SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE ET MATHÉMATIQUES

JEAN DIEUDONNÉ

La notion de rigueur en mathématiques

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1982, fascicule 11
« La notion de rigueur en mathématiques », , p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1982___11_A1_0>

LA NOTION DE RIGUEUR EN MATHEMATIQUES

Par Jean DIEUDONNE

Les mots de "rigueur" ou de "raisonnement rigoureux" qualifiant les démonstrations mathématiques sont utilisées dès le XVIII^{e} siècle (par exemple par d'Alembert en 1748), et plus fréquemment à partir du début du XIX^{e} siècle : par réaction contre la pratique de leurs prédécesseurs qui se bornaient à invoquer "la généralité de l'Analyse" pour justifier des affirmations douteuses, Gauss et Cauchy entre autres leur opposent "la rigueur qu'on exige en géométrie" (Cauchy).

Après eux, les analystes du XIX^{e} siècle se targueront à qui mieux mieux de leurs démonstrations faites "de façon complète et rigoureuse" (Poincaré), ce qui n'empêchera pas leurs successeurs d'y trouver souvent des lacunes ! L'abus de ces malencontreuses marques d'autosatisfaction a fini par tendre à dévaleuer le concept même de "rigueur", à en souligner le caractère changeant avec les époques, voire à finir par en faire une sorte d'idéal dont on peut s'approcher mais qui demeure toujours inaccessible ; contraste frappant avec la tradition héritée de Descartes et Pascal qui voyaient les démonstrations mathématiques comme seules capables de mener à la "vérité". Ce scepticisme à l'égard de la rigueur est encore exprimé plus ou moins implicitement par certains mathématiciens, comme par exemple R. Thom ; et il a trouvé récemment une expression fracassante dans l'ouvrage "Proofs and refutations" de I. Lakatos, qui semble avoir eu un grand succès auprès des philosophes, et dont nous aurons à reparler.

Je me propose de chercher à avoir des vues plus nuancées sur cette question, sans passion ni exagération ; je pense que pour cela il faut avoir une idée précise de l'évolution historique des diverses branches des mathématiques, ce qui fait souvent défaut dans les affirmations péremptoires sur le sujet.

Comme il s'agit de controverses antérieures à 1920, donc étant apparues à une époque où l'unification actuelle de la mathématique n'était pas réalisée, il convient d'examiner séparément chacune des disciplines traditionnelles. Si distinctes qu'elles soient dans l'esprit de la plupart des mathématiciens, elles ont toutefois en commun la démarche des démonstrations, telle qu'elle est déjà décrite par Platon dans la République comme un dialogue avec un interlocuteur fictif, où, "d'un commun accord", on part de "choses connues ,..., dont on n'a plus à rendre compte", sur lesquelles, "procédant par ordre", on parvient "au but que l'on s'était proposé". Comme avant Brouwer il n'y a jamais eu de divergences entre mathématiciens sur ce qui constitue une opération logique correcte, les controverses sur la "rigueur" ne peuvent venir que de deux sources : ou bien on ne s'entend pas sur la définition des objets mathématiques, ou bien on ne leur attribue pas les mêmes propriétés de base ("axiomes" ou "postulats" selon la terminologie traditionnelle)

I) Arithmétique.

Avant Dedekind et Peano, il n'y a jamais de besoin de définir les entiers naturels ; ce sont des notions communes sur les propriétés desquelles tout le monde est d'accord. Contrairement à la façon dont il procède en géométrie, Euclide ne dresse pas non plus de liste des propriétés sur lesquelles il base ses démonstrations d'Arithmétique ; il est facile d'en détecter quelques-unes, comme le fait qu'une suite décroissante d'entiers est stationnaire, ou la commutativité de l'addition, ou l'existence de la différence $a - b$ pour $b < a$; au XIII^e siècle, Campanus tentera d'en faire une liste (4 axiomes et 10 postulats) qui reste incomplète (il ne mentionne pas la commutativité de l'addition) ; en tout cas, les démonstrations d'Euclide en Arithmétique n'ont jamais été contestées, et sont restées des modèles d'ingéniosité mathématique, aussi convaincants aujourd'hui qu'il y a 2000 ans.

II) Algèbre.

Il faut rappeler qu'avant Viète (début du XVII^e siècle) on ne peut guère parler d'algèbre au sens actuel ; mais sous la forme géometrique, les opérations algébriques sur les nombres réels positifs étaient en usage depuis les Grecs, et bien que non codifiées explicitement, leurs propriétés ont toujours été considérées comme "évidentes" et, ici encore, n'ont jamais donné lieu à des controverses.

L'extension de ces propriétés aux nombres négatifs a pu soulever des doutes hors du milieu des mathématiciens professionnels, beaucoup, dans le public cultivé, ayant du mal à admettre par exemple que le produit de deux nombres négatifs soit positif ! Mais comme le dit d'Alembert, à la fin de l'article NEGATIF de l'Encyclopédie où il a essayé de faire comprendre la question à tous ses lecteurs (et n'y arrive guère) ".. les règles des opérations algébriques sur les quantités négatives sont admises généralement par tout le monde et reçues généralement comme exactes, quelque idée qu'on attache d'ailleurs à ces quantités". C'est seulement lorsque les algébristes italiens du XVI^e siècle ont commencé à manipuler des nombres complexes que les mathématiciens, jusqu'au début du XIX^e siècle, se sont sentis mal à l'aise dans les calculs sur ces nombres "impossibles" dont ils ne pouvaient donner de définition ; mais tout est rentré dans l'ordre dès que leur représentation géométrique par les points du plan a été généralement acceptée.

III) Géométrie.

L'attitude des mathématiciens vis-à-vis des démonstrations en géométrie est curieusement ambiguë. D'une part, ils les considèrent comme des modèles de "rigueur", comme en témoignent les expressions employées par Gauss et Cauchy citées plus haut ; la raison en est sans doute que c'est alors la seule branche des mathématiques où définitions et axiomes sont énoncés explicitement. Mais d'autre part, depuis le XVI^e siècle, on avait observé que les preuves d'Euclide ne reposaient pas exclusivement sur les axiomes énoncés par lui : par exemple Clavius note que l'existence de la quatrième proportionnelle est utilisée sans qu'aucun axiome la garantisse, et Leibniz remarque que le fait que deux cercles se coupent si chacun passe le centre de l'autre est affirmé sans aucune démonstration. Des controverses sur la valeur probante des démonstrations géométriques auraient donc été possibles, et il est facile de donner des exemples où l'absence de certaines notions chez Euclide pourrait conduire à des conclusions erronées (par exemple la "preuve" que tout triangle est isocèle, en prenant l'intersection de la bissectrice d'un angle avec la médiatrice du côté opposé en plaçant cette intersection à l'intérieur du triangle, notion non définie par Euclide). Mais en fait, il ne semble jamais y avoir eu de telles controverses en géométrie euclidienne classique (en entendant par là la partie où n'intervient aucune considération topologique). Peut être faut-il en voir la raison dans l'équivalence, établie par la méthode des coordonnées de Descartes et Fermat, entre les relations de cette théorie et leurs traductions algébriques, celles-ci ne soulevant aucune difficulté.

Quant aux géométries non euclidiennes, ce n'est pas la correction des raisonnements de leurs fondateurs qui a été mise en cause, mais leur possibilité logique, et les doutes à cet égard ont cessé lorsqu'on a obtenu des modèles de ces géométries en algèbre.

IV) Analyse.

On sait que, contrairement aux théories mathématiques précédentes, c'est ici que surgissent de toute part les contestations et les controverses, à partir du XVIIe siècle. La raison en est apparente : il s'agit de nouvelles notions ou de nouveaux procédés de calcul, dont aucune définition ne peut être trouvée dans les écrits antérieurs ; chacun s'en remet donc à son "intuition" pour mener ses calculs et ses raisonnements, sans se soucier en général de tenter de rattacher ce dont il parle à des concepts déjà acquis et ne soulevant pas de discussion.

Un exemple typique de la confusion qui en résulte est la fameuse controverse sur les logarithmes des nombres complexes au début du XVIIIe siècle : il s'agit de prolonger la fonction $x \to \log x$ lorsque x prend des valeurs complexes $\neq 0$. Or cette fonction jouit de nombreuses propriétés connues à l'époque : elle est injective, satisfait à l'équation fonctionnelle $\log(xy) = \log x + \log y$, a pour différentielle dx/x, et on a l'expression de $\log(1+x)$ par une série entière. Mais en admettant sans justification qu'il est possible de prolonger la fonction aux nombres complexes (ou même seulement aux nombres réels négatifs), en conservant l'une ou l'autre de ces propriétés, on tombe aussitôt dans des contradictions. Par exemple, en admettant que la fonction prolongée est encore injective, Leibniz soutient que les logarithmes des nombres négatifs doivent être imaginaires, puisque $\log x$ prend toutes les valeurs réelles pour $x > o$; par contre, Jean Bernoulli prétend que l'on doit toujours avoir $\log(-x) = \log x$, puisque $(-x)^2 = x^2$, d'où $2 \log(-x) = 2 \log x$ par l'équation fonctionnelle ! C'est seulement lorsqu'Euler, en 1749, revient à la définition de $y = \log x$ comme solution de l'équation $e^y = x$, et qu'il examine quelles solutions peut avoir cette équation lorsqu'on donne à x une valeur complexe, qu'il découvre l'existence d'une infinité de déterminations du logarithme ; encore n'ose-t-il pas utiliser l'expression des parties réelles et imaginaires de e^{a+ib}, et préfère-t-il définir e^y pour y complexe comme limite de $(1 + \frac{y}{n})^n$ lorsque n tend vers l'infini, en résolvant donc d'abord l'équation $(1 + \frac{y}{n})^n = x$ avant de faire tendre n vers l'infini, de façon à ne faire que des calculs algébriques sur les nombres complexes.

Mais lorsqu'il s'agit de concevoir, par exemple, ce qu'est la "somme" d'une série, Euler n'a pas d'idées moins confuses que ses contemporains. Tant qu'il s'agit d'une série convergente à notre sens, il ne se pose pas de problème au XVIIIe siècle : on sait que le terme général tend vers 0 , mais que cette condition n'est pas suffisante pour assurer la convergence (la divergence de la série harmonique est connue depuis Jacques Bernoulli). Mais lorsqu'il s'agit de séries de <u>fonctions</u> $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, dont la somme au sens précédent existe pour <u>certaines</u> valeurs de x et est égale à une fonction connue $g(x)$, il se peut que cette fonction soit définie pour des valeurs de x telles que la série des $f_n(x)$ ne converge pas ; la tentation est alors grande de lui attribuer tout de même une "somme" égale à $g(x)$, de considérer que la "somme" des dérivées $f_n'(x)$ est la dérivée $g'(x)$, etc. Un exemple extrême est la façon dont Euler attribue une "somme" à la série

(1) $$1 - 1! + 2! - \ldots + (-1)^n n! + \ldots$$

Euler lui associe la série de fonctions

(2) $$y = x - 1!\, x^2 + 2!x^3 - \ldots + (-1)^n n!x^{n+1} - \ldots$$

et voudrait prendre pour "somme" de (1) la valeur $y(1)$. Malheureusement, le terme général de (2) ne tend vers 0 pour <u>aucune</u> valeur $x \neq 0$; mais cela n'arrête pas Euler, qui en dérivant terme à terme la série (2), montre que l'on a

(3) $$x^2y' + y = x$$

Or cette équation a effectivement une seule solution telle que $y(0) = 0$, donnée par

(4) $$y(x) = e^{1/x} \int_0^x e^{-1/t}\,dt$$

et Euler considère que cette fonction est la "somme" de (2), donc $y(1)$ la "somme" de la série (1).

On peut encore citer comme exemple de calculs sur des objets non définis les "changements de variables" où l'on remplace dans une intégrale une variable réelle par une variable imaginaire, sans savoir au juste ce que cela signifie.

Sans doute pouvons-nous voir dans ces hardiesses une prémonition de théories qui ne seront développées que bien plus tardivement, comme la théorie de Cauchy, les procédés de sommation ou les séries formelles, mais les mathématiciens du XVIIIe siècle qui les utilisent se rendent bien compte qu'ils ne peuvent les faire reposer sur rien de solide, même lorsque les résultats qu'ils obtiennent de cette façon sont exacts ; Euler, en substituant la valeur $x = -1$ dans la série entière développant $1/(1-x)$ autour de 0 ne trouve pas choquant d'obtenir la "somme"

(5) $$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} = \ldots$$

mais il reste perplexe lorsqu'il fait de même sur la série donnant $1/(1-2x)$ et obtient

(6) $$-1 = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} + \ldots$$

ne comprenant pas comment une somme de termes positifs peut être négative ! De même, après avoir obtenu les valeurs de certaines intégrales définies en passant à une variable imaginaire, Laplace insiste sur le fait qu'il vaudrait mieux vérifier le résultat par d'autres méthodes. On est donc bien loin des "raisons certaines et évidentes" où Descartes voyait l'essence des mathématiques !

Comme historiquement c'est la première fois depuis l'Antiquité que de tels doutes s'élèvent dans la mathématique, la réaction qu'ils déclenchent au début du XIXe siècle est aussi le premier exemple du scénario connu sous le nom de "retour à la rigueur", qui va se répéter ensuite plusieurs fois dans d'autres domaines. Il est assez caractéristique que ce processus ne soit pas du tout instantané, mais s'étale sur de nombreuses années. On peut même y distinguer deux étapes assez différentes. Dans la première, illustrée par les noms de Gauss, Bolzano, Cauchy et Abel, on donne pour la première fois les définitions précises des entités utilisées jusque là en Analyse infinitésimale : limite, somme d'une série, fonction continue, intégrale définie, en les ramenant essentiellement à des égalités et inégalités sur des nombres réels. Mais au début les choses se gâtent lorsqu'il s'agit d'appliquer ces définitions à des théorèmes tels que l'existence de l'intégrale d'une fonction continue ou la continuité d'une limite de fonctions continues, et il est assez surprenant de voir des mathématiciens tels que Cauchy et Abel trébucher sur l'utilisation de leurs propres définitions ! En fait, tout comme Euclide, ils mêlent quelquefois à des raisonnements appliquant strictement les définitions des assertions qui ne reposent que sur l'"intuition" qu'ils ont hérités de leurs prédécesseurs sans penser à devoir la justifier. Nous retrouverons d'autres exemples de paresse dans la vérification de propositions simples mais ennuyeuses ; s'ils l'avaient faite avec soin, elle les aurait conduits tout naturellement aux notions de convergence uniforme et de continuité uniforme que vont dégager leurs successeurs. C'est en effet dans une seconde étape, avec Riemann, Heine et surtout Weierstrass, que l'on acquiert la patience de suivre pas à pas la marche des calculs d'inégalités et l'ordre des quantificateurs. C'est cette prériode de flottement, entre 1820 et 1860, que cite Lakatos à l'appui de sa thèse sur les fluctuations de la notion de rigueur, qu'il prétend être inéluctables et permanentes dans tous les raisonnements mathématiques. Ce qu'il ne dit pas, et qui rend cet exemple sans valeur, c'est qu'après Weierstrass il n'y a <u>jamais</u> plus eu la moindre controverse sur le canon d'une démonstration d'Analyse tel qu'il l'avait fixé.

Il faut peut-être signaler ici que, contrairement à ce que l'on dit souvent, l'absence d'une "construction" des nombres réels à partir des nombres rationnels n'a rien à voir avec les tâtonnements dont nous venons de parler. Si on ne cherche pas avant 1860 à donner une <u>définition</u> explicite des nombres réels, tous les mathématiciens sont cependant implicitement d'accord sur leurs propriétés, exactement comme les Grecs n'avaient jamais élevé de doutes sur les propriétés des entiers naturels. C'est ce que montrent leurs raisonnements où l'on voit que les seules propriétés qu'ils utilisent sont que les nombres réels forment (dans notre langage) un corps ordonné, archimédien et complet. On sait que ces propriétés les caractérisent effectivement à isomorphie près et qu'on les emploie aujourd'hui comme système d'axiomes lorsqu'on ne veut pas s'asujettir aux pénibles "constructions" classiques, qui n'acquièrent leur importance que lorsqu'on veut prouver la non contradiction (relative) de ces axiomes.

On peut donc résumer l'évolution de la "rigueur" en Analyse comme une montée continue à partir de notions vagues et confuses, qui, à travers des vicissitudes diverses, se clarifient peu à peu, jusqu'à ce qu'on arrive à un palier stable, à partir duquel il n'y a plus aucune contestation parmi les mathématiciens sur ce qui constitue une démonstration correcte en Analyse.

En réalité, on peut considérer que c'est la même évolution qui s'est produite pour l'Arithmétique, l'Algèbre des nombres réels et la Géométrie euclidienne, sauf que l'on est parti de points différents de la courbe : dans les deux premiers cas, on était déjà au "palier" stable dès le début de la théorie (ou tout au moins dans les premiers textes que nous connaissons) ; tandis qu'on peut dire qu'avec la Géométrie euclidienne, on part à mi-chemin de la rigueur, le "palier" n'étant atteint qu'avec les axiomatisations complètes de Pasch et de Hilbert.

Nous allons voir qu'une évolution tout à fait semblable caractérise deux des théories modernes, la Topologie algébrique et la Géométrie algébrique.

V) Topologie algébrique.

Cette théorie n'a vraiment débuté qu'en 1900 avec H. Poincaré, mais a eu une "préhistoire" aux XVIIIe et XIXe siècles ; jusque vers 1850, les questions que nous y rattachons à présent sont considérées comme faisant partie de la géométrie ou de la combinatoire. Une des plus discutées est la fameuse formule d'Euler (1751) sur les "polyèdres"

$$(7) \qquad s - a + f = 2$$

où s, a, f sont les nombres de sommets, d'arêtes et de faces du polyèdre. Or, bien qu'on soit en Géométrie (le temple de la "rigueur" pour Gauss et Cauchy !) on chercherait en vain dans Euclide des définitions précises des mots "polyèdre", "arête" ou "face" ; il ne parle que de "solides", où il comprend entre autres les cônes et les sphères, et les seuls polyèdres qu'il définit explicitement sont les pyramides, les prismes et les polyèdres réguliers. Euler n'est pas plus explicite, et il n'est donc pas étonnant que selon les interprétations données aux nombres a et f dans (7), sa démonstration, comme celles de la douzaine de mathématiciens qui, dans le siècle qui la suit, s'occupent de cette formule, aient donné lieu à des controverses, et que pour certains "polyèdres", on ait même obtenu des valeurs autres que 2 pour le premier membre de (7) ; on est donc tout à fait dans la même situation qu'en Analyse pour la notion de logarithme d'un nombre complexe. En fait, il est vraisemblable qu'Euler n'ait pensé qu'aux polyèdres convexes, sans d'ailleurs les définir explicitement, car dans un travail de la même époque, il décompose un polyèdre en pyramides ayant un même sommet intérieur au polyèdre, ce qui ne se conçoit guère que si le polyèdre est convexe. En fait, ce n'est que XIXe siècle que l'on trouve une définition des polyèdres convexes, et encore n'est-elle pas la définition que nous donnons maintenant des ensembles convexes par la condition de contenir tout segment dont les extrémités sont dans l'ensemble ; c'est la surface du polyèdre qu'on appelle convexe lorsque le plan de chaque face est un plan d'appui. De toutes façons, il s'agit là d'une propriété qui n'est pas conservée par déformation et ce n'est pas avant 1860 qu'on a vu que la formule d'Euler restait valable lorsque les faces et les arêtes sont courbes, moyennant des conditions qui ne sont plus de nature géométrique, mais topologiques ; en fait c'est seulement von Staudt en 1847 qui formula ces conditions (qui reviennent à dire, dans le langage actuel, que le premier "nombre de Betti" du polyèdre est nul).

Ce sont ces controverses autour de la formule d'Euler dont l'histoire est développée avec prolixité par Lakatos sur environ 100 pages, et par lesquelles il prétend prouver l'impossibilité d'arriver à la rigueur en mathématiques. Il oublie simplement que l'histoire ne s'arrête pas en 1850. A moins que je n'aie mal lu, je n'ai pas réussi à trouver dans son ouvrage le mot de "Topologie", et il semble qu'en raison de son ignorance de l'histoire récente des mathématiques, il n'ait pas soupçonné que l'épisode auquel il s'attache faisait partie de toute une série de problèmes qui allaient marquer la naissance de cette science.

C'est Riemann le premier qui, poussé par la nécessité de classifier les "surfaces" compactes connexes qu'il introduit en Analyse complexe, songe à les différencier par un caractère numérique invariant par déformation (1851) : une des deux définitions qu'il donne de ce qui sera plus tard le "premier nombre de Betti" est le plus grand nombre b_1 de circuits (courbes homéomorphes au cercle) qu'on peut tracer sur la surface de façon que leur réunion ne "forme pas frontière" d'un ouvert ; ce terme n'est pas défini précisément, mais le contexte montre qu'une réunion de circuits F "forme frontière" d'un ouvert U si tout point d'un de ces circuits appartient à la fois à l'adhérence de U et à celle du complémentaire de U ; sur le tore, la réunion d'un méridien et d'un parallèle "ne forme pas frontière". Riemann lui-même, puis Betti et plus tard Poincaré dans son premier mémoire sur l'"Analyse situs" (1895) tenteront de bâtir une doctrine topologique en généralisant cette idée à un nombre quelconque de dimenseions ; mais ils n'aboutiront jamais ainsi qu'à des définitions vagues et à des résultats rendus simplement plausibles pour l'"intuition" (pour autant qu'on puisse parler d'"intuition" dans des espaces de dimension > 4).

Les choses ne vont changer que lorsque Poincaré, en 1900, s'étant sans doute rendu compte que cette voie ne mènerait à rien de solide, introduit les méthodes "combinatoires" qui marqueront le début de la Topologie algébrique en tant que véritable discipline mathématique. Il commence par donner une définition générale d'un "polyèdre" dans un espace euclidien de dimension arbitraire. C'est un cas particulier de ce qu'on appellera après lui un "complexe" rectiligne, dont la définition est plus simple : c'est une réunion d'un ensemble T d'un nombre fini d'ensembles disjoints, dont chacun est l'intérieur d'un polyèdre convexe (appelé aussi "cellule") dans la variété linéaire qu'il engendre ; en outre, la frontrière (dans cette variété linéaire) est réunion de polyèdres convexes de l'ensemble T Un espace admet une triangulation s'il est homéomorphe à un complexe rectiligne. Si α_j est le nombre des cellules de T dont la dimension (égale par définition à celle de la variété linéaire qu'elle engendre) est j , Poincaré attacha à T , par un procédé purement algébrique, n+1 "nombres de Betti" $b_o,b_1,\ldots,b_n$ (n étant la dimension maxima des cellules de T) et démontra la "formule d'Euler-Poincaré"

$$\alpha_o - \alpha_1 + \alpha_2 - \ldots + (-1)^n \alpha_n = b_o - b_1 + b_2 - \ldots + (-1)^n b_n \qquad (8)$$

Il chercha ensuite à prouver que les b_j sont des invariants topologiques, c'est-à-dire que si un espace admet deux triangulations différentes T, T', les nombres de Betti de T et T' sont les mêmes et ne dépendent donc que de la topologie de l'espace ; par exemple, pour la sphère, on a $b_o = b_2 = 1$ et $b_1 = 0$, et (8) n'est autre que la formule d'Euler (7). Mais les raisonnements de Poincaré sont tout à fait insuffisants, et il fallut les efforts de plusieurs mathématiciens durant une trentaine d'années pour parvenir à une démonstration correcte, et fonder ainsi ce qu'on appelle la théorie de l'homologie.

On voit donc que l'évolution de cette théorie s'est déroulée de façon tout à fait analogue à celle de l'Analyse, bien que plus rapidement : on part de notions vagues dont on n'est pas capable de donner une définition précise, puis une première étape permet de cerner de véritables objets mathématiques, sans qu'on sache encore bien les manier, et on finit par aboutir au "palier" à partir duquel il n'y a jamais plus de contestation sur les résultats de la théorie.

On ne peut manquer de remarquer à propos de cette théorie de l'homologie que les premiers rôles dans son élaboration, Riemann et Poincaré, ont été des mathématiciens universels s'il en fut jamais. En particulier, ils étaient rompus à la pratique de l'Analyse infinitésimale rigoureuse et en ont donné mainte preuve dans leurs écrits ; comment, dans leurs mémoires sur la Topologie algébrique, ont-ils pu se contenter de raisonnements reposant sur des affirmations sans aucune valeur probante, qu'ils auraient sévèrement condamnés dans d'autres domaines ? A la décharge de Riemann, on peut dire que les notions de variété différentielle ou analytique n'étaient pas formulées explicitement de son temps ; mais Poincaré en donne des définitions précises équivalentes aux nôtres ; après quoi, il n'hésite pas, par exemple, à raisonner comme si l'intersection de deux variétés analytiques était toujours une variété, alors qu'il connaît fort bien (par exemple pour les variétés algébriques) des exemples du contraire ! Il y a là comme un dédoublement de la personnalité qu'il est difficile de comprendre.

VI) Géométrie algébrique.

S'agissant d'une théorie nécessitant beaucoup de connaissances techniques préalables, je ne pourrai que donner une brève esquisse de son histoire. Jusque vers 1925, la théorie est essentiellement l'étude des courbes algébriques et des surfaces algébriques dans les espaces projectifs complexes ; on notera que du point de vue topologique, une courbe algébrique est un espace à 2 dimensions et une surface algébrique un espace à 4 dimensions.

Il faut examiner séparément l'histoire des courbes algébriques et celle des surfaces algébriques, qui sont bien différentes. La première débute avec Riemann en 1857, chez qui il n'est guère question de géométrie, mais de fonctions algébriques d'une variable complexe et de leurs intégrales, et c'est pour leur étude qu'il développe les premiers rudiments de l'homologie, dont nous avons parlé plus haut ; ses résultats sont extrêmement originaux et suggestifs, mais aucune de ses démonstrations ne peut être considérée comme correcte. A partir de 1863, Clebsch, puis Brill et Max Noether développent une théorie dont les objets sont les courbes algébriques dans le plan projectif complexe et les systèmes de points sur ces courbes, au moyen de laquelle ils veulent donner des preuves des théorèmes de Riemann en ne faisant pas usage de l'Analyse. Pour Riemann, l'objet fondamental était le corps des fonctions méromorphes (ou rationnelles, ce qui revient au même ici) sur la courbe, et il ne faisait donc pas de distinction entre deux courbes algébriques si elles ont même corps de fonctions rationnelles ; or on voit sans peine que cela signifie qu'il y a une correspondance <u>birationnelle</u> entre les deux courbes (qui peuvent être situées dans des espaces projectifs de dimensions différentes) ; cela veut dire que chaque coordonnée d'un point de l'une des courbes est fonction rationnelle des coordonnées de l'autre, chaque point de l'une des courbes, à l'exception possible d'un nombre fini d'entre eux, correspondant à un seul point de l'autre. On dit que chacune de ces courbes est un <u>modèle</u> du corps de fonctions considéré. Un des premiers buts de l'école "géométrique" de Brill et M. Noether fut d'obtenir par des transformations birationnelles des modèles <u>sans singularité</u> d'une courbe algébrique plane quelconque (qui en général a des points singuliers) ; dès 1870 ce but était atteint, toute courbe algébrique irréductible ayant un modèle sans singularité dans l'espace projectif à 3 dimensions, et en outre un tel modèle est <u>unique</u> à isomorphisme près. Un autre modèle était une courbe algébrique plane n'ayant que des points doubles à tangentes distinctes. Tout ceci était obtenu par des raisonnements essentiellement corrects, encore qu'au début les géomètres de cette école aient eu tendance à négliger certains types de points singuliers compliqués dont l'étude leur paraissait fastidieuse et dont ils étaient convaincus qu'ils ne créeraient pas de difficulté sérieuse ; effectivement, une étude exhaustive de toutes les singularités possibles d'une courbe algébrique fut rapidement faite et établit l'existence de modèles sans singularité de façon incontestable ; on avait donc certainement fait de cette manière un progrès décisif par rapport à Riemann, dont les intuitions géniales de nature topologique ou analytique restaient alors sans preuve. Un peu plus tard, en 1882, la théorie purement algébrique développée par Dedekind et Weber mettait définitivement hors de doute les théorèmes de Riemann ; la théorie avait donc évolué comme dans les exemples antérieurs, mais d'une façon beaucoup plus resserrée dans le temps, puisqu'on était très rapidement arrivé à la stabilité qui finit toujours par succéder aux tâtonnements du début.

Vers 1870, Cayley, Clebsch, M. Noether et Zeuthen entreprennent de fonder la théorie des surfaces algébriques sur le modèle de celle des courbes algébriques, en remplaçant les systèmes de points sur la courbe par des systèmes de courbes sur la surface ; mais ils se heurtent rapidement à des difficultés totalement imprévues : "la théorie des courbes algébriques est une invention du diable !". Un des premiers théorèmes qu'ils cherchèrent à prouver est l'existence, pour une surface algébrique irréductible quelconque dans l'espace projectif à 3 dimensions, d'un <u>modèle</u> sans singularité dans l'espace projectif à 5 dimensions ; mais la méthode calquée sur celle qui avait réussi pour les courbes et utilisant une suite de transformations birationnelles bien choisies rencontrait de formidables obstacles dans le cas des surfaces, dus à la complexité beaucoup plus grande des singularités ; par exemple un point singulier isolé peut se transormer en une courbe de points singuliers. Aussi, malgré les efforts d'une demi-douzaine de mathématiciens allemands, italiens et français, c'est seulement en 1935 qu'une preuve entièrement correcte de l'existence d'un modèle non singulier fut obtenue par l'Américain Walker.

En outre, des exemples très simples (le plan projectif et une quadrique non dégénérée) montrent qu'un modèle sans singularité <u>n'est pas unique</u> à isomorphisme près en général, contrairement à ce qui se passe pour les courbes. La géométrie sur les surfaces algébriques doit donc distinguer entre deux types de propriétés : celles qui sont invariantes par toute transformation birationnelle et celles qui ne sont invaraintes que par isomorphisme (transformation birationnelle bijective).

Comme il est souvent nécessaire, dans les raisonnements, d'utiliser un modèle sans singularité, il semble que la théorie aurait dû être bloquée dès le début. Mais les géomètres français et italiens préférèrent passer outre ; convaincus de l'existence d'un modèle sans singularité sans pouvoir le démontrer rigoureusement, ils n'hésitèrent pas à l'utiliser. Comme Riemann et Poincaré en Topologie, le remarquable sens géométrique des géomètres italiens (Castelnuovo et Enriques tous spécialement) leur permet de découvrir toute une série de propriétés souvent très profondes, dont la plupart ont pu être démontrées rigoureusement plus tard ; mais ils se rendaient compte du caractère précaire de ces résultats : "on ne réussit pas, pour le moment, à exposer des démonstrations de manière à éviter toute difficulté" avouent Castelnuovo et Enriques en 1897. D'où de nombreuses controverses entre les spécialistes des surfaces algébriques ; on verra encore, par exemple, à la date tardive de 1943, Enriques et Severi publier deux articles où chacun conteste les théorèmes de l'autre ! A partir de 1900, certaines parties des résultats obtenus antérieurement furent partiellement justifiés par Severi et Poincaré, puis par l'usage que fit Lefschetz de résultats de Topologie algébrique ; mais ce n'est qu'à partir de 1927 avec les méthodes purement algébriques de van der Warden, puis de Zariski et A. Weil, qu'on aboutira à une théorie entièrement rigoureuse (et valable par surcroît sur un corps de base quelconque). Et comme toujours, une fois ce palier atteint, toutes les controverses ont complètement cessé.

Pour conclure, que peut-on dire de la rigueur dans la mathématique actuelle ? Si on se borne aux mathématiciens qui utilisentla logique classique (et qui constituent la très grande majorité), est rigoureux pour eux un raisonnement comportant une chaîne de déductions faites suivant les règles de cette logique , et partant d'un système d'axiomes explicité ; comme ces règles logiques sont entièrement codifiées, la vérification d'une démonstration est en principe un travail mécanique, pourvu qu'elle soit suffisamment explicite ; ce travail peut être long et pénible et exiger d'être fait indépendamment par plusieurs spécialistes lorsqu'une démonstration comporte plusieurs centaines de pages, ce qui n'est plus rare aujourd'hui ; et pour certaines démonstrations, la vérification exige l'usage d'ordinateurs, ce qui introduit un certain élément d'incertitude. Bien entendu, chez le mathématicien qui imagine une démonstration nouvelle, le rôle de son "intuition" demeure prépondérant, la "mise en forme", ne venant qu'ensuite. Certains répugnent à une tâche aussi ingrate et malheureusement indispensable ; ils espèrent alors que certains de leurs collègues ou élèves s'y attelleront à leur place, ce qui en fait se produit en général au bout de quelques mois ou de quelques années, surtout si le théorème est jugé très important. Mais jusqu'à ce que la démonstration ait été assez explicitement écrite, puis vérifiée, le résultat doit demeurer en doute ; on en connaît à présent plusieurs exemples.