et que l'ensemble X est infini. Eh ! bien, on dira, simplement, que x (modulo U) <u>est</u> le choix collectif de l'assemblée. On aura donc crée ainsi un objet irréel <u>ad hoc</u>, le prix à payer pour éviter la dictature et l'incohérence, <u>nunc.</u>

<u>Ultraproduits.</u>- Plus généralement encore, si chaque individu i choisit un ensemble X_i quelconque, pour commencer, puis borne ses propres choix aux éléments de cet ensemble, les choix collectifs sont représentés (modulo U) par les familles $(x_i)_{i \in I}$ où $x_i \in X_i$ pour chacun des individus i.

Ce n'est rien d'autre que l'ultraproduit, $\prod X_i/U$, suivant U.

Par ses votes, l'assemblée pourra ainsi s'occuper de toutes sortes d'objets mathématiques et faire des ultraproduits de groupes, de corps, d'espaces de Banach, de fonctions analytiques, que sais-je encore.......

Parmi les choix collectifs de l'assemblée, il y aura ceux qui sont classiques ou "réels", et ceux qui sont fictifs, qui ne sont donc que "des façons de parler" (afin de taire les dissensions !) Mais avec ces façons de parler on peut justement discourir, et essayer de dire le vrai et le faux.

Pour savoir si une proposition est vraie ou fausse, on fera voter l'assemblée suivant le système U. Et cela réussit au-delà de toute espérance.

Le langage.- Pour être plus précis, les propositions que l'on soumet à l'assemblée sont énoncées dans le langage "du premier ordre avec égalité" et le prédicat binaire d'appartenance d'une théorie des ensembles. On s'adresse à elle dans la langue $L(\neg, \vee, \exists, =, \in)$ qui possède les trois symboles logiques

$\neg$ (non) $\qquad\qquad$ $\vee$ (ou) $\qquad\qquad$ $\exists$ (il existe)

(deux connecteurs et un quantificateur) ainsi que les deux symboles

$=$ (égalité) $\qquad\qquad$ et $\qquad\qquad$ $\in$ (appartenance).

En tout (outre la ponctuation et les variables) cinq symboles !

Pour plus de commodité, on introduit des abréviations courantes, dont

$\wedge$ (et) $\qquad$ $\longrightarrow$ $\qquad$ (implication) $\qquad$ $\forall$ (pour tout).

Ainsi, par exemple, l'assemblée comprend parfaitement quand on lui dit $(\forall x)\neg(x \in X)$ qu'il est question de l'ensemble vide.

La vérité selon U.- Soit $P(x,\ldots,y)$ un énoncé du langage convenu et où $x = (x_i),\ldots,\ y = (y_i)$ représentent des choix de l'assemblée.

Désignons par $V(P;x,\ldots,y)$, ou plus simplement $V(P)$ lorsque le risque de confusion est minime, la coalition "des individus qui estiment que cet énoncé est satisfaisant, de leur point de vue", autrement dit, posons

$$V(P) = V(P;x,\ldots,y) = \{\, i \in I \mid \text{l'énoncé } P(x_i,\ldots,y_i) \text{ est vrai} \,\} .$$

Cette coalition peut être efficace ou inefficace. Si elle est efficace, on dira que $P(x,...y)$ est vrai selon U. Dans le cas contraire, on dira que $P(x,...,y)$ est faux selon U, bien entendu.

Par exemple, pour la proposition $P(x,y)$ qui s'énoncerait " $x = y$ ", on a $V(P;x,y) = \{ i \in I \mid x_i = y_i \}$. C'est une coalition familière que nous avons déjà rencontrée ! Et il s'ensuit que les deux expressions

(1) $x = y$ (modulo U)

et

(2) la proposition " $x = y$ " est vraie selon U ,

ont exactement le même sens. (Il faut bien reconnaître que tout a été fait pour cela !)

De même, pour la proposition $Q(x,X)$ qui s'exprimerait dans le langage de l'assemblée par " $x \in X$ " , on a

$$V(Q;x,X) = \{ i \in I \mid x_i \in X_i \}$$

Ainsi cette proposition $Q(x,X)$ est vraie selon U <u>ssi</u> une "majorité", pardon, une coalition efficace d'individus i, a fait ses choix x_i dans X_i.
On dira encore que $x \in X$ (modulo U).

On vient de donner ainsi une signification précise aux deux prédicats = et $\in$, dans le monde fictif des choix collectifs, et qui déborde largement le sens habituel. Elle ne fait que déborder, seulement, car elle coïncide avec ce sens habituel pour tous les objets réels !

Quel rapport entre la vérité selon U et la vérité dans notre monde fictif ? Ce sont une seule et même chose. Tel est le résultat le plus important.

<u>Lemme fondamental.</u>- L'énoncé $P(x,....,y)$ est vrai <u>ssi</u> une coalition efficace en décide ainsi.

Autrement dit, $P(x,...,y)$ est vrai du monde fictif si et seulement si $P(x,...,y)$ est vrai selon U.

Ce lemme mériterait à peine une démonstration tant le langage emporte la conviction ! De fait, la démonstration paraît si simple. Elle se fait par récurrence "sur la complexité" des énoncés. En voici une large esquisse servant d'illustration.

1) <u>Si l'énoncé P ne comporte que</u> l'un ou l'autre des symboles $=$ ou $\in$, mais aucun des symboles logiques ($\neg$, $\vee$, $\exists$) : le résultat découle alors des définitions, de la signification même de ces prédicats dans le monde fictif.

2) <u>Si l'énoncé P est de la forme (non Q)</u> : on suppose le lemme établi pour Q puis l'on remarque que $V(\text{non } Q)$ et $V(Q)$ sont deux coalitions complémentaires !

3) <u>Si l'énoncé P est de la forme (R ou S)</u> : on suppose de même que le lemme est établi pour chacun des énoncés R et S, puis on remarque que $V(R \text{ ou } S) = V(R) \cup V(S)$.

4) <u>Enfin, si $P(x,...,y)$ est de la forme (il existe z) $T(z,x...,y)$</u> : alors pour tout choix collectif $c = (c_i)$, on a

$$W = V(P;x,...,y) \supset V(T;c,x,...,y).$$

En effet : si l'individu i appartient à la coalition $V(T;c,x...,y)$ c'est que, de son point de vue, l'énoncé $T(c,x...,y)$ est satisfaisant, autrement dit, que l'énoncé $T(c_i,x_i,...,y_i)$ est vrai (dans le monde réel !) et donc l'énoncé (il existe z) $T(z,x_i,...,y_i)$ est également vrai, ce qui veut dire que l'énoncé $P(x_i,...,y_i)$ est vrai, et donc que i appartient à W.

On suppose alors que le lemme est établi pour l'énoncé T (et quels que soient les choix qui y interviennent). Puis on raisonne comme suit.

(i) L'énoncé $P(x,...,y)$ est vrai <u>ssi</u> il existe un choix collectif $c = (c_i)$ pour lequel $T(c,x,...,y)$ est vrai, ce qui entraîne que $V(T;c,x,...,y)$ est une coalition efficace, donc que $W = V(P;x,...,y)$ est efficace !

(ii) Réciproquement, pour chaque i appartenant à W, il existe au moins un choix individuel c_i pour lequel $T(c_i,x_i,\ldots,y_i)$ est vrai. On définit alors un choix collectif c en complétant arbitrairement (on voit bien que cela importe peu) par $c_i = 0$ par exemple, pour tout individu i n'appartenant pas à W. On a ainsi $W \subset V(T;c,x,\ldots,y)$ pour ce choix c. De sorte que, si W est efficace, alors $V(T;c,x,\ldots,y)$ est également efficace ce qui implique (hypothèse de la récurrence !) que $T(c,x,\ldots,y)$ est vrai et cela entraîne que l'énoncé (il existe z) $T(z,x,\ldots,y)$ est vrai, ce qui veut dire, justement, que $P(x,\ldots,y)$ est vrai.

Observons à nouveau la toute dernière partie de la démonstration précédente. Si l'unanimité, ou simplement une coalition efficace, se satisfait d'un même objet classique, réel, e pour approuver l'énoncé $T(e,x..;,y)$, il n'y a guère d'hésitation à le désigner comme choix de la collectivité. Sinon, on crée l'objet c nouveau, fictif ("nonstandard") qui va représenter le choix collectif. Un objet idéal. Mais les mathématiciens, depuis longtemps, manient les "idéaux" sous des formes multiples et diverses (Kummer, points à l'infini, nombres imaginaires,... la liste est inépuisable).

Le théorème de transfert n'est plus qu'un corollaire immédiat de ce lemme fondamental.

Théorème de transfert.- Un énoncé classique est vrai ssi l'assemblée décide qu'il est vrai.

En effet, pour un énoncé $P(a,\ldots,b)$ classique (où les objets $a,\ldots,b$ sont bien réels et qui serait vrai, la coalition $V(P)$ est unanimité. Et le lemme nous assure de la réciproque.

Appliqué aux énoncés de la forme (non P) , ce résultat dit aussi, assurément, qu'un énoncé classique est faux ssi l'assemblée en décide ainsi.

L'écho.- A présent, voici, l'écho nous revient : "On peut, parfaitement bien, décider par vote si un théorème est vrai ou faux. Essayez !" (à condition, bien entendu, de respecter l'élémentaire honnêteté, de fuir la duplicité).

On l'a dit, parmi les choix collectifs, il y_a ceux qui sont classiques et correspondent à des objets réels, et ceux qui sont fictifs, qui ne sont que "façons de parler". Cependant, si par ce détour, on arrive à "voter" un énoncé classique alors on est assuré que cet énoncé est classiquement vrai. C'est l'essence même des méthodes infinitésimales rénovées, alias analyse nonstandard.

L'Assemblée choisit un "nombre réel" $r = (r_i)$. Ce nombre est infinitésimal si, quel que soit le jalon rationnel classique non nul j sur la droite réelle, il existe une coalition efficace qui juge que r est encore plus près de 0 que le jalon j. A chaque jalon une coalition différente, peut-être, mais l'Assemblée a donc "finalement" décidé que r est "aussi près de 0 qu'on le voudra". Et l'Assemblée est souveraine !

Par ce biais, et même si à chaque étape on ne réunit pas l'unanimité, on retrouve cette unanimité devant les énoncés portant uniquement sur les objets classiques. Ce cheminement "souterrain" de la pensée est exactement semblable à la procédure qui, au travers de quantités imaginaires, ramène à des identités réelles (les formules de Cardan ! les formules de Moivre !). On évoquera sans doute aussi, la permanence des identités par prolongement analytique et la monodromie.
Le passage par la fiction n'altère en rien la réalité dès que celle-ci réapparaît.

Compliquons.- Imaginons plusieurs assemblées I_p munies, chacune, d'un système de vote représenté par un ultrafiltre U_p. Chaque assemblée délibère et se détermine indépendamment des autres. Pour dégager une décision commune à toutes ces assemblées, on convient de recourir à un système de vote "de synthèse" défini par un ultrafiltre U, sur l'ensemble G des indices p, c'est-à-dire le grand rassemblement des porte-parole respectifs p de ces assemblées. On procède donc comme suit : pour une question donnée, la réponse collective de la famille d'assemblées est oui lorsque l'ensemble des p pour lesquels l'assemblée I_p a dit oui est une coalition efficace de l'assemblée G, autrement dit, appartient à U.

C'est le type-même des procédures de vote à deux degrés (rappelant les élections sénatoriales en France).

Simplifions.- Un instant de réflexion permet de voir que l'on peut faire l'économie d'un degré dans cette procédure. On considère la réunion I de toutes les assemblées I_p et on définit l'ensemble S des coalitions efficaces de l'assemblée I par la règle suivante : la coalition K est efficace dans I lorsque $\{ p \in G \mid K \cap I_p \in U_p \} \in U$.

Ce système à un degré est équivalent au système à deux degrés. (Cela sous-entend, en réalité, deux choses : 1) si un individu i appartenait à deux ou plusieurs assemblées I_p différentes, ses choix seraient toujours les mêmes dans chacune de ces assemblées, et 2) les porte-parole se conforment aux mandats impératifs des assemblées qui les délèguent).

L'ultrafiltre S défini sur l'ensemble I, par ce système, est la somme ultrafiltrée suivant U de la famille d'ultrafiltres U_p, une notion introduite explicitement par GRIMEISEN en 1960 dans des questions de topologie générale.

Itérons.- Il nous vient naturellement alors l'idée suivante. Une assemblée I, régie par une constitution ou système de vote U, crée par ses choix, on l'a vu, tout un monde d'objets fictifs nouveaux (mathématiques ... ou autres !) Envisageons une seconde assemblée J, régie par un ultrafiltre V, et qui porte son regard sur ce monde nouveau de l'assemblée I (ce nouveau monde qui contient déjà le monde réel, bien entendu !) et dont elle fait sa seule proéccupation.

L'idée n'est pas folle. (On pensera inévitablement à la juridiction de deuxième instance en France.) Comme ci-dessus, un instant de réflexion (à peine plus long) nous permet de constater que, là encore, la simplification opère.

Le rôle global de ces deux assemblées superposées peut aisément être dévolu à l'unique assemblée $I \times J$ de tous les couples (i,j), avec la règle suivante : une coalition K de $I \times J$ est efficace lorsque la coalition L de tous les individus j de J pour lesquels l'ensemble

$$K(j) = \{ i \in I \mid (i,j) \in K \}$$

appartient à U, appartient elle-même à V.

L'ultrafiltre W des coalitions efficaces ainsi défini sur l'ensemble produit $I \times J$, est le produit ordinal de l'ultrafiltre U par l'ultrafiltre V, (leurs rôles ne sont évidemment pas symétriques). Cette opération, on le sait, se ramène à une somme ultrafiltrée, par une "décomposition" de l'assemblée $I \times J$ en ses sous-assemblées "horizontales" $I_j = \{(i,j) \mid i \in I\}$.

Autrement dit, on fait voter "J fois" l'assemblée I, et tout individu i peut varier ses choix, à chacun des votes, comme il l'entend.

Le monde produit par la superposition des deux assemblées I et J est identique au monde de l'assemblée-produit $I \times J$. Toujours rien de nouveau.

On peut poursuivre la métaphore très loin . Renvoyons cela à une Annexe. Ne lassons pas ceux qui savent.

Ultralimites.- Juste un mot, cependant, pour dire encore ceci : L'ultralimite correspond à la superposition d'une suite infinie d'assemblées, superposition "potentielle" et non "actuelle". Curieusement, ici, la réduction à une assemblée unique n'est plus de mise !

Trois amis.- Avant de conclure, jetons un coup d'oeil à deux images.

Il suffit de trois personnes pour obtenir un effet Condorcet, on l'a dit. Trois amis, x, y, z, décident d'aller au cinéma. Ils ont le choix entre trois films, a, b, c. Leurs préférences s'ordonnent ainsi : x aimerait mieux voir a que b, et b que c ; pour y c'est b mieux que c, et c mieux que a ; pour z, enfin, ce sera c plus que a, et a plus que b. En procédant par votes, comparant les films deux à deux, les trois amis auront tôt fait de se retrouver devant le classement circulaire : a plus que b plus que c plus que a. Belle miniature de l'effet Condorcet. Là, heureusement, la situation n'est pas si grave. On sait comment cela finira. Le plus persuasif, le plus charmeur des trois l'emporte. Et si un classement circulaire se reproduit ainsi dans 5,5 % des cas, nul ne s'en inquiétera. Si la fréquence en est encore nettement plus faible, c'est que l'amitié se double, ici, d'une communauté de penchants. Si elle est beaucoup plus grande, les goûts sont vraiment bien tranchés.

Triumvirat.- Qu'on se représente, par contre, un triumvirat. Quelle garantie de cohérence dans la cascade des décisions ? Quel jeu de bascule entre les trois seules coalitions possibles hors l'unanimité ! Quelle tentation, pour un triumvir ? de rompre l'enchaînement des trois figures !

On a songé parfois à mesurer "la cohésion d'une communauté" en proportions inverses de la distortion entre fréquences réelles et probabilités théoriques des situations à la Condorcet. A établir une typologie suivant les diverses configurations des coalitions. L'idée est séduisante. (Voir la Postface).

Condorcet et les ultrafiltres.- On risque peu d'être démenti en pensant que le Marquis de Condorcet ignorait tout des ultrafiltres. De même, il est vraisemblable que Monsieur Henri Cartan songeait plus, en les inventant, "à formuler la notion de limite dans toute sa généralité", qu'à éviter le paradoxe du Marquis.

Condorcet et les ultrafiltres. La rencontre était cependant inévitable. Elle doit moins au hasard qu'à la nécessité !

La métaphore qui en découle, permet, on l'a vu, à tout profane d'entrer dans la chapelle du nonstandard sans initiation préalable.

Une métaphore c'est proprement un transport, un transfert de sens. Cela peut mener loin...

POSTFACE

Me permettra-t-on d'adjoindre au texte précédent (forme élaborée de mon exposé oral) les courtes réflexions suivantes, au ton plus personnel.

Le paradoxe de Condorcet, à lui seul, ne permet sans doute pas de donner une description complète de l'entière réalité polémique, "conflictuelle", du monde. Il n'en restera pas moins, quoi que l'on fasse, l'une des structures essentielles.

La cohésion.- L'idée de mesurer abstraitement la cohésion d'une collectivité à l'aide de la fréquence des situations à la Condorcet est séduisante. J'ai cependant vu peu de textes la mettant en pratique. L'étude du phénomène concret, sur des communautés réelles particulières, est sans doute ardue. Se serait-elle si peu développée ? Je n'ai pas su chercher. Le sujet mérite pourtant qu'on s'y intéresse.

Pour les sociétés humaines, il faudra sans doute apprendre à s'accommoder de l'effet Condorcet. Il est cependant curieux d'en entendre si peu souvent, et si discrètement, parler. On ne peut se défendre, parfois, de l'impression que ceux qui savent se gardent bien d'alerter ceux qui ne savent pas encore.

L'intérêt général.- Mon premier contact avec le paradoxe de Condorcet fut à travers un texte, éblouissant, de GUILBAUD, au titre explicite : "Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation". Je ne manque jamais d'en recommander la lecture aux étudiants de Clermont, philosophes débutants qui suivent mon cours destiné à leur initiation aux mathématiques.

En leur exposant le paradoxe, il m'arrive parfois de réfléchir tout haut :
Le Maire de la commune, s'il advenait qu'il apprenne l'existence du phénomène, ne s'aviserait-il pas d'en tirer profit et, en intervertissant l'ordre des questions

(q et r) à sa convenance, faire finalement bâtir l'école sur le terrain de son choix ?

Qui, contemplant l'Histoire, même distraitement, jurerait qu'il n'en fût jamais ainsi ? Dans quelque grande circonstance !
(Bien entendu, disant cela, je ne cherche à encourager nulle vocation politicienne, mais à éveiller leur curiosité !)

Le problème de l'intérêt général, ou de l'opinion moyenne, outre ses composantes politiques, sociales, économiques, psychologiques, juridiques, logiques, etc...
et sa face mathématique, a certainement un aspect philosophique. Je sais bien.... "cordonnier, pas plus haut que la chaussure". Mais le paradoxe de Condorcet ne restera-t-il pas toujours un noeud serré au coeur-même de la recherche de l'intérêt général ?

La théorie des jeux nous l'enseigne. Deux joueurs complètement informés ont toujours, théoriquement, un lieu de repos où se retrancher. A partir de trois joueurs, aucun repli possible, les parties s'animent, les jeux deviennent dangereux.

<u>De Clermont à Aubière.</u>- Dans le même temps où je fais ce cours aux apprentis philosophes de Clermont, j'initie, sur le plateau d'Aubière, de futurs mathématiciens dans le courant de leur troisième cycle d'études, à la théorie moderne des infinitésimaux. Les ultrafiltres m'ont toujours fasciné. J'introduis l'analyse nonstandard par les ultrapuissances.

Sur le chemin de Clermont à Aubière, s'est fait clairement, un jour, pour moi, le lien entre Condorcet et les ultrafiltres et, partant, l'analyse nonstandard.

Après mon exposé à Luminy, l'un des participants, Monsieur van den Berg, m'apprit (sans autre détail) qu'il avait déjà entendu F. Wattenberg avoir recours à la comparaison "électorale" en parlant d'analyse nonstandard (à Oberwolfach, si j'ai bien saisi).

Que l'idée dût également en venir à d'autres, ne m'étonne guère (c'est le contraire qui m'eût surpris) tant elle est naturelle, aisée, inévitable.

Tempête sous un crâne.- Il est un aspect, et non des moindres, du paradoxe de Condorcet dont il convient de dire deux mots.

Chacun de nous, parfois, éprouve l'embarras du choix, la difficulté de décider, et un malaise à se résoudre.

Pour des raisons inexpliquées, invitée au bal, telle jeune fille se trouvera dans la situation de préférer Armand à Bernard, et Bernard à Constant, mais Constant à Armand !

On délibère souvent avec soi-même. Et si l'on arrive à des réponses par oui ou par non (la tyrannique dichotomie), n'est-ce pas sans doute que l'action nous y accule ? Et si nous évitons généralement la circularité dans nos classements, c'est que la coutume probablement nous y pousse (tout comme elle répugne aux classements partiels ou incomplets).

Nos délibérations intérieures, selon les cas, ressembleront à celles des trois amis... ou celles de triumvirs. Elles porteront sur deux ou trois critères, ou davantage encore, de même importance. Si l'un de ces critères, toujours le même, emporte la décision, point d'effet Condorcet à craindre (si ce critère est "rationnel", du moins). Si, par contre, au gré de nos hésitations, les coalitions entre critères se font et se défont, qui s'étonnera de ses propres contradictions. (Mesurera-t-on même, peut-être, sa cohérence interne au taux de ses contradictions ?)

Un, deux, ou plusieurs critères. Plusieurs ? Innombrables peut-être ! Et nous (mathématiciens) sommes bien placés pour savoir que les paramètres cachés peuvent être infiment nombreux ! Alors, pourquoi ne pas mettre un ultrafiltre sur ces critères ! (Boutade, bien sûr ! Jouons encore un instant sur les mots :

un ultrafiltre non trivial, cela implique un choix initial important ! un choix dans la manière de Zorn ou Zermelo ! ou, à tout le moins, une sorte d'idéal.... "booléen" premier !)

<u>L'importance d'être métaphorique.</u>- On le sait, le cheminement souterrain de la pensée emprunte souvent la métaphore et la métonymie. L'activité consciente aussi.

Qui n'a lu les fortes pages que Denjoy consacre à Lebesgue dans "Hommes formes et le nombre". Qui ne connaît la puissante métaphore dont il use, ailleurs, parlant de la totalisation. Qui n'en pourrait citer dix autres, tout aussi célèbres, dans l'histoire des mathématiques.

Et de Poincaré à Hadamard, ceux qui ont si bien parlé de l'invention en mathématiques, et plus près de nous, nos maîtres, mathématiciens autant que poètes, nous ont souvent présenté les plus belles images pour illustrer leurs propos.

Et, pour qui douterait du pouvoir évocateur des mots, il n'est que de se souvenir de la controverse mineure qui oppose, un moment, Lebesgue à Denjoy (justement) au sujet du "presque partout". Ce dernier lançant finalement, comme à la cantonade : "Je maintiens qu'un mathématicien s'accoutumant, comme le font aujourd'hui la plupart des analystes, à nommer "densité" ce que j'appelle "épaisseur", rencontrera des difficultés insurmontables à comprendre la théorie topologique des fonctions". ("Leçons sur le calcul des coefficients....", page 224).

Sur un fonds commun, nous prélevons, chacun, nos images propres. Chacun a ses préférées. Il en est même de sonores. Et tel aimera mieux l'image géométrique, tandis que tel autre la goûtera davantage numérisée !

Les points de vue sur l'analyse nonstandard sont, à présent, divers et variés.

Pour un théoricien des modèles, on le sait, ce sera un chapitre intéressant dans l'application du théorème de compacité.

Pour Cartier, il n'y a guère, au Séminaire Bourbaki de novembre 1981, le bel habit probabiliste de l'ultrafiltre aidera à déguiser les objets de l'univers en variables aléatoires !

Pour ... J'arrête ici la liste qui s'allonge et que tout le monde, à présent, connaît.

Une multitude de regards posés sur le même objet !

Et si l'on peut associer les infinitésimaux à la résolution des conflits, j'y verrai pour ma part, plus qu'une rencontre fortuite, un enrichissement de plus (même infime) de notre imaginaire, une petite "gerbe d'images".

BIBLIOGRAPHIE

ARROW, K. J., Social choice and individual values, John Wiley & Sons, New York, 1963.

CARTAN, H., Théorie des filtres, C.R. Acad. Sc. Paris, 205 (1937) 595-598 ; Filtres et ultrafiltres, ibid. 777-779.

CONDORCET (Marquis de), Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix, Imprimerie Royale, Paris, 1785. (L'ouvrage a été réédité par reproduction photographique, par Chelsea Publishing Company, 1972.)

GRIMEISEN, G., Gefilterte Summation von Filtern und iterierte Grenzprozesse. I, Math. Ann., 141 (1960) 318-342 ; et II, ibid. 144 (1961) 386-417.

GUILBAUD, G. Th., Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation, Economie appliquée, 5 (1952) n°4, oct.-déc., 501-551. (L'article est repris dans le livre suivant et dont il constitue le chapitre II : Eléments de la théorie mathématique des jeux, Monographies de recherche opérationnelle, n°9, Collection dirigée par G. Morlat, AFIRO, Dunod, Paris, 1968.)

ŁOŚ, J., Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres, in Mathematical Interpretation of Formal Systems, Amsterdam, 1955 ; p. 98-113

Université de Clermont II

Département de mathématiques pures

B.P. 45

63170 AUBIERE, FRANCE