SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE
ET MATHÉMATIQUES

JEAN-LOUIS GARDIES

Pascal, Cantor et l'infini

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1983, fascicule 7
« Pascal, Cantor et l'infini », , p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1983___7_A1_0>

SM S PHILO - MATH

PASCAL , CANTOR ET L'INFINI

Débarrassons préalablement notre sujet des données proprement biographiques : Cantor a connu l'oeuvre de Pascal, à laquelle il a fait d'assez nombreuses allusions ; cependant il est impossible de parler véritablement d'une influence que celui-ci aurait exercé sur lui. Soulignons d'abord deux dates :

1) En 1873, l'année même où Cantor réalise qu'un abîme sépare dénombrable et continu, il publie ses Historische Notizen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung (1), résumé d'un exposé de vulgarisation d'histoire des sciences tenu à Halle, dont le contenu, en ce qui concerne Pascal, est assez classique et, somme toute, insignifiant ; aucun lien n'apparaît ici nettement avec ses recherches dominantes.

2) Plus tard, lorsqu'il invoquera Pascal en faveur de l'infini actuel, Cantor se référera à l'édition des Oeuvres complètes publiée chez Hachette, pour laquelle il donne la date de 1877 (2) ; or, en 1877, les grands concepts cantoriens sont déjà en place ; Pascal, dans sa vie intellectuelle arrive trop tard.

Il semble que Cantor ait médité ces Oeuvres dans les années qui suivirent immédiatement la publication (Leipzig, 1883) de ses propres Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, puisque lui-même indique (3) que c'est au lendemain de cette publication qu'il a "trouvé le temps" de se familiariser davantage avec la philosophie ancienne, médiévale et moderne. Il semble qu'il soit allé se chercher après coup des cautions dans l'histoire de la philosophie, la seule véritable influence ayant été celle de Bolzano. Caution et mythe justificatif : le mépris du Chevalier de Méré pour les travaux mathématiques de Pascal (dont il a d'abord eu connaissance par l'article *Zénon* du *Dictionnaire* de Bayle) lui fournit un modèle de l'incompréhension manifestée à l'égard de ses propres recherches par son maître Kronecker, que, dans sa correspondance avec Mittag-Leffler, il surnomme avec amertume "Herr von Méré".

Nous considérerons successivement

1) la rencontre des paradoxes de l'infini chez nos deux auteurs,

2) le primat exercé dans l'oeuvre de Pascal par l'infini potentiel,

3) la rencontre de l'infini actuel non dénombrable par Pascal,

4) sa rencontre de l'infini actuel dénombrable.

Notre développement se chargera lui-même d'éclairer et, espérons-le, de dissiper la légère anomalie qu'il peut y avoir, dans une démarche qui se veut néanmoins progressive, à envisager la question de l'infini non dénombrable avant celle du dénombrable.

*
* *

I - RENCONTRE DES PARADOXES DE L'INFINI

Les paradoxes de l'infini, que Cantor rencontrera dans *Paradoxien des Unendlichen* (publié en 1851) de Bolzano, ont une histoire qui remonte au moins à Duns Scot, dont les scolastiques reprendront les propos dans leurs successifs commentaires de la *Physique* d'Aristote.

Duns Scot en effet, pour montrer qu'on n'avait pas le droit de considérer une ligne comme un ensemble de points, s'appuyait sur la possibilité de mettre en bijection deux ensembles de points manifestement inégaux ;

il en donnait notamment pour exemple la correspondance biunivoque qu'on pouvait établir, par projection parallèle, entre les points constitutifs du côté du carré et les points constitutifs de sa diagonale, ainsi que celle qu'on pouvait établir entre les points constitutifs de deux circonférences concentriques par les rayons issus de leur centre commun. Il soulignait encore que d'un infini, comme l'ensemble infini des entiers naturels, on pouvait toujours soustraire un infini, comme l'ensemble infini des nombres pairs, sans modifier la puissance du premier.

A ces paradoxes, retransmis par la tradition scolastique , Galilée, dans ses Discorsi e dimostrationi matematiche (1638), avait ajouté le sien : l'ensemble des carrés parfaits n'était-il pas manifestement un sous-ensemble propre de celui des entiers et cependant n'était-il pas possible de mettre en correspondance chaque carré avec l'entier naturel dont il était le carré ? La conclusion qu'en tirait Galilée était que les relations d'égalité et d'inégalité n'avaient plus de sens dans l'infini.

Cette conclusion sera celle que Descartes fera sienne au paragraphe 26 des Principes de la philosophie :

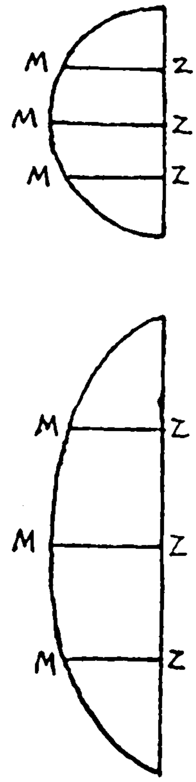
> ... nous ne nous embarrasserons jamais dans les disputes de l'infini ; d'autant qu'il serait ridicule que nous, qui sommes finis, entreprissions d'en déterminer quelque chose, et par ce moyen le supposer fini en tâchant de le comprendre ; c'est pourquoi nous ne nous soucierons pas de répondre à ceux qui demandent si la moitié d'une ligne infinie est infinie, et si le nombre infini est pair ou non pair et autres choses semblables, à cause qu'il n'y a que ceux qui s'imaginent que leur esprit est infini qui semblent devoir examiner telles difficultés. Et, pour nous, en voyant des choses dans lesquelles, selon certains sens, nous ne remarquons point de limites, nous n'assurerons pas pour cela qu'elles soient infinies, mais nous les estimerons seulement indéfinies.

Ainsi Descartes rhabillait-il en indéfini l'infini potentiel d'Aristote.

Si Pascal ne se contente pas d'une telle attitude, dont le XVIIème siècle dans son ensemble (en particulier Arnauld) se satisfait, c'est qu'il est disciple de Desargues et que la géométrie projective multiplie ces paradoxes, dont nous ne donnerons ici que deux exemples :

1) En fin 1658, dans sa lettre à Carcavi il attirait l'attention sur certains dangers impliqués par le langage des indivisibles, comme dans le cas suivant :

si l'on assimile un demi-cercle à "la somme d'un nombre indéfini (4) de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre", on obtiendra évidemment une demi-ellipse de surface double en doublant chacune de ces "petites portions" (5). Or rien ne nous empêcherait de mettre ensuite en correspondance biunivoque l'ensemble des ordonnés ZM du demi-cercle avec celui des ordonnées de la demi-ellipse.



2) Mais déjà, dix ans auparavant, Pascal avait rencontré dans sa Generatio conisectionum un paradoxe de l'infini beaucoup plus corsé encore. La définition de la parabole comme section d'un cône opérée parallèlement à l'une quelconque des génératrices faisait voir immédiatement que "tous les points de la circonférence du cercle projettent leur image dans le plan sécant à une distance finie, à l'exception d'un seul point, qui n'a pas d'image, sinon à distance infinie", en sorte que "la parabole qui s'étend à l'infini engendre un espace infini, bien qu'elle soit l'image de la circonférence du cercle qui est finie et embrasse un espace fini" (6). Ce paradoxe de l'infini avait d'ailleurs pu être suggéré à Pascal par la mode alors régnante des anamorphoses, dont, par exemple, les savants minimes Jean-François

Niceron et Emmanuel Maignan, venaient de décorer leurs couvents de Paris et de Rome (7).

Ces paradoxes aboutiront à la définition proposée par Dedekind de l'ensemble infini, comme celui qui est semblable (ähnlich) à une de ses parties propres (8). En tout cas ce n'est pas un hasard si Cantor a emprunté à la géométrie projective, le terme même de puissance (Mächtigkeit), comme il ressort de son propre aveu (9) :

> Den Ausdruck "Mächtigkeit" habe ich J. Steiner entlehnt (Siehe dessen Vorlesungen über synthetische Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von Schröter, § 2), der ihn in einem ganz speziellen, immerhin jedoch verwandten Sinne gebraucht, um auszusprechen, dass zwei Gebilde durch projektivische Zuordnung so aufeinander bezogen sind, dass jedem Element des einen ein und nur ein Element des andern entspricht.

*
* *

II - PRIMAT, CHEZ PASCAL, DE L'INFINI POTENTIEL

Les deux infinis, qui constituent le point de départ de la mathématique, de la physique et de l'anthropologie pascalienne, sont, de nature, essentiellement potentiels. "Il y a, dit l'opuscule De l'esprit géométrique (10), des propriétés communes à toutes choses, dont la connaissance ouvre l'esprit aux plus grandes merveilles de la nature. La principale comprend les deux infinités qui se rencontrent dans toutes ; l'une de grandeur, l'autre de petitesse". Et Pascal de prendre quatre exemples de grandeurs : un espace, un temps, un mouvement, et un nombre (11). Quelle que soit une grandeur, on peut toujours obtenir plus grand par multiplication et plus petit par division.

Ces deux propositions constituent, la première ce qu'on appelle depuis O. Stolz (1883) l'axiome d'Archimède

$$\forall xy \; \exists m \; (m \in \mathbb{N} \; \& \; mx > y),$$

la seconde ce que nous désignerons désormais ici comme le symétrique de cet axiome

$$\forall xy \; \exists m \; (m \in \mathbb{N} \; \& \; x : m < y).$$

Ces deux principes, reconnaissance d'un double infini potentiel, sont à la fois pour Pascal la signature du Dieu créateur apposée sur sa création et l'origine du déchirement de l'homme placé entre les deux. Ici encore les travaux mathématiques de Pascal avaient pu contribuer à mettre en relief l'importance de ces axiomes.

Le thème des deux infinis n'est pas en effet si proprement pascalien qu'il ne se retrouve déjà largement dans le Brouillon projet de Desargues. L'axiomatisation que Hilbert, en 1899, donnera de la géométrie établit clairement que la géométrie projective peut se passer des axiomes de la congruence et de l'axiome des parallèles. Ainsi la possibilité même de cette géométrie projective fait-elle apparaître l'axiome d'Archimède comme beaucoup plus fondamental que l'axiome d'Euclide.

L'importance de l'axiome d'Archimède et de son symétrique se trouvait en outre soulignée par l'usage qu'en faisait la méthode des indivisibles, usage dont Pascal montre en particulier dans sa Potestatum numericarum summa qu'il était pour lui beaucoup plus qu'implicite. Rappelons que, dans ce traité, Pascal donne le moyen de calculer la somme des puissances entières des m premiers termes d'une progression arithmétique ; il note lui-même que ce résultat permet de carrer toutes les variétés de paraboles.

Contentons-nous du cas élémentaire où le premier terme de la progression est 1 , où la raison de la progression est 1 , et où la puissance à laquelle on élève chaque terme est 3. La méthode de Pascal nous enseignerait, si ce résultat n'avait pas déjà été connu bien avant lui, que la somme des cubes des $\underline{m}$ premiers entiers est

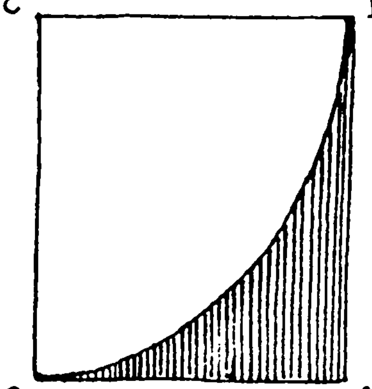
$$\frac{m^2\ (\ m + 1)^2}{4}$$

Par ce résultat nous pouvons immédiatement carrer la "parabole" d'équation

$$y = kx^3$$

selon la procédure de Cavalieri, Supposons en effet le triligne OAB constitué par <u>m indivisibles</u> élevés en ordonnées à partir de OA. La somme de ces <u>indivisibles</u> est :

$$1k + 2^3k + 3^3k + \dots + m^3k = (1 + 2^3 + 3^3 + \dots + m^3)k = \frac{m^2\ (m + 1)^2k}{4}$$



Le rapport du triligne OAB au rectangle OABC se trouve donc être :

$$\frac{\dfrac{m^2\ (m + 1)^2k}{4}}{m \times km^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{4m^2}$$

Si j'ai le droit d'admettre en fin de compte que ce rapport est de $\frac{1}{4}$ et, par le fait même, que le rapport du triligne OBC au rectangle OABC est de 3/4, c'est que les quantités $1/2m$ et $1/4m^2$ peuvent être rendues plus petites que toute grandeur donnée, à la seule condition de choisir pour $\underline{m}$

un entier fini suffisamment grand. Mais, pour ne raisonner que sur le premier de ces deux termes, ce qui nous assure que nous trouverons toujours un m suffisant à cette fin, c'est-à-dire que

$$\forall y \exists m \left(m \in \mathbb{N} \;\&\; \frac{1}{2m} < y\right)$$

c'est bien ce que nous avons appelé le symétrique de l'axiome d'Archimède, dans lequel nous venons de nous contenter de donner à la variable x la valeur 1/2.

D'où la conclusion de Pascal (12) :

> "J'ai tenu à ajouter ces quelques remarques familières à ceux qui pratiquent les indivisibles, afin de faire ressortir la liaison, toujours admirable, que la nature, éprise d'unité, établit entre les choses les plus éloignées en apparence. Elle apparaît dans cet exemple, où nous voyons le calcul des dimensions des grandeurs continues se rattacher à la sommation des puissances numériques."

Quel est ce principe de liaison commun, d'une part à l'ensemble infini, mais dénombrable, des nombres rationnels, et d'autre part au continu, c'est-à-dire à l'ensemble infini, cette fois non dénombrable, des réels ? C'est l'axiome d'Archimède et son symétrique, effectivement propres aux deux. C'est là que se trouve l'unité de la nature, cette connexion, qu'on n'admirera jamais assez, (numquam satis mirata connexio).

Mais ce double infini ici rencontré par Pascal reste simple possibilité d'aller toujours au-delà. C'est l'infini en puissance, que Aristote, au livre III de sa Physique, caractérisait en ces termes (13) : "infini est... ce au delà de quoi on peut toujours continuer à prendre quelque chose de nouveau". L'infini, en ce sens, ne peut se donner comme totalité. A cette nature potentielle de l'infini correspond l'expérience existentielle que nous en avons selon Pascal et que résume l'axiome d'Archimède, axiome dont il faut souligner qu'il permettait au Syracusain d'éliminer de son discours mathématique ou physique toute mention de l'infini (14), tandis que son disciple subversif y voit au contraire la marque, dans la nature, de l'infinité divine.

On ne s'étonnera donc pas de voir Cantor, par ailleurs si attentif à l'oeuvre de Pascal, garder le silence sur le thème des deux infinis, peut-être le plus populaire de cette oeuvre. Car si l'infini actuel se trouve quelque part chez Pascal, c'est ailleurs qu'il faut le chercher.

*

* *

III - L'INFINI NON DENOMBRABLE

Si un usage de l'axiome d'Archimède que nous qualifierons de positif ne livre à Pascal, comme nous venons de le voir, que l'infini potentiel, on rencontre chez lui néanmoins l'infini actuel à deux reprises.

Rappelons que le contenu de l'axiome d'Archimède, au livre V des Eléments d'Euclide, se présente, non pas sous la forme d'un axiome, mais sous celle d'une définition (définition 4 ou 5 selon les éditions) :

> Les grandeurs sont dites avoir raison l'une à l'autre, quand l'une étant plusieurs fois multipliée peut arriver à surpasser l'autre.

Pascal, dans De l'esprit géométrique (15), transforme, de manière très caractéristique, cette définition, en substituant à l'expression "avoir raison l'une à l'autre" l'expression, "être de même genre", comme s'il les considérait toutes deux comme strictement synonymes :

> Euclide... définit ainsi les grandeurs homogènes : "Les grandeurs, dit-il, sont dites être de même genre, lorsque l'une étant plusieurs fois multipliée peut arriver à surpasser l'autre".

Ainsi la propriété exprimée cesse-t-elle d'être, dans une telle présentation, une évidence inséparable de la considération de presque (16) toute grandeur ; elle n'est plus que la marque propre à certains ensembles de grandeurs, dits aujourd'hui archimédiens. Or ceci est le fondement de la doctrine pascalienne des ordres : quand des grandeurs (par exemple des segments de droite entre eux, des surfaces entre elles, des volumes entre eux) constituent un ensemble archimédien, Pascal dira qu'elles sont du même ordre ; dans le cas inverse, d'un autre ordre.

Ici il ne s'agit plus de propriété intuitivement donnée dans une sorte d'évidence ; c'est tout au contraire une simple question de définition :

> ... un indivisible, multiplié autant qu'on voudra, ne fera jamais une étendue. Donc il n'est pas de même genre que l'étendue par la définition des choses du même genre (17).

Et Pascal de fournir, comme exemples de grandeurs qui ne peuvent constituer d'ensemble archimédien, le zéro avec les nombres (18), repos et mouvement, instant et temps, point et ligne, ligne et surface, surface et volume, pour conclure :

> ... toutes ces choses sont hétérogènes à leurs grandeurs, parce qu'étant infiniment multipliées, elles ne peuvent jamais faire que des indivisibles d'étendue.

Rappelons que, dans le fameux texte des Pensées sur l'ordre des corps, l'ordre des esprits, l'ordre de la charité (19), la distinction de ces trois ordres est d'être "différents de genre", au sens de la définition revue par Pascal, du livre V des Eléments d'Euclide. Car Pascal y dit explicitement que les grandeurs spirituelles "n'ont pas de rapport" aux grandeurs charnelles et que les grandeurs de la charité "n'ont nul rapport" aux deux ordres de grandeur précédents ; "car elles n'y ajoutent ni ôtent". C'est-à-dire que toutes ces grandeurs ne constituent d'ensemble archimédien qu'à l'intérieur de leurs différents ordres.

Nous avions vu que l'usage positif que faisait Pascal de l'axiome d'Archimède dans ses réflexions sur les deux infinis ne lui permettait pas d'aller au-delà de cet infini potentiel de la tradition aristotélicienne, dans lequel il enfermait le vertige de l'homme. En revanche, nous voyons maintenant que l'usage négatif que fait Pascal de la définition d'Euclide à l'origine de la doctrine des ordres lui permet de toucher l'infini actuel. Mais il faut observer que, de cet infini actuel, que nous fait rencontrer la doctrine des ordres, tous les exemples proposés par Pascal ressortissent à l'infini non-dénombrable : instant-temps, point-ligne, ligne-surface, etc., tous ont la puissance du continu. Tout se passe comme si l'usage positif de l'axiome d'Archimède et négatif de la définition empruntée au livre V conduisait directement Pascal du simple infini potentiel à l'infini actuel non dénombrable ; en sorte que, dans le texte que nous venons de citer, le contenu de la proposition "elles n'y ajoutent ni ôtent" est plus proche de

$$2^{\aleph_0} + n = 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} - n$$

n désignant un entier fini quelconque, que de

$$\aleph_0 + n = \aleph_0 = \aleph_0 - n$$

Pascal saute en quelque sorte à pieds joints par-dessus le dénombrable.

*

* *

IV - L'INFINI DENOMBRABLE

Il semble bien cependant que l'*infini dénombrable* surgisse au moins une fois dans l'oeuvre de Pascal. Laissons-nous guider à cet égard par la référence que nous en fournit Cantor. Celui-ci, après avoir critiqué le refus de l'*infini actuel* par la plupart des grands mathématiciens et philosophes de l'ère post-scolastique, félicite (20) Pascal, ainsi que "son ami Antoine Arnauld", de n'avoir pas cédé à ce courant et de s'être prononcé au contraire en faveur des *nombres infinis actuels*. Il renvoie, sans plus de précisions, aux pages 302-303 du tome I de l'édition Hachette des *Oeuvres complètes* de Pascal, c'est-à-dire au fameux texte sur le *pari*.

Rappelons-le raisonnement de Pascal (21) :

> Nous connaissons qu'il y a un infini, et ignorons sa nature. Comme nous savons qu'il est faux que les nombres soient finis, donc il est vrai qu'il y a un infini en nombre. Mais nous ne savons ce qu'il est : il est faux qu'il soit pair, il est faux qu'il soit impair, car, en ajoutant l'unité, il ne change point de nature ; cependant c'est un nombre, et tout nombre est pair ou impair (il est vrai que cela s'entend de tout nombre fini).

Ce passage étant l'un des rares de Pascal où le mot *nombre* soit employé comme synonyme d'*entier*, on est obligé de reconnaître, sous cet "infini en nombre", ce que Cantor désignera par $\aleph_0$, c'est-à-dire la *puissance* de l'ensemble des nombres entiers finis. Pascal n'est certes pas le premier à faire cette rencontre. En particulier, parmi ses devanciers dont la lecture a pu à cet égard l'influencer, il y a eu, comme Cantor lui-même s'en est rendu compte (22), St Augustin, qui écrivait au livre XII, chapitre 19, du *De civitate Dei*, parlant des nombres : "singuli quique finiti sunt sed omnes infiniti sunt", *chaque nombre est fini, mais tous sont infinis*, ou, disons encore en modernisant cette fois la traduction, *chaque nombre est fini, mais leur ensemble est infini.*

Mais le raisonnement de Pascal mérite d'être analysé pour lui-même ; il repose, au moins implicitement, sur l'enchaînement des trois propositions suivantes : ou bien le nombre des entiers finis est lui-même fini ou bien il est infini, en vertu du principe du tiers exclu ; or il n'est pas fini ; donc il est infini. C'est un raisonnement apagogique dans la meilleure tradition euclidienne, telle que Clavius en particulier, dans ses commentaires des Eléments, en avait précisément reconnu la nature. Ce raisonnement par l'absurde dont l'enseignement des Jésuites, à la suite de Clavius, tiendra toujours à souligner l'importance, ne fait pas l'affaire des cartésiens, qui préfèreraient s'en passer pour la pratique de la démonstration mathématique, dans leur idée que la raison procède authentiquement par intuition du vrai. En revanche il convient parfaitement au jansénisme de Pascal, pour qui la raison déchue par le péché originel ne peut rencontrer directement que le faux, à partir duquel le raisonnement par l'absurde permet ensuite de s'acheminer, comme à reculons, vers le vrai. Le fondement anthropologique du raisonnement apagogique c'est le fait que l'homme "ne connaît naturellement que le mensonge... et ne doit prendre pour véritables que les choses dont le contraire lui paraît faux" (23).

Mais ce nombre infini, ainsi apagogiquement atteint, est-il affecté des propriétés caractéristiques des nombres entiers, comme la parité ou l'imparité ? Ces deux termes sont si peu ambigus que Pascal, dans un autre contexte, prenait leur usage commun comme exemple de définition géométrique : "j'appelle tout nombre divisible en deux également, nombre pair" (24). Une fois de plus (mais cette fois bien explicitement) Pascal invoque le tiers exclu : un nombre quelconque n est divisible par deux ou n'est pas divisible par deux, c'est-à-dire est pair ou impair ; or si n est pair, $n + 1$ est impair et inversement, si n est impair, $n + 1$ est pair ; mais, puisque, par addition de l'unité à l'infini, celui-ci "ne change point de nature", c'est-à-dire, puisque, si n est infini, $n + 1 = n$, nous serons obligés d'admettre que ce nombre infini n est pair si et seulement si il est impair, ce qui est une contradiction, dans la mesure où parité et imparité ont été préalablement définies comme la négation l'une de l'autre. Donc le nombre infini, dont nous avions rencontré apagogiquement l'existence, ne peut être ni pair ni impair. Pascal ira-t-il jusqu'à mettre en question ces propriétés spécifiquement reconnues au nombre ? il hésite : "cependant c'est un nombre, et tout nombre est pair ou impair" ; puis il se ravise et lâche la remarque, aux yeux de Cantor, fondamentale : "il est vrai que cela s'entend de tout nombre fini".

Cantor félicite ici Pascal de dénoncer (reconnaissons-le : un peu implicitement) le préjugé fondamental, le πρῶτον ψεῦδος (c'est son expression) qui est à la base du refus des transfinis : ceux qui rejettent le transfini n'accepteraient les nombres infinis que pourvus des propriétés des nombres finis, alors qu'il s'agit d'une espèce de nombres, d'une race de nombres, toute nouvelle, "ein ganz neues Zahlengeschlecht" (25).

Cantor pourra prendre l'exemple (26) du premier des ordinaux infinis, pour lesquels il a préalablement défini les opérations d'addition et de multiplication, en soulignant que ces opérations, pour cet ensemble de nombres élargi, perdaient désormais leur commutativité. Soit donc le nombre ordinal infini ω :

1) il est à la fois pair et impair, en ce sens qu'il existe bien un nombre α (à savoir lui-même : $\alpha = \omega$) tel que

$$\omega = \alpha \times 2 \qquad \text{et} \qquad \omega = 1 + \alpha \times 2$$

2) il n'est ni pair ni impair, en ce sens qu'on ne peut indiquer un nombre α tel que

$$\omega = 2 \times \alpha \qquad \text{ou} \qquad \omega = 2 \times \alpha + 1.$$

Quand on ouvre la porte à l'infini, le terme de divisibilité devient ambigu, parce qu'il couvre des propriétés qui étaient équivalentes dans l'ensemble des nombres finis et désormais ne le sont plus. Cantor ne commet aucun abus en reconnaissant Pascal à cet égard comme son devancier.

Mais il est un point sur lequel les deux auteurs s'écartent nettement l'un de l'autre. Nous venons de voir en effet que le pessimisme janséniste de Pascal s'accordait à l'idée qu'on ne pouvait rencontrer l'infini qu'au terme d'une démarche négative. C'est bien pourquoi "nous connaissons l'existence de l'infini et ignorons sa nature" (27). Théologiquement comme mathématiquement nous savons que l'infini existe, mais, comme la voie par laquelle nous atteignons la certitude de son existence est apagogique, nous ne pouvons rien en dire. Pour Cantor au contraire, nous pouvons accéder à une connaissance positive des transfinis, pour cette raison que ce qui caractérise les nombres finis ou infinis c'est la possibilité de mettre les éléments de certains ensembles en correspondance biunivoque : un transfini comme $\aleph_0$ ou $2^{\aleph_0}$ ne se définit pas d'une autre manière qu'un quelconque entier fini. Pour atteindre les transfinis, Cantor n'a nul besoin de raisonner par l'absurde ; aussi selon lui, et contrairement à Pascal, non seulement nous connaissons l'existence des transfinis, mais nous connaissons leur nature. Pour le dire plus brutalement, les transfinis ont leurs théorèmes.

En résumé, la réflexion de Pascal repose sur une bipartition :

1) il y a le fini, qui est connaissable, c'est-à-dire dont nous pouvons connaître à la fois l'existence et la nature,
2) et il y a l'infini, qui est inconnaissable en ce sens que, bien que nous puissions en reconnaître apagogiquement l'existence, nous en ignorerons toujours la nature.

La réflexion de Cantor se fonde au contraire sur une tripartition :

1) il y a le fini,

2) il y a le transfini, l'union du fini et du transfini constituant le connaissable,

3) et il y a l'absolu, qui est inconnaissable, l'union du transfini et de l'absolu constituant l'infini.

Cette tripartition s'exprime dans l'adage latin : "Omnia seu finita seu infinita definita sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt" (28).

Devons-nous en conclure que l'absolu désormais, pour Cantor, c'est Dieu seulement? Il semble que sur ce point sa pensée ait évolué. Encore vers 1895, à propos des cardinaux, il exprimait (29) l'espoir imprudent de parvenir à montrer que les transfinis, non seulement se laissent ordonner selon leur grandeur, mais "dans cet ordre, comme les nombres finis, quoique dans un sens élargi, constituent un 'ensemble bien ordonné' ". Mais l'année suivante, c'est-à-dire un an avant sa publication par Burali-Forti, Cantor avait fait part à Hilbert de l'antinomie de tous les nombres ordinaux, qu'il avait rencontrée, apparemment le premier. Dans sa lettre à Dedekind du 28 juillet 1899 (30), il montre, successivement, que le système de tous les ordinaux est "une multiplicité absolument infinie inconsistante", puis que le système de tous les cardinaux transfinis constitue "une suite absolument infinie également inconsistante". Cantor modifie alors, ou du moins précise en conséquence, sa terminologie : absolu devient ~~simple~~ synonyme d'inconsistant.

Cet absolu laisse, si l'on peut dire, la théologie, pour réintégrer les mathématiques, qui cette fois nous l'ont fait rencontrer. "Une multiplicité, écrit Cantor (31), peut être ainsi faite que l'admission d'une 'coexistence' de tous ses éléments conduise à une contradiction, en sorte qu'il soit impossible de concevoir la multiplicité comme une unité, comme 'chose achevée'. J'appelle de telles multiplicités des multiplicités absolument

<u>infinies</u> ou encore <u>inconsistantes</u>". Cantor, en fin de compte, retrouve bien, au terme de ses seules spéculations logico-mathématiques, un absolu <u>inconcevable</u>, mais celui-ci, loin de se confondre, comme chez Pascal, avec le pur et simple <u>infini</u>, n'est plus de celui-ci, pour employer une métaphore, que l'extrême horizon.

*

* *

N O T E S

(1) Cantor, Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, herausgegeben von Ernst Zermelo, Berlin 1932, pp. 357-367. C'est à cette édition que nous nous rapporterons désormais sous la référence abrégée de Abhandlungen. Le seul trait notable (pour notre sujet) de ce texte est la présence d'un lapsus calami, qu'on serait tenté d'attribuer à Cantor lui-même, à moins qu'il ne soit de son éditeur, Zermelo (nous n'avons pu faire la vérification dans le texte original des Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle). Pascal écrit en effet à Fermat le 29 juillet 1654 que Méré "ne comprend pas qu'une ligne mathématique soit divisible à l'infini et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini" ; le texte des Abhandlungen substitue ici à "en nombre fini" "en nombre infini" et l'éditeur, Zermelo, construit même sur ce lapsus sa note 2, p. 367.

(2) Cf. Abhandlungen, pp. 372 et 412. Cette édition des Oeuvres complètes de Pascal à dû faire l'objet de réimpressions ; car l'exemplaire sur lequel nous avons pu vérifier les références fournies par Cantor était daté de 1864.

(3) Abhandlungen, p. 405, note 1.

(4) On observera que Pascal emploie ici le même mot ("indéfini") que Descartes.

(5) Ceci revient évidemment à comparer, sur un cylindre, le cercle obtenu par une section perpendiculaire à l'axe avec l'ellipse obtenue par une section faisant un angle de 60° avec la précédente.

(6) Pascal, Oeuvres complètes, Bibliothèque de la pléiade, p. 68. C'est à cette édition que nous nous rapporterons désormais, sous la référence abrégée de Oeuvres complètes.

(7) Cf. Jurgis Baltrusaitis, Anamorphoses ou perspectives curieuses, Olivier Perrin, éditeur, 1955 et le catalogue de l'exposition Anamorphoses, Musée des arts décoratifs, Paris, 1975.

(8) Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen ?, Vieweg, Braunschweig, 1888, p. 17.

(9) Abhandlungen, p. 151.

(10) Oeuvres complètes, pp. 583-584.

(11) Le mot "nombre", dans ce contexte, renvoie, comme la plupart du temps chez Pascal, à l'ensemble des réels positifs.

(12) *Oeuvres complètes*, p. 1432. Le texte latin original est à la p. 171.

(13) *Physique*, 207 a.

(14) Le mot *infini* (*apeiros*) n'apparaît que deux fois tout au long de ce qui nous est parvenu de l'oeuvre d'Archimède. Ces deux occurrences, au début de *L'arénaire*, se situent à trois lignes d'intervalle l'une de l'autre, la seconde renvoyant à la première et celle-ci servant seulement à rapporter la thèse qu'Archimède s'attache à réfuter, selon laquelle le nombre des grains de sable serait infini.

(15) *Oeuvres complètes*, p. 589.

(16) "... La nature ayant gravé son image et celle de son auteur dans toutes choses, elles tiennent presque toutes de sa double infinité" ; *Oeuvres complètes*, p. 1107.

(17) Ibid., p. 590.

(18) Cf. notre note 11.

(19) *Oeuvres complètes*, pp. 1341-1342.

(20) *Abhandlungen*, p. 372.

(21) *Oeuvres complètes*, p. 1212.

(22) *Abhandlungen*, p. 401, note 3.

(23) *Oeuvres complètes*, p. 585.

(24) Ibid., p. 577.

(25) *Abhandlungen*, p. 372.

(26) Ibid., pp. 178-179.

(27) *Oeuvres complètes*, pp. 1212-1213.

(28) *Abhandlungen*, p. 176.

(29) Ibid., p. 295.

(30) Ibid., pp. 443-447.

(31) Ibid., p. 443.
