SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE
ET MATHÉMATIQUES

JEAN DIEUDONNÉ

Fractions continuées et polynômes orthogonaux dans l'œuvre de Laguerre

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1984, fascicule 9
« Un mathématicien oublié : Laguerre », , p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1984___9_A1_0>

FRACTIONS CONTINUEES ET POLYNOMES ORTHOGONAUX

dans l'OEUVRE de LAGUERRE

A. La vie et l'oeuvre de Laguerre.

Nous commémorons aujourd'hui le 150° anniversaire de la naissance en cette ville du mathématicien français Edmond Laguerre. A beaucoup d'égard, c'est un mathématicien hors du commun, et il mérite d'être mieux connu. En premier lieu, ce n'était pas un "professionnel" au sens où nous l'entendons ; il a peu et tardivement enseigné. Au XIX^{e} siècle, un amateur pouvait encore apporter des contributions notables aux mathématiques ; en France, on compte ainsi, avec Laguerre, tout un groupe d'anciens polytechniciens : P. Laurent, E. Bour Brocard et Ribaucour, qui furent officiers ou ingénieurs pendant tout ou partie de leur carrière. Parmi eux, Laguerre est certainement celui qui a laissé l'oeuvre la plus abondante (140 articles environ) et la plus originale. Il resta dans l'armée jusqu'en 1864, date à laquelle il démissionna et fut appelé comme répétiteur à l'Ecole Polytechnique, où 10 ans plus tard il devint examinateur. Sa santé avait toujours été fragile, et il mourut jeune, en 1886, 3 ans à peine après son élection à l'Académie des Sciences.

Une autre caractéristique de Laguerre est la variété des sujets auxquels il s'est intéressé. Sans doute, la plus grande partie de son oeuvre est consacrée à la géométrie projective, différentielle ou algébrique (à l'époque on ne faisait guère de différence) ; c'est cette partie que ses contemporains et lui-même estimaient la plus importante, et il y consacre les 2/3 de la Notice sur ses travaux qu'il rédigea en vue de sa candidature à l'Académie. Son originalité dans ce domaine s'était d'ailleurs manifestée très tôt, puisque c'est alors qu'il était encore élève de Mathématiques spéciales qu'il découvrit en 1853 la relation entre l'angle de deux droites du plan et le birapport de ces droites et des droites isotropes. Si, après cette première Note, il ne publia plus rien jusqu'en 1865, il avait certainement dans l'intervalle accumulé de nombreux résultats, comme le montre la cadence rapide de ses publications dans les années qui suivirent.

Il s'intéresse principalement, comme tous ses contemporains, aux courbes et surfaces algébriques de bas degré, aux courbes et surfaces anallagmatiques (c'est-à-dire invariantes par une inversion, comme l'intersection d'une sphère et d'un cône), aux foyers et focales, ainsi qu'aux relations entre courbes algébriques et intégrales abéliennes ; les propriétés qu'il découvre se distiguent toujours par leur caractère imprévu et leur élégance. Sa contribution la plus originale en Géométrie est sans doute ce qu'il a appelé la "Géométrie de direction" : dans le plan, les droites et les cercles sont en quelque sorte "dédoublée" suivant leur orientation (pour les droites, c'est le premier germe de l'idée qui a conduit, à l'époque moderne, à la considération des grassmanniennes de variétés linéaires orientées ; Laguerre avait d'ailleurs déjà pensé à étendre ses idées à la géométrie à 3 dimensions). En liaison avec cette théorie, il découvrit un nouveau type de transformation géométrique, opérant sur les droites orientées du plan, qu'il envisage comme "duale" de l'inversion.

Sur les 47 pages de la Notice sur ses travaux, Laguerre n'en a consacré que 15 à ses mémoires d'Algèbre et d'Analyse ; mais ce sont ceux que la postérité a le plus appréciés, et qui ont eu le plus de prolongements. En fait, Laguerre n'est pas vraiment un algébriste, mais s'intéresse par exemple aux polynômes en analyste, comme à des fonctions entières particulières d'une variable complexe, et pour en découvrir des propriétés de nature analytique (telles que la position des zéros, ou les propriétés de limites de certaines suites de polynômes ou de fractions rationnelles). Si, comme tous ses contemporains il cultive un peu la théorie des invariants (la grande mode dans l'Algèbre de l'époque), c'est pour en tirer des applications à la Géométrie ou aux équations différentielles : ainsi, il montre que dans une équation différentielle linéaire

$$y^{(n)} + a_2 y^{(n-2)} + a_3 y^{(n-3)} + \dots + a_n y = 0$$

on peut faire disparaître le terme en $y^{(n-2)}$ par intégration d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Même lorsqu'il se tourne vers l'Algèbre linéaire, où il aurait pu être le créateur de la théorie des matrices si Cayley (sans qu'il le sût) ne l'avait devancé de 9 ans, il dit lui-même que c'était en vue de l'appliquer aux fonctions abéliennes.

En Analyse, les travaux de Laguerre qui sont les plus originaux et qui ont eu le plus d'influence concernent les fonctions entières, et plus particulièrement celles qu'on peut appeler réelles, c'est-à-dire dont la série de Maclaurin a ses coefficients réels. En 1876, Weierstrass avait montré que toute fonction entière peut s'écrire

$$f(z) = z^k e^{Q(z)} \prod_n E_{p_n} (z/z_n)$$

("décomposition en facteurs primaires") ; Q est un polynôme ou une fonction entière, les z_n forment une suite finie ou infinie telle que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$ si la suite est infinie, et pour tout entier $p \geq 0$, le "facteur primaire" $E_p(z)$ est défini par

$$E_o(z) = 1-z \ , \ E_p(z)=(1-z)\exp(z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^p}{p} \quad \text{si } p > 0 \ .$$

Laguerre s'intéresse au cas où Q est un polynôme de degré q et où la borne inférieure r des nombres réels $m > 0$ tels que la série $\sum_n |z_n|^{-m-1}$ soit convergente, est un nombre fini. Il comprit que pour l'étude à l'infini de $f(z)$, ce n'étaient ni le nombre q, ni le nombre r qui importaient le plus, mais le plus grand entier p tel que $p \leq q$ et $p \leq r$ qu'il appela le <u>genre</u> de f. Il montra que si f est réelle et de genre 0 ou 1, alors, si f a toutes ses racines réelles et simples, sa dérivée f' a le même genre que f et a toutes ses racines réelles et simples, qui alternent avec celles de f. Si f est réelle et de genre $p > 1$, et si elle a au plus h racines imaginaires, alors f' est encore de genre p et a au plus $p+h$ racines imaginaires.

En outre, Laguerre a beaucoup travaillé sur les problèmes de séparation des racines d'une équation $F(x) = 0$, où F est un polynôme ou une fonction entière réelle de genre ≤ 1, en liaison avec les règles de Descartes et de Sturm ; au XX^e siècle, ces recherches ont été prolongées dans de remarquables travaux de G. Polya .

Nous en arrivons aux "polynômes de Laguerre" qui sont au centre de ce Colloque, mais que Laguerre lui-même ne semble pas avoir placé très haut dans son oeuvre, puisqu'il n'en parle même pas dans la <u>Notice</u> sur ses travaux ! Après sa mort, ces polynômes pendant longtemps n'ont guère attiré l'attention : le Traité de Whittaker-Watson ne les mentionne pas, et ils ne sont devenus d'actualité que lorsqu'on s'est aperçu qu'ils intervenaient dans la solution de l'équation de Schrödinger pour les atomes à un seul électron.

On s'est alors rendu compte tout d'abord que Laguerre n'est pas du tout le premier à avoir étudié ces polynômes ni leur propriété d'orthogonalité. Lagrange les avait rencontrés en passant, au cours d'un calcul, sans leur accorder d'attention particulière. Mais Abel dans une courte note non publiée de son vivant, et qui ne paraît se rattacher à aucune autre partie de son oeuvre, écrit la série génératrice des polynômes de Laguerre

(1) $$\frac{1}{1-z}\, e^{xz/(1-z)} = 1 + \frac{z}{1!} L_1(x) + \frac{z^2}{2!} L_2(x) + \ldots + \frac{z^n}{p!} L_n(x) + \ldots$$

et on déduit aussitôt (comme le fera Laguerre lui-même) la formule

(2) $$\int_0^\infty L_n(x)\, L_n(x)\, e^{-x}\, dx = \delta_{mn} (n!)^2$$

B. Fractions continuées et quasi-orthogonalité.

La notion d'"orthogonalité" d'une suite de fonctions dans un intervalle est connue depuis la fin du XVIII^e siècle, d'abord pour les fonctions trigonométriques et les polynômes de Legendre, puis, avec les travaux sur les équations différentielles linéaires du second ordre et la théorie de Sturm-Liouville, pour des cas beaucoup plus généraux. Mais ce n'est pas le concept dominant qui intéresse Laguerre dans les polynômes qui portent son nom ; ils apparaissent au milieu de toute une série de notes et articles, centrés sur l'approximation des fonctions analytiques au voisinage de l'infini par des fonctions rationnelles, à l'aide de la théorie des fractions continuées.

Cette théorie, qui de nos jours n'est plus enseignée nulle part, a été un objet de prédilection des mathématiciens, depuis Euler jusqu'à Stieltjes . Initialement, elle se présente comme une méthode d'approximation des nombres réels par une suite de nombres rationnels par une suite de divisions successives. Pour $x \in \underline{R}$, on écrit

$$x = b_o + r_1 \qquad \text{avec } 0 \leq r_1 < 1 \text{ , } b_o \in \underline{Z}$$

puis si $r_1 \neq 0$ $\quad \frac{1}{r_1} = b_1 + r_2 \quad$ avec $0 < r_2 < 1$, $b_1 \in \underline{Z}$

puis si $r_2 \neq 0$ $\quad \frac{1}{r_2} = b_2 + r_3 \quad$ avec $0 \leq r_3 < 1$, $b_2 \in \underline{Z}$

et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un $r_j = 0$, ce qui est le cas si et seulement si $x \in \underline{Q}$; sinon, on poursuit indéfiniment et on écrit le "développement de x en fraction continuée"

$$x \sim b_o + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \dots}}}$$

(le second membre s'arrêtant au premier indice j tel que $r_{j+1} = 0$ lorsque $x \in \underline{Q}$). Plus généralement, on peut définir une fraction continuée par l'algorithme

$$\text{(3)} \qquad b_o + \cfrac{a_o}{b_1 + \cfrac{a_1}{b_2 + \cfrac{a_2}{b_3 + \dots}}}$$

où les a_j et b_j sont des nombres réels quelconques ; mais il est clair que c'est une suite d'opérations purement algébriques, poursuivie tant qu'on ne rencontre pas de dénominateurs 0, et il y a donc intérêt à supposer seulement (tout au moins au début) que les a_j et b_j sont des éléments d'un <u>corps</u> quelconque K. On écrit (3) de façon plus condensée

$$\text{(4)} \qquad b_o + \frac{a_o|}{|b_1} + \frac{a_1|}{|b_2} + \frac{a_2|}{|b_3} + \dots$$

et si le calcul peut se poursuivre jusqu'au terme b_k , on désigne par A_k/B_k le résultat en s'arrêtant à ce terme, et on dit que c'est la <u>k-ème réduite</u> de la fraction continuée (4).

La théorie algébrique élémentaire a été faite par Euler, qui a montré que l'on a les relations récurrentes pour $n \geq 1$

$$(5)\qquad \begin{aligned} A_n &= b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2} \\ B_n &= b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2} \end{aligned} \qquad \text{avec } A_{-1} = B_{-1} = 0 \ , \ A_o = b_o \ , \ B_o = 1$$

relations qui gardent un sens pour tout n (même si un $B_n = 0$) ; on en déduit

$$(6)\qquad A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = a_o\ a_1 \ \dots\ a_n$$

donc, si $B_{n-1}\ B_n = \emptyset$,

$$(7)\qquad \frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{a_o a_1 \dots a_n}{B_{n-1} B_n}$$

Pour K un corps valué complet, la <u>convergence</u> de la suite (A_n/B_n) lorsque les B_n sont tous $\neq 0$, équivaut donc à celle de la série

$$(8)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_o a_1 \dots . a_n}{B_{n-1} B_n}$$

L'intérêt des analystes du XIX^e siècle se portait surtout (pour $K = \underline{C}$) sur les fractions continuées de la forme

$$(9)\qquad \frac{a_o \ |}{|\, z + b_1} + \frac{a_1 \ |}{|\, z + b_2} + \frac{a_2 \ |}{|\, z + b_3} + \dots$$

dépendant d'un paramètre complexe z (cas où B_n est un polynôme unitaire de degré n en z), surtout depuis que Gauss avait mis sous cette forme le quotient de deux fonctions hypergéométriques. Le problème est d'étudier les relations entre les coefficients a_n, b_n et le développement asymptotique

$$(10)\qquad \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \frac{c_o}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \dots + \frac{c_{2n-1}}{z^{2n}} + 0\ \left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right)$$

de chaque réduite, au voisinage de l'infini. Pour exposer les résultats obtenus dans ce problème, notamment par Tchebichef, Christoffel, Heine et A. Markov, il est plus clair de considérer d'abord son <u>aspect purement algébrique</u>.

C. Le problème algébrique direct.

On se place dans un corps quelconque K, on se donne deux suites infinies $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ d'éléments quelconques de K, et on considère dans l'anneau de polynômes $K[u]$ (u indéterminée) les deux suites de polynômes définies par

(11) $$A_n(u) = (u+b_n)\, A_{n-1}(u) - a_{n-1}A_{n-2}(u) \quad \text{pour } n \geq 2,\ A_o = 0,\ A_1 = a_o$$

(12) $$B_n(u) = (u+b_n)\, B_{n-1}(u) - a_{n-1}B_{n-2}(u) \quad \text{pour } n \geq 2,\ B_o = 1,\ B_1 = u+b_1$$

B_n est donc un polynôme unitaire de degré n, A_n un polynôme de degré $\leq n-1$. Dans le corps $K(u))$ des séries formelles, on a un développement

(13) $$\frac{A_n(u)}{B_n(u)} = \sum_{p=o}^{\infty} \frac{c_p}{u^{p+1}}$$

et en vertu de (7), les termes $c_o, c_1, \ldots, c_{2n-1}$ sont les mêmes pour

$$\frac{A_n}{B_n} \quad \text{et} \quad \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} \quad .$$

Théorème 1 .- (i) Il existe sur l'anneau $K[u]$ des polynômes une forme linéaire S et une seule telle que

(14) $$S(B_m B_n) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq m < n$$

(15) $$S(B_n^2) = a_o a_1 \ldots a_n \quad \text{pour} \quad n \geq 0 \ .$$

(ii) Si $S(u^n) = c_n \in K$, c_p est le coefficient de $1/u^{p+1}$ dans (13) pour $0 \leq p \leq 2n-1$

(iii) On a

(16) $$S(u^{n+1}B_n) = -\, a_o a_1 \ldots a_n (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n+1}) \quad \text{pour} \quad n \geq 0 \ .$$

(iv) Dans l'anneau de polynômes $K[z,u]$, on a

(17) $$A_n(u) = S_z \left(\frac{B_n(z) - B_n(u)}{z - u} \right)$$

Comme les B_n forment une base de $K[u]$, on peut remplacer les relations $S(B_m B_n) = 0$ pour $m < n$ par $S(u^m B_n) = 0$ et les relations $S(B_n^2) = a_o a_1 \ldots a_n$ par $S(u^n B_n) = a_o a_1 \ldots a_n$.

(i) et (iii) : pour $n = 0$, (15) donne $S(1) = a_o$ et pour $n = 1$, (14) donne $S(u) = -a_o b_1$ et (16) est alors vérifié pour $n = 0$. On raisonne alors par récurrence, supposant $S(u^r)$ défini pour $r \leq 2n$, (14) et (15) vrais en remplaçant m,n par p,q , pour $0 \leq q < p \leq n$, (16) vraie en remplaçant n par p, pour $p \leqslant n-1$. Le polynôme B_{n+1} vérifiant (12), on a d'abord $S(u^{n-1} B_{n+1}) = 0$ pour $m \leq n-2$; on a ensuite

$$S(u^{n-1}B_{n+1}) = S(u^n B_n) + b_{n+1}\, S(u^{n-1}B_n) - a_n\, S(u^{n-1}B_{n-1}) = 0$$

puisque $S(u^{n-1}B_n) = 0$, $S(u^n B_n) = a_o a_1 \ldots a_n$ et $S(u^{n-1}B_{n-1}) = a_o a_1 \ldots a_{n-1}$.

Les conditions $S(u^n B_{n+1}) = 0$ et $S(u^{n+1}B_{n+1}) = a_o a_1 \ldots a_{n+1}$ définissent alors sans ambiguïté les éléments $S(u^{2n+1})$ et $S(u^{2n+2})$. Enfin, on a

$$0 = S(u^n B_{n+1}) = S(u^{n+1}B_n) + b_{n+1} S(u^n B_n) - a_n\, S(u^n B_{n-1})$$

d'où (16).

(iv) La relation (17) est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, et il suffit de voir que le second membre de (17) satisfait à la relation de récurrence ( ) . Or, pour $n \geqslant 2$, on a

$$S_z\Big(u\, \frac{B_{n-1}(z) - B_{n-1}(u)}{z - u}\Big) = S_z\Big(\frac{zB_{n-1}(z) - u\, B_{n-1}(u)}{z - u}\Big)$$

parce que $S_z(B_{n-1}(z)) = 0$, et la vérification de (11) résulte alors de la relation (12) appliquée à $B_n(z)$ et $B_n(u)$.

(ii) On peut écrire

$$\frac{B_n(u) - B_n(z)}{(u - z)\, B_n(u)} = \Big(\frac{1}{u} + \frac{z}{u^2} + \ldots + \frac{z^{2n-1}}{u^{2n}}\Big)\Big(1 - \frac{B_n(z)}{B_n(u)} + \frac{z^{2n}}{u^{2n}B_n(u)}\, \frac{B_n(u) - B_n(z)}{u - z}$$

Or, $\dfrac{B_n(u) - B_n(z)}{u - z}$ est un polynôme de degré n-1 en u, et par suite le développement en série formelle en 1/u de

$$S_z\left(\frac{z^{2n}}{u^{2n}\,B_n(u)}\;\frac{B_n(u) - B_n(z)}{u - z}\right)$$

commence par un terme en $1/u^{2n+1}$. D'autre part, $S_z(z^p B_n(z)) = 0$ pour $p < n$, et le développement en série formelle en 1/u de

$$S_z\left(\left(\frac{z^n}{u^{n+1}} + \dots + \frac{z^{2n-1}}{u^{2n}}\right)\frac{B_n(z)}{B_n(u)}\right)$$

commence aussi par un terme en $1/u^{2n+1}$. Le fait que dans (13) on a $c_p = S_z(z^p)$ pour $p \leq 2n-1$ est donc conséquence de (14) et de la relation

(18)
$$\frac{A_n(u)}{B_n(u)} = S_z\left(\frac{B_n(u) - B_n(z)}{(u - z)\,B_n(u)}\right)$$

<u>Corollaire .- Si les zéros</u> z_j $(1 \leq j \leq n)$ <u>de</u> B_n <u>(dans une extension algébrique de K) sont simples, on a, pour tout polynôme</u> $P \in K[u]$ <u>de degré</u> $\leq 2n-1$

(19)
$$S(P) = \sum_{j=1}^{n} S\left(\frac{B_n(u)}{u - z_j}\right)\frac{P(z_j)}{B_n'(z_n)}$$

<u>et en particulier</u>

(20)
$$\frac{A_n(u)}{B_n(u)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{B'(z_n)}\; S\left(\frac{B_n(u)}{u - z_j}\right)\frac{1}{u - z_j}$$

En effet, la formule d'interpolation de Lagrange donne

$$P(u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(z_j)}{B_n'(z_j)}\;\frac{B_n(u)}{u - z_j} + B_n(u)\,Q(u)$$

où Q est un polynôme de degré $\leq$ n-1 ; comme $S(B_nQ) = 0$ la formule (19) en résulte ; la formule (20) s'en déduit en l'appliquant au polynôme

(en z) $\quad P(z) = \dfrac{B_n(z) - B_n(u)}{z - u)\,B_n(u)}$

On dit que (19) est la "formule des quadratures" ; lorsque S est la restriction à $\underline{R}[u]$ d'une mesure, on a sa valeur pour un polynôme de degré $\leq 2n-1$ à l'aide de seulement n valeurs du polynôme, remarque faite d'abord par Gauss.

Remarque .- Tout ce qui précède est valable pour $n \leq N$ si on ne se donne les a_n et b_n pour $n \leq N$.

D. Le problème algébrique inverse.

On reste en algèbre sur un corps quelconque K, et on suppose cette fois donnée une forme linéaire S sur $K[u]$, autrement dit, on se donne une suite d'éléments $S(u^n) = c_n \in K$. Il s'agit de savoir s'il existe des fractions rationnelles $A_n/B_n \in K(u)$, où B est unitaire et de degré n, A de degré $\leq n-1$, telles que dans le développement (13) les termes c_p pour $p < 2n-1$ sont égaux à $S(u^p)$. Le problème a au plus une solution, car si C_n/D_n est est une seconde, on a

$$A_n D_n - B_n C_n = O(1/u)$$

ce qui n'est possible pour un polynôme que s'il est nul, d'où $B_n = D_n$ si A_n/B_n est irréductible (voir plus loin), et alors $A_n = C_n$.

L'existence d'une solution est liée aux déterminants de Hankel

$$(21) \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} c_o & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix}$$

Théorème 2 .- Si $\Delta_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$, il existe pour chaque n une solution A_n/B_n ; les polynômes B_n vérifient les relations (14) et

$$(22) \qquad S(B_n^2) = \Delta_n/\Delta_{n-1} \qquad \text{pour tout } n > 0 .$$

Les polynômes B_n sont donnés explicitement par

$$(23) \qquad B_n(u) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} c_o & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ 1 & u & \dots & u^n \end{vmatrix}$$

Si les éléments a_n $(n \geq 0)$ et b_n $(n > 1)$ sont déterminés par les relations (15) et (16), les B_n satisfont aux relations de récurrence (12) les polynômes A_n sont donnés par (17) et vérifient les relations de récurrence (11) (autrement dit A_n/B_n est la n-ème réduite de la fraction continuée (9)).

Pour un n donné, on cherche un polynôme

$$B_n(u) = u^n + x_1 u^{n-1} + \dots + x_n \quad , \quad x_j \in K \qquad \text{pour } 1 \leq j \leq n$$

vérifiant les relations

$$(24) \qquad S(u^p B_n) = 0 \quad \text{pour } p < n \quad , \quad S(u^n B_n) = h_n \neq 0$$

ce qui donne un système de n+1 équations linéaires pour les x_j

$$\begin{aligned} c_o x_n + c_1 x_{n-1} + \dots + c_{n-1} x_1 + c_n &= 0 \\ c_1 x_n + c_2 x_{n-1} + \dots + c_n x_1 + c_{n+1} &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{n-1} x_n + c_n x_{n-1} + \dots + c_{2n-2} x_1 + c_{2n-1} &= 0 \\ c_n x_n + c_{n+1} x_{n-1} + \dots + c_{2n-1} x_1 + c_{2n} &= h_n \end{aligned}$$

Puisque $\Delta_{n-1} \neq 0$, les n premières équations ont une solution unique et la condition de compatibilité est

$$(25) \qquad \Delta_n = h_n \, \Delta_{n-1} \, .$$

Si on écrit $P_n(u)$ le déterminant du second membre de (23), on vérifie aussitôt par définition des c_n que l'on a $S(u^p p_n) = 0$ pour $p < n$ (le déterminant a 2 lignes égales) et que $S(u^n p_n) = \Delta_n$, d'où la formule (23) par unicité.

On peut évidemment écrire pour tout n, d'une seule manière , $B_{n+1}(u) = (u+b_{n+1}) B_n(u) - a_n B_{n-1}(u) + c_o B_o(u) + \ldots + c_{n-2} B_{n-2}(u)$ où a_n, b_{n+1} et les c_j sont des éléments de K ; en écrivant $S(u^p B_{n=1}) = 0$ pour $p \leqslant n-2$, il vient $e_o = e_1 = \ldots = e_{n-2} = 0$; par récurrence , $S(u^{n-1} B_{n+1}) = 0$ donne $S(u^n B_n) = a_n a_o a_1 \ldots a_{n-1}$; enfin $S(u^n B_{n+1}) = 0$ donne $S(u^{n+1} B_n) = -a_o a_1 \ldots a_n (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n+1})$. Si alors S' est la forme linéaire sur K[u] qui correspond aux suites (a_n) et (b_n) par le th. 1, on a S' = S .

E. Les matrices de Jacobi.

En vue de recherches sur l'arithmétique des formes quadratiques, Jacobi a attiré l'attention sur les formes quadratiques qui s'écrivent pour une base $(e_j)_{o<j<n}$ de K^{n+1}

$$\sum_{j=o}^{n} b_j x_j^2 + 2 \sum_{j=o}^{n-1} a_j x_j x_{j+1} \tag{26}$$

et ont donc pour matrice par rapport à cette base

$$\underline{J} = \begin{matrix} b_o & a_o & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_o & b_1 & a_1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{n-1} & b_n \end{matrix} \tag{27}$$

On appelle maintenant <u>matrices de Jacobi</u> les matrices (27) pour lesquelles les a_j sont tous $\neq 0$; elles sont liées à des fractions continuées particulières. Ecrivons en effet qu'un vecteur $(x_j)_{0\leq j\leq n}$ est <u>vecteur propre</u> pour la matrice $\underline{J}$ et la valeur propre ζ ; on obtient le système

$$\begin{aligned}
b_o x_o + a_o x_1 &= \zeta x_o \\
a_o x_o + b_1 x_1 + a_1 x_2 &= \zeta x_1 \\
a_1 x_1 + b_2 x_2 + a_2 x_3 &= \zeta x_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_{n-1} x_{n-1} + b_n x_n &= \zeta x_n
\end{aligned}$$

ce qui donne par récurrence

(28) $$x_j = P_j(\zeta) x_o \qquad \text{pour } 0 \leq j \leq n$$

où les P_j sont les polynômes définis par les relations $P_o = 1$.

(29) $$a_j P_{j+1}(u) = (u-b_j)\, P_j(u) - a_{j-1} P_{j-1}(u) \text{ pour } 0 \leq j \leq n-1 \quad .$$

En posant

(30) $$B_j(u) = a_o\, a_1 \ldots a_{j-1}\, P_j(u)$$

(avec $B_o = 1$) pour $0 \leq j \leq n$, on a donc

(31) $$B_{j+1}(u) = (u-b_j)\, B_j(u) - a_{j-1}^2 B_{j-1}(u) \qquad \text{pour } 1 < j < n-1 \ ;$$

autrement dit les B_j $(1 \leq j \leq n)$ sont les dénominateurs des n premières réduites de la fraction continuée limitée

(32) $$\frac{1\,|}{|\,u-b_o} - \frac{a_o^2\,|}{|\,u-b_1} - \frac{a_1^2\,|}{|\,u-b_2} - \ldots - \frac{a_{n-1}^2\,|}{|\,u-b_n}$$

On dira que (32) est une <u>fraction continuée de Jacobi</u>, associée à la matrice de Jacobi $\underline{J}$. On peut en outre écrire le dénominateur de la <u>dernière</u> réduite de cette fraction continuée

(33) $$B_{n+1}(u) = (u-b_n)\, B_n(u) - a_{n-1}^2\, B_{n-1}(u)$$

et le calcul de la valeur propre ζ montre que B_{n+1} est le polynôme caractéristique de la matrice J .

F. Les matrices de Jacobi réelles.

On reste en algèbre mais on prend $K = \underline{R}$, ce qui est le cas considéré par les analystes du XIX^e siècle, et va faire intervenir la structure d'ordre (on pourrait prendre K ordonné maximal ; ..). Nous dirons qu'une forme linéaire S sur l'espace vectoriel $\underline{R}_r[u]$ des polynômes de degré $\leqslant r$ est strictement positive si pour tout polynôme $P \in \underline{R}_r[u]$ tel que $P(x) \geqslant 0$ dans $\underline{R}$, on a $S(P) > 0$ sauf si $P = 0$.

Théorème 3 .- Pour qu'une forme linéaire S sur $\underline{R}_{2n}[u]$ soit strictement positive, il faut et il suffit qu'elle corresponde par le th.1 à une fraction continuée de Jacobi (32).

Suffisance. Si S correspond à la fraction continuée (32), elle est définie pour les polynômes de degré $\leqslant 2n$, et l'on a, pour $1 < j \leqslant n$

$$S(B_j^2) = a_o^2\, a_1^2 \dots a_{j-1}^2 > 0$$

or tout polynôme Q de degré $\leqslant j$ s'écrit $\sum_{k=o}^{j} x_k B_k(u)$, donc

$$S(Q^2) = \sum_{k=o}^{j} x_k^2\, S(B_k^2) \geqslant 0$$

et on ne peut avoir $S(Q^2) = 0$ que si $Q = 0$. Si maintenant P est de degré $\leqslant 2n$ et $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \underline{R}$, on peut l'écrire $P = Q^2 + R^2$, où Q et R sont des polynômes de degré $\leqslant n$, et par suite $S(P) > 0$ et $S(P) = 0$ si et seulement si $Q = R = 0$, donc $P = 0$.

Nécessité. Si $S(u^k) = c_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2n$, pour tout polynôme $Q(u) = \sum_{k=o}^{n} \xi_k\, u^k$ de degré $< n$, on a

$$S(Q^2) = \sum_{j,k} c_{j+k}\, \xi_j \xi_k$$

et le second membre est donc une forme quadratique positive non dégénérée ; on sait que cela entraîne que les déterminants Δ_k donnés par

(21) sont tous > 0 ; on peut donc appliquer le th.2 , et pour la fraction continuée correspondante, les coefficients a_j sont > 0 et peuvent donc s'écrire comme des carrés, autrement dit on obtient une fraction continuée de Jacobi.

<u>Corollaire 1 .- Pour une fraction continuée de Jacobi</u> (32), <u>les polynômes</u> B_j , <u>pour</u> $1 \leqslant j \leqslant n+1$, <u>ont les propriétés suivantes</u> :

(i) <u>Tous les zéros de</u> B_j <u>sont réels et simples</u> .

(ii) <u>Entre deux zéros de</u> B_j <u>il y a exactement un zéro de</u> B_{j-1} .

(iii) <u>Entre deux zéros de</u> B_j , <u>il y a exactement un zéro du numérateur</u> A_j <u>de la j-ème réduite</u> .

(i) la méthode (de Legendre) consiste à prouver que B_j change de signe au moins j fois ; sinon, il y aurait $k < j-1$ nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tels que $P(x)=B_j(x)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)\geqslant$ dans $\underline{R}$, donc $S(P) \geqslant 0$; mais par (14) $S(P) = 0$, donc $P = 0$, ce qui est absurde.

(ii) Des relations (29), on déduit aisément, pour deux nombres réels $x \neq y$, la <u>formule de Christoffel-Darboux</u>.

$$(34) \qquad (y-x)\sum_{k=o}^{j} P_k(x)\, P_k(y) = a_{j-1}(P_{j-1}(x)\, P_j(y) - P_{j-1}(y)\, P_j(x))$$

et si, dans cette formule, on fait tendre y vers x, on obtient

$$(35) \qquad \sum_{k=o}^{j} P_k^2(x) = a_{j-1}(P_{j-1}(x)\, P_j'(x) - P_{j-1}'(x)\, P_j(x))$$

En un zéro ζ_k de P_j on a donc $a_{j-1}P_{j-1}(\zeta_k)P_j'(\zeta_k) > 0$. Comme en deux zéros consécutifs de P_j , la dérivée P_j' prend des valeurs de signes contraires, il en est de même de P_{j-1} .

(iii) La formule (6) pour une fraction continuée de Jacobi montre que $A_j(x)B_{j-1}(x)-A_{j-1}(x)B_j(x)<0$, donc $A_j(\zeta_k)B_{j-1}(\zeta_k)<0$ en un zéro ζ_k de B_j ; par suite A_j prend des valeurs de signes contraires en deux zéros consécutifs de B_j .

Remarque .-

Le th.3 peut être appliqué aussi à une fraction continuée de Jacobi obtenue en prolongeant la fraction continuée (32) de façon arbitraire, ce qui prouve que les résultats du cor.1 sont aussi valables pour B_{n+1} .

Corollaire 2 .- Si z_j $1 \leq j \leq n+1)$ sont les valeurs propres de J , on a pour tout polynôme $P \in \underline{R}_{2n}[u]$,

$$S(P) = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j P(z_j) \tag{36}$$

où les λ_j sont > 0 .

La formule générale n'est autre que (19) et la seule chose à prouver est que les coefficients λ_j sont > 0 . Il suffit pour cela de l'appliquer au polynôme $(u-z_1)^2 ..(u-z_{j-1})^2(u-z_{j+1})^2 ...(u-z_{j+1})^2 ...(u-z_{n+1})^2$. On peut dire que S est la restriction aux polynômes de degré $\leq 2n$ de la mesure positive sur $\underline{R}$ définie par la masse λ_j en chacun des n+1 point z_j .

G. Le problème de Laguerre.

La formule générale (23) donnant les dénominateurs des fractions continuées associées à un développement (10) sont impraticables pour le calcul explicite des termes a_n et b_n lorsque les c_n sont explicitement donnés ; il est donc naturel de chercher d'autres procédés applicables tout au moins à certaines suites (c_n) . En 1859, Tchebichef, qui s'est constamment intéressé aux fractions continuées en liaison avec les problèmes d'approximation numérique, se pose un tel problème pour les développements asymptotiques au voisinage de l'infini de fonctions de la forme particulière

$$V(z) = \int_\alpha^\beta \frac{f(t)dt}{z-t} \tag{37}$$

pour z (réel ou complexe) n'appartenant pas à l'intervalle d'intégration $[\alpha,\beta]$; la fonction f est continue et > 0 dans $]\alpha,\beta[$ et telle que les fonctions $f(t)t^k$ sont intégrables dans $]\alpha,\beta[$ pour tout $k \geq 0$ (Oeuvres, t.I, p. 501-508) ; on a alors

(38) $$c_n = \int_\alpha^\beta f(t)\, t^n\, dt$$

et d'après le th.3 la fraction continuée correspondante est une fraction continuée de Jacobi. Il dit avoir été conduit à ce type de développement asymptotique en "passant à la limite" dans la formule (20) donnant les réduites, où il fait tendre vers 0 les différences de 2 zéros consécutifs. Tchebichef ne donne aucun détail sur les procédés qu'il emploie et se contente de donner <u>explicitement</u> les fractions continuées et les dénominateurs des réduites, dans les cas suivants :

$f(t) = 1$	intervalle $]-1,1[$	: polynômes de Legendre
$f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	intervalle $]-1,1[$	: polynômes appelés maintenant "de Tchebichef"
$f(t) = e^{-t^2}$	intervalle $\underline{R}$	: polynômes "d'Hermite"
$f(t) = e^{-t}$	intervalle $]0,+\infty[$	: polynômes "de Laguerre".

Dans les deux derniers cas, il donne en outre les expressions des polynômes comme dérivées n-èmes, analogues à la formule d'Olinde Rodrigues pour les polynômes de Legendre (ce que ne fait pas Laguerre).

Il ne semble pas que cet article de Tchebichef ait été connu de Laguerre (*). L'originalité de ce dernier réside dans le fait qu'il cherche un procédé <u>général</u> donnant les fractions continuées correspondantes de façon explicite, pour les fonctions V qui sont solution d'équations différentielles du premier ordre de la forme

(39) $$V' = FV + \Phi$$

où F et Φ sont des <u>fonctions rationnelles</u>. Son ingénieuse méthode consiste à écrire, pour la n-ème réduite

$$V = \frac{A_n}{B_n} + O(1/x^{2n+1}) \;;$$

(*) Hermite ne cite pas non plus cet article de Tchebichef dans le mémoire où il définit et étudie "ses" polynômes (Oeuvres, t.II, p. 292-308).

puis à substituer cette expression dans l'équation (39) ; à l'aide de la formule obtenue, il montre que B_n satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre, de la forme

(40) $$y'' - \left(\frac{2n}{x} + \frac{\Theta'_n}{\Theta_n} - F\right) y' - H_n . y = 0$$

où Θ_n et H_n sont des fonctions rationnelles dont le dénominateur est continu (i.e. déterminé par F et Φ), et le degré du numérateur borné par un entier <u>indépendant de n</u> . Malheureusement la détermination explicite de Θ_n et H_n dans les cas traités par Laguerre donne lieu à des calculs presque toujours inextricables, et au fond ne réussit bien que pour les cas traités par Tchebichef. Nous nous bornerons à donner un aperçu des calculs pour le cas qui conduit à "ses" polynômes : il s'agit de la fonction

(41) $$V(x) = e^x \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}\, dt}{t}$$

dont le développement asymptotique est

$$\frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} + \dots$$

donc $c_n = (-1)^n\, n! = \int_{-\infty}^{\infty} e^t\, t^n\, dt$, ce qui donne une fraction continuée de Jacobi, la fonction étant de la forme (37) pour l'intervalle $]-\infty, 0[$.

On écrit

$$V(x) = \frac{A_n}{B_n} + 0\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right) \quad , \quad V'(x) = \frac{A'_nB_n - A_nB'_n}{B_n^2} + 0\left(\frac{1}{x^{2n+2}}\right)$$

et comme $V'(x) = V(x) - \frac{1}{x}$, on a

(42) $$\frac{A'_nB_n - A_nB'_n}{B_n^2} = \frac{A_n}{B_n} - \frac{1}{x} + 0\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$$

ou encore $x(A'_nB_n - A_nB'_n - A_nB_n) + B_n^2 = 0$ (1) , et comme le premier membre est un polynôme, cela n'est possible que si c'est une constante α . Laguerre forme alors l'équation linéaire du second ordre

$$\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ y_1'' & y_1' & y_1 \\ y_2'' & y_2' & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

ayant pour intégrales

(43) $\qquad y_1 = B_n \qquad , \qquad y_2 = e^{-x} A_n - B_n \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}\,dt}{t}$

et en utilisant la relation (42), il obtient

(43) $$xy'' + (x + 1)\, y' + \gamma\, y = 0$$

où γ est une constante ; comme $B_n = x^n + ..$ est une intégrale, on a nécessairement $\gamma = -n$.

Dans la suite de son article (Oeuvres, t.I, p.428-437) Laguerre commence par dériver (43) n fois , obtenant

$$xy^{(n+2)} + (x + n + 1)\, y^{(n+1)} = 0$$

d'où il déduit une intégrale de (43)

$$u(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}(t - x)^n}{t^{n+1}}\, dt$$

et comme dans cette expression les coefficients des x^k sont des fonctions de x tendant vers 0 à l'infini, cette solution est nécessairement le produit de y_2 et d'une constante ; il en déduit la formule

$$A_n(x)\, e^{-x} - B_n(x) \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = -n! \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}(t - x)^n}{t^{n+1}}\, dt$$

qui lui permet de montrer que les réduites A_n/B_n convergent vers la fonction V pour tout $x \geqslant 0$. Il tire ensuite de (43) les relations

$$B_n(x) = x^n + n^2 x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} + \ldots + n!$$

$$B_{n+1}(x) = (x + 2n + 1) B_n(x) - n^2 B_{n-1}(x)$$

$$xB_n'(x) = nB_n(x) - n^2 B_{n-1}(x) .$$

Enfin, utilisant le procédé (classique depuis Fourier) de développement en série de fonctions orthogonales, Laguerre signale les développements en "série de polynômes de Laguerre" , et l'utilise en particulier pour retrouver la série génératrice (1). Toutefois il ne dit rien sur la convergence de ces séries ; on y est revenu par la suite (voir G. Szegö, Orthogonal polynomials). Je ne mentionnerai ici que la convergence au sens de l'espace de Hilbert $L^2(\mu)$, où μ est la mesure $e^{-x}\,dx$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$; les polynômes de Laguerre sont obtenus par orthogonalisation de la suite des puissances x^k dans cet espace ; il s'agit de prouver que cette suite est totale. Cela résulte de théorèmes généraux sur les polynômes orthogonaux (voir ci-dessous) ; Szegö en donne une preuve directe assez compliquée, mais M.H. Stone en a donné une autre plus élégante, et tout à fait élémentaire. On commence par montrer, à l'aide de la formule de Stirling, que

$$e^{-2x} - e^{-x} \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$$

tend uniformément vers 0 dans $[0,+\infty[$. Remplaçant x par px/2, on en déduit, par récurrence sur p, que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P(x) tel que $|e^{-px} - e^{-x} P(x)| \leqslant \varepsilon$ dans $[0,+\infty[$. D'autre part, en appliquant le th. de Weierstrass dans $[0,1]$, on voit que pour une fonction continue f à support compact dans $]0,+\infty[$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme P tel que

$$\int_o^{+\infty} |f(x) - P(e^{-x})| e^{-x}\,dx \leqslant \varepsilon$$

Combinant les deux résultats , on voit que dans $L^2(\mu)$, les polynômes sont denses par rapport aux fonctions continues à support compact dans $]0,+\infty[$, donc aussi dans $L^2(\mu)$.

H. Fractions continuées et polynômes orthogonaux après Laguerre.

La théorie de l'approximation d'un développement asymptotique par les réduites d'une fraction continuée a été généralisée dans les années 1880-1890 par Frobenius et surtout par Padé ; cette théorie a récemment connu un regain d'activité ; voir par exemple les Springer Lecture Notes n° 765.

Quant à la théorie générale des polynômes orthogonaux, elle s'est développée à partir de 1894 par l'introduction des mesures de Stieltjes et de l'espace de Hilbert. Vu la relation entre les matrices de Jacobi finies et les formes quadratiques, Heine s'était déjà demandé ce qui correspondrait aux formes quadratiques pour les matrices de Jacobi infinies, ou les fractions continuées illimitées correspondantes. La réponse est donnée par la théorie spectrale de Hilbert-von Neumann. On considère donc une matrice infinie

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_2 & b_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

où les b_n sont réels quelconques, les a_n réels et $\neq 0$. Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ la base canonique de l'espace de Hilbert $\ell^2_{\underline{C}}$; dans le sous-espace partout dense G ayant pour base (algébrique) (e_n), on définit un opérateur $\underline{H}$ par

(44) $\quad \underline{H}.e_n = a_{n-1}\, e_{n-1} + b_n e_n + a_n e_{n+1}$ (on convient que $e_{-1}=0, b_{-1}=0$

Cet opérateur est hermitien dans G parce que $(\underline{H}.e_n|e_n) = (e_n|\underline{H}.e_n)$. Son adjoint $\underline{H}^*$ prolonge donc $\underline{H}$ dans un espace $\mathrm{dom}(\underline{H}^*)$ contenant G , et la théorie spectrale repose sur l'existence de ses vecteurs propres $y = \sum_n y_n e_n$ dans $\ell^2_{\underline{C}}$. Si l'on écrit $\underline{H}^*. y = \zeta y$ avec ζ non réel, on obtient un système récurrent infini pour les y_n , dont la solution est donnée par $y_n = P_n(\zeta)\, y_o$, les P_n étant définis par (29) pour tout $n \geqslant 0$ (avec $P_o = 1$). Mais pour que le vecteur y existe dans $\ell^2_{\underline{C}}$, il faut et il suffit que pour un ζ non réel, on ait

(45) $$\sum_n |P_n(\zeta)|^2 < +\infty$$

auquel cas cette relation a lieu pour tout ζ non réel ; le défaut de $\underline{H}$ est alors (1,1) . Si au contraire, il n'existe aucun ζ non réel vérifiant (45), $\underline{H}^*$ est autoadjoint (en général non borné).

La forme linéaire S correspondant à la fraction continuée de Jacobi (32) (illimitée) est définie dans tout l'espace $\underline{R}[u]$ des polynômes et est strictement positive ; il résulte alors du th. de Hahn-Banach qu'il existe au moins une mesure positive ν sur $\underline{R}$ prolongeant S, autrement dit

(46) $$c_n = \int_{\underline{R}} t^n d\nu(t) \qquad \text{pour tout } n \geqslant 0 .$$

Le problème de l'existence d'une mesure positive ν sur $\underline{R}$ satisfaisant à (46) est connu sous le nom de problème des moments de Hamburger, sa solution par les inégalités $\Delta_n > 0$ étant due à Hamburger ; auparavant Stieltjes avait considéré le même problème en assujettissant en outre la mesure ν à avoir son support dans $[0,+\infty[$, et Hausdorff, peu après Hamburger, étudia le cas où on assujettit le support de ν à être borné. Une fois obtenu le critère d'existence de ν , on étudie son unicité : on dit que le problème des moments est déterminé (resp. indéterminé) s'il existe une seule mesure ν (resp. plusieurs) vérifiant (46). Pour le problème des moments de Hamburger, on montre qu'il est déterminé si et seulement si $\underline{H}^*$ est autoadjoint. Les polynômes sont alors denses dans $L^2(\nu)$, et les P_n forment une base orthonormale de $L^2(\nu)$; si $\underline{T}$ est l'isomorphisme de $\ell^2_{\underline{C}}$ sur $L^2(\nu)$ transformant e_n en P_n pour tout n , on a

(47) $$\underline{H}^* = \underline{T}^{-1}\, \underline{M}_\nu \underline{T}$$

où dans $L^2(\nu)$, l'opérateur $\underline{M}_\nu$ fait correspondre à une fonction f la fonction $\zeta \to \zeta f(\zeta)$ (en général le domaine de cet opérateur est distinct de $L^2(\nu)$).

En supposant toutjours $\underline{H}^*$ autoadjoint, pour tout ζ non réel, les réduites $A_n(\zeta)/B_n(\zeta)$ de la fraction continuée de Jacobi définie par $\underline{J}$ convergent vers

$$w(\zeta) = \int \frac{d\nu(t)}{\zeta - t}$$

(justifiant l'intuition de Tchebichef) .

On a donné de nombreux critères <u>suffisants</u> pour qu'un problème des moments soit déterminé, par exemple

(48) $$\sum_n \frac{1}{|a_n|} = +\infty$$

ou encore

(49) $$\sum_n c_{2n}^{-1/2n} = +\infty \; .$$

Ces critères montrent que pour les polynômes de Laguerre, le problème des moments est déterminé.

En théorie spectrale, un opérateur autoadjoint (non borné) $\underline{H}$ est dit <u>simple</u> s'il existe un vecteur $x \in \mathrm{dom}(\underline{H})$ tel que les $\underline{H}^n.x$ pour $n \geq 0$ appartiennent à $\mathrm{dom}(\underline{H})$ et forment un ensemble <u>total</u> dans cet espace. La théorie spectrale montre qu'un opérateur simple est isomorphe à un opérateur de la forme $\underline{M}_\nu$, où ν est une mesure positive quelconque sur $\underline{R}$, qui n'est déterminée qu'à équivalence près ; on peut donc supposer que les polynômes soient intégrables pour ν . En orthogonalisant dans $L^2(\nu)$ la suite des t^k , on obtient une suite de polynômes orthogonaux P_n , et par rapport à la base hilbertienne des $\underline{P}_n$, la matrice de $\underline{M}_\nu$ est une matrice de Jacobi. Il y a donc correspondance biunivoque entre : systèmes complets de polynômes orthonormaux dans un $L^2(\nu)$, matrices de Jacobi pour lesquelles l'opérateur $\underline{H}^*$ est autoadjoint, et opérateurs autoadjoints simples.
Pour toute cette théorie, consulter H. Akhiezer ; <u>The classical moment problem</u>; Oliver and Boyd, Edinburgh-London, 1965.

J. Dieudonné