

SÉMINAIRE SCHÜTZENBERGER

JACQUES JUSTIN

Semi-groupes à générations bornées

Séminaire Schützenberger, tome 1 (1969-1970), exp. n° 7, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SMS_1969-1970__1__A6_0

© Séminaire Schützenberger
(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schützenberger » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

6 janvier 1970

SEMI-GROUPES À GÉNÉRATIONS BORNÉES

par Jacques JUSTIN

Introduction. - Nous notons $\underline{\mathbb{N}}$ (resp. $\underline{\mathbb{P}}$) l'ensemble des entiers naturels (resp. positifs) considéré ici comme un semi-groupe ⁽¹⁾ additif. Le produit des parties et les puissances d'une partie d'un semi-groupe sont définis de la façon habituelle.

Soit A un semi-groupe engendré par le système B de générateurs. Appelons i -ième génération (resp. i -ième population) de A (relativement à B) l'ensemble B^i (resp. $P_i = \bigcup_{j=1}^i B^j$). L'allure de $\text{Card } B^i$ ou $\text{Card } P_i$ considéré comme fonction de i entraîne des conséquences quant à la structure de A . Nous nous proposons ici de caractériser les semi-groupes "à générations bornées", c'est-à-dire tels que $\text{Card } B^i \leq m < \infty$, $\forall i \in \underline{\mathbb{P}}$. Le théorème suivant [2] est prouvé dans la première partie.

THÉORÈME 1. - Soit A un semi-groupe admettant un système B de générateurs. Si $\text{Card } B^i \leq m \in \underline{\mathbb{P}}$ ($\forall i \in \underline{\mathbb{P}}$), il existe un semi-groupe fini S et un entier j tels que l'idéal engendré par B^j est image homomorphe d'un sous-semi-groupe T du produit direct $\underline{\mathbb{N}} \times S$. En outre, j et $\text{Card } S$ peuvent être bornés par des fonctions de m seul. Enfin, $(\{n\} \times S) \cap T$ a pour image B^n , $\forall n \geq j$.

La deuxième partie généralise quelque peu ce résultat. Dans la troisième partie, nous en déduisons une propriété des semi-groupes répétitifs ([2], [3]).

1. Preuve du théorème 1.

Il est commode de supposer que $B^i \cap B^j = \emptyset$ si $i \neq j$; on peut alors parler sans ambiguïté de la longueur $|u| = i$ d'un élément $u \in B^i$. Ce faisant, on ne restreint pas la généralité. Posons en effet :

$$B_1 = \{(1, b) \mid b \in B\} \subset \underline{\mathbb{P}} \times A,$$

et soit A_1 le sous-semi-groupe de $\underline{\mathbb{P}} \times A$ engendré par B_1 . Il est clair que :

- (i) $\text{Card } B_1^i = \text{Card } B^i \leq m$, $\forall i \in \underline{\mathbb{P}}$,
- (ii) A est image de A_1 par le morphisme π tel que

$$\pi(n, a) = a, \quad \forall (n, a) \in A_1.$$

⁽¹⁾ Semi-groupe est entendu ici comme synonyme de demi-groupe.

Il suffit donc de prouver le théorème 1 pour \mathbf{A}_1 pour qu'il soit vrai pour \mathbf{A} . Or \mathbf{A}_1 satisfait à $B_1^i \cap B_1^j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Notons \mathbf{A}' le semi-groupe obtenu en adjoignant à \mathbf{A} un élément neutre ε de longueur 0, et convenons que $u^0 = \varepsilon$ si $u \in \mathbf{A}'$.

Nous allons d'abord établir quatre lemmes.

LEMME 1. - Si $u, v, w \in \mathbf{A}'$ et $|u| = |w|$, on a :

$$(1) \quad u^t v w^{2t} = u^{2t} v w^t$$

$$(2) \quad \text{où} \quad t = m!$$

Preuve. - Les $m + 1$ éléments $u^i v w^{m-i}$ ($0 \leq i \leq m$) ne sont pas tous distincts, car ils appartiennent à une même génération dont le cardinal est $\leq m$ par hypothèse. Il existe donc des entiers α, β, ξ , tels que :

$$u^\alpha v w^{\beta+\xi} = u^{\alpha+\xi} v w^\beta$$

$$(3) \quad 0 \leq \alpha \leq m, \quad 0 \leq \beta \leq m, \quad 1 \leq \xi \leq m.$$

De (3), on déduit

$$(4) \quad u^\alpha v w^{\beta+\lambda\xi} = u^{\alpha+\lambda\xi} v w^\beta, \quad \forall \lambda \in \underline{p}.$$

Prenant $\lambda = t/\xi$, et multipliant (4) à gauche par $u^{t-\alpha}$, et à droite par $w^{t-\beta}$, on obtient (1).

LEMME 2. - Si $x \in \underline{p}$, il existe un entier $c_1(x)$ tel que tout $f \in \mathbf{A}$, avec $|f| \geq c_1(x)$, peut s'écrire

$$(5) \quad f = f_1 f_2^x f_3, \quad f_1, f_3 \in \mathbf{A}', \quad f_2 \in \mathbf{A}.$$

Preuve. - Posons $y = m^{x-1}$, et prenons $c_1(x) = xy$. Soit

$$(6) \quad f = b_1 b_2 \dots b_{xy} \quad (b_i \in B).$$

Montrons que f satisfait à (5). Posons

$$b_{i+1} b_{i+2} \dots b_{i+y} = a_i \in B^y \quad (0 \leq i \leq (x-1)y),$$

et considérons les $(x-1)$ -uples d'éléments de B^y :

$$(7) \quad \alpha_i = (a_i, a_{i+y}, a_{i+2y}, \dots, a_{i+(x-2)y}) \quad (0 \leq i \leq y).$$

Soient α_i et $\alpha_{i'}$ ($i < i'$) deux quelconques de ces $(x-1)$ -uples que nous noterons pour simplifier (g_1, \dots, g_{x-1}) et (g'_1, \dots, g'_{x-1}) .

En raison de leur construction, on peut écrire :

$$(8) \quad \begin{cases} f = hg_1 g_2 \cdots g_{x-1} k \\ f' = h'g'_1 g'_2 \cdots g'_{x-1} k' \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} g_i = u_i v_i, & g'_i = v_i u_{i+1} \\ h' = hu_1, & k = u_x k' \end{cases} \quad (1 \leq i \leq x-1)$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} h', u_i, k \in \Lambda \\ h, v_i, k' \in \Lambda' \end{cases}$$

On voit que

$$(9) \quad v_j g_{j+1} g_{j+2} \cdots g_{x-1} u_x = g'_j g'_{j+1} \cdots g'_{x-1} \quad (1 \leq j \leq x-1)$$

Par ailleurs, le nombre de $(x-1)$ -uplas d'éléments de B^Y est au plus $m^{x-1} = y$. Donc deux des α_i , définis par (7), sont égaux. Si on les désigne par $(g_1 \cdots g_{x-1})$ et $(g'_1 \cdots g'_{x-1})$, on aura :

$$g_j = g'_j \quad (1 \leq j \leq x-1)$$

d'où, en vertu de (9),

$$v_j g_{j+1} g_{j+2} \cdots g_{x-1} u_x = g_j g_{j+1} \cdots g_{x-1} \quad (1 \leq j \leq x-1)$$

et par récurrence sur j :

$$v_1 v_2 \cdots v_{x-1} u_x^{x-1} = g_1 g_2 \cdots g_{x-1}.$$

En portant dans (8), on voit que f satisfait à (5) avec $f_2 = u_x$.

LEMME 3. - Si $x \in \underline{P}$, il existe un entier λ indépendant de x , et un entier $c_2(x)$, tels que tout $f \in \Lambda$ avec $|f| \geq c_2(x)$ satisfait à l'équation (5) avec $|f_2| = \lambda$.

Prouve. - Montrons d'abord qu'il existe des entiers λ et $\gamma(x)$ tels que tout f de longueur $\geq \gamma(x)$ peut s'écrire sous la forme (5), avec $|f_2| \leq \lambda$.

Prenons en effet $\gamma(x) = kc_1(2t)$ avec $k \in \underline{P}$ qui sera choisi plus loin et t donné par (2). Si $|f| = \gamma(x)$, on peut écrire :

$$f = g_1 g_2 \cdots g_k, \quad \text{où } |g_i| = c_1(2t) \quad (1 \leq i \leq k).$$

En vertu du lemme 2, chaque g_i peut s'écrire :

$$g_i = g'_i h_i^{2t} g''_i, \quad |h_i| \geq 1, \quad g'_i, g''_i \in \Lambda'.$$

Les h_i ont leurs longueurs $\leq \lambda = c_1(2t)/2t = s$. Donc, si on prend $k = (r-1)s + 1$, où $r \in \underline{P}$ sera choisi plus loin, r des h_i auront même longueur. Appelons-les h'_1, \dots, h'_r . En appliquant le lemme 1, on peut alors, sans changer f , réduire à t les exposants de ces h'_i sauf celui de h'_1 par exemple, qui deviendra $2t + (r-1)t = (r+1)t$. En choisissant r minimal $\geq (x/t) - 1$,

Pour achever la preuve du lemme 2, prenons $\ell = \lambda!$, et $c_2(x) = \gamma(\ell x)$. Alors tout f tel que $|f| \geq c_2(x)$ pourra s'écrire $f = f'g^{\ell x} f''$, $f', f'' \in A'$ avec $1 \leq |g| \leq \lambda$. Posons $f_2 = g^x/|g|$. Alors $|f_2| = \ell$ et $g^{\ell x} = f_2^{|g|^x}$, ce qui permet de mettre f sous la forme indiquée dans l'énoncé du lemme 3.

Posons pour la suite :

$$(10) \quad d = \ell t \quad \text{et} \quad c = c_2(2t).$$

LEMME 4. - Il existe un entier L tel que tout $f \in A$, avec $|f| \geq L$, peut s'écrire :

$$(11) \quad f = f_1 f_2^{it} f_3 \quad \text{où} \quad i \in \underline{P}, \quad |f_2| = \ell$$

$$(12) \quad f_1, f_3 \in Q = \bigcup_{c-d \leq x < 0} \mathbb{B}^x.$$

Preuve. - Prenons $L = c_2(t) + 2c_2(2t)$. Si $|f| > L$, on peut écrire :

$$f = f' f'' f''' \quad , \quad |f'| = |f'''| = c_2(2t), \quad |f''| \geq c_2(t).$$

f'' peut s'écrire (lemme 3) :

$$f'' = v_1 f_2^t v_3 \quad , \quad |f_2| = \ell, \quad v_1, v_3 \in A'.$$

D'où $f = u f_2^t w$, $|u|, |w| \geq c_2(2t)$; et u peut s'écrire $u = u_1 u_2^{2t} u_3$ avec $|u_2| = \ell$. Donc (lemme 1) :

$$f = u' f_2^{2t} w \quad \text{où} \quad u' = u_1 u_2^t u_3.$$

On a $|u'| = |u| - d$. Si $|u'| \geq c_2(2t)$, on recommence avec u' l'opération faite sur u , et ainsi de suite. On procède de même en ce qui concerne w , et on obtient finalement pour f la forme indiquée dans l'énoncé.

Nous pouvons maintenant construire le semi-groupe fini S et achever la preuve du théorème 1.

Construction du semi-groupe S . - Soit β un multiple positif de t qui sera choisi plus loin. On prend :

$$S = \{(p, a, q) \mid p \in Q, a \in \mathbb{B}^\ell, q \in a^\beta Q\},$$

où Q est toujours défini par (12).

On munit S d'une opération \circ en posant :

$$(13) \quad (p, a, q) \circ (p', a', q') = (p, a, q_1),$$

où $q_1 \in a^\beta Q$ satisfait à

$$(14) \quad \exists x \in \underline{P} : x = 0 \pmod{t} \quad \text{et} \quad qp'q' = a^x q_1.$$

Prouvons d'abord l'existence de q_1 . Comme $q \in a^\beta Q$, $qp'q'$ est de la

forme $a^\beta u$ où d'ailleurs $|u| > |q'| \geq c = c_2(2t)$. En appliquant alternativement les lemmes 3 et 1, on peut écrire :

$$qp'q' = a^\beta u = a^{\beta+t} u_1 = a^{\beta+2t} u_2 = \dots = a^{\beta+kt} u_k$$

avec $c - d \leq |u_k| < c$. On peut donc prendre $q_1 = a^\beta u_k$.

Pour prouver l'unicité de q_1 , remarquons d'abord que si $q'_1 \in a^\beta Q$ satisfait également à (14), c'est-à-dire si

$$qp'q' = a^{x'} q'_1, \quad x' \in \underline{P}, \quad x' = 0 \pmod{t},$$

on aura $x' = x$. En effet,

$$|q'_1| - |q_1| = (x - x')\ell = 0 \pmod{d},$$

d'où $|q'_1| = |q_1|$, puisque $|q_1|$ et $|q'_1| \in [\beta + c - d, \beta + c - 1]$.

Par ailleurs (14) entraîne $x \leq \beta + (2c + d - 3)/\ell$.

Par conséquent, l'unicité du résultat de l'opération \circ sera assurée si

$$(15) \quad a^{x+\beta} r = a^{x+\beta} r' \implies a^\beta r = a^\beta r',$$

$$\forall a \in \mathbb{B}^\ell, \quad \forall r, r' \in Q, \quad \forall x \in [1, \beta + (2c + d - 3)/\ell].$$

Nous allons voir qu'une condition analogue à (15) entraîne l'associativité de \circ . Soient :

$$(p, a, q) \circ (p', a', q') = (p, a, q_1)$$

$$(p, a, q_1) \circ (p'', a'', q'') = (p, a, q_2)$$

$$(p', a', q') \circ (p'', a'', q'') = (p', a', q_3)$$

$$(p, a, q) \circ (p', a', q_3) = (p, a, q_4)$$

L'opération sera associative si $q_2 = q_4$. En notant x_i les valeurs de x associées aux q_i par (14), un calcul facile, utilisant le lemme 1, donne :

$$a^{x_1+x_2} q_2 = a^{x_3+x_4} q_4 = qp'q'p''q''.$$

On vérifie, en considérant les longueurs, que

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \leq 2\beta + h, \quad \text{avec } h = (4c + d - 5)/\ell,$$

d'où une condition suffisante pour l'associativité :

$$(16) \quad a^{x+\beta} r = a^{x+\beta} r' \implies a^\beta r = a^\beta r',$$

$$\forall a \in \mathbb{B}^\ell, \quad \forall r, r' \in Q, \quad \forall x \in [1, 2\beta + h].$$

Manifestement, (16) entraîne (15). Nous allons choisir β de façon à satisfaire (16). Q étant fini, (16) équivaut à

$$(17) \quad \text{Card } a^{x+\beta} Q = \text{Card } a^\beta Q, \quad \forall a \in B^\ell, \quad \forall x \in [1, 2\beta + h].$$

Comme $\text{Card } a^i Q$ est une fonction non croissante de i , (17) sera satisfaite pour β assez grand. Plus précisément, soient a_1, a_2, \dots, a_k les éléments de B^ℓ . Considérons les k -uples

$$\alpha(i) = (\text{Card } a_1^i Q, \text{Card } a_2^i Q, \dots, \text{Card } a_k^i Q) \in \underline{\mathbb{P}} \times \underline{\mathbb{P}} \times \dots \times \underline{\mathbb{P}}.$$

Cette suite est décroissante au sens large pour l'ordre induit dans $\underline{\mathbb{P}} \times \underline{\mathbb{P}} \times \dots \times \underline{\mathbb{P}}$ par l'ordre des entiers. Partant de $\beta_0 = t$, définissons β_{u+1} comme le plus petit multiple de t tel que $\beta_{u+1} \geq 3\beta + h$, et considérons la suite des k -uples $\alpha(\beta_u)$. Il existe un $u \leq (m-1)k$ tel que $\alpha(\beta_u) = \alpha(\beta_{u+1})$. En prenant $\beta = \beta_u$, on aura :

$$\alpha(\beta + x) = \alpha\beta, \quad \forall x \in [1, 2\beta + h],$$

donc (17) sera satisfaite.

Fin de la preuve du théorème 1. - Si $s = (p, a, q) \in S$ et $x \in \underline{\mathbb{N}}$, posons $f(s, x) = pa^{tx} q \in A$.

Soit $j = \max(L, \beta\ell + 2c - 2)$. Définissons dans le produit direct $\underline{\mathbb{N}} \times S$:

$$T = \{(n, s) \mid s \in S, \exists x \geq 0 : n = |f(s, x)| \geq j\}.$$

On vérifie comme ci-dessous que T est un sous-semi-groupe de $\underline{\mathbb{N}} \times S$:

Soit l'application :

$$\varphi : T \longrightarrow (B^j) = \bigcup_{i \geq j} B^i,$$

donnée par $\varphi(n, s) = f(s, x)$ tel que $|f(s, x)| = n$.

Cette application est un morphisme.

Soient en effet (n, s) et $(n', s') \in T$, avec

$$s = (p, a, q), \quad s' = (p', a', q'), \quad s \circ s' = (p, a, q_1) \in A,$$

$$\varphi(n, s) = pa^{tx} q, \quad \varphi(n', s') = p'a'^{tx'} q'$$

et

$$\varphi[(n, s)(n', s')] = \varphi[n + n', s \circ s'] = pa^{tx_1} q_1.$$

En utilisant le lemme 1 et la définition du produit dans S , il vient :

$$\varphi(n, s) \varphi(n', s') = pa^{tx} qp'a'^{tx'} q' = pa^{t(x+x')} qp'q' = pa^{t(x+x'+y)} q_1,$$

d'où $\varphi(n, s) \varphi(n', s') = \varphi[(n, s)(n', s')]$ puisque ces deux éléments ont même longueur $n + n'$.

Montrons enfin que φ est surjectif. En vertu du lemme 4, tout élément $u \in (B^j)$ peut s'écrire $pa^{it} r$, $p, r \in Q$, $a \in B^\ell$.

De $|u| \geq j \geq \beta l + 2c - 2$, on tire $it \geq \beta$, d'où

$$u = pa^{xt} q \quad q \in a^\beta Q.$$

Donc u est l'image par φ de $(|u|, (p, a, q)) \in T$.

2. Généralisation.

Nous noterons X^* le monoïde libre engendré par un ensemble quelconque X , et $|f| = d \in \underline{\mathbb{N}}$ la longueur de $f \in X^d$.

Définition. - A étant un semi-groupe engendré par B , on dira que A est muni d'une pseudo-longueur λ (relativement à B) si λ est une application de A dans l'ensemble des parties non vides de $\underline{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $a \in A$,

$$(18) \quad \lambda a = \left\{ \sum_{i=1}^p d_i \mid p \in \underline{\mathbb{P}}, a = \prod_{i=1}^p b_i, d_i \in \lambda b_i, b_i \in B (1 \leq i \leq p) \right\}$$

On dira aussi que a possède la pseudo-longueur d si $d \in \lambda a$.

Le théorème 1 se généralise alors en un nouveau résultat.

THÉORÈME 2. - Soit A un semi-groupe muni d'une pseudo-longueur λ relativement à un système B de générateurs. Notons A_d la classe des éléments de A qui possèdent la pseudo-longueur $d \in \underline{\mathbb{N}}$. Si $\text{Card } A_d \leq m < \infty$; $\forall d \in \underline{\mathbb{N}}$, il existe $j \in \underline{\mathbb{N}}$ et un semi-groupe fini S tels que $\bigcup_{d \geq j} A_d$ est image homomorphe d'un sous-semi-groupe T de $\underline{\mathbb{N}} \times S$. En outre, j et $\text{Card } S$ sont bornés par des fonctions de m, λ et $\text{Card } B$. Enfin l'image de $(\{d\} \times S) \cap T$ est A_d , $\forall d \geq j$.

Preuve. - Remarquons d'abord qu'on peut supposer $\lambda b \subset \underline{\mathbb{P}}$, $\forall b \in B$. Posons en effet $\bar{A} = A - A_0$ et $H = B \cap \bar{A}$, où A_0 est la classe des éléments de A possédant la longueur 0. Il suffit de prouver le théorème pour \bar{A} . Or \bar{A} est engendré par l'ensemble fini :

$$\bar{B} = A_0 H A_0 \cup A_0 H \cup H A_0 \cup H$$

qui satisfait à $\lambda \bar{b} \subset \underline{\mathbb{P}}$, $\forall \bar{b} \in \bar{B}$.

Par ailleurs on peut supposer $\text{Card } \lambda a = 1$, $\forall a \in A$ (λ se réduit alors à un morphisme de A dans $\underline{\mathbb{N}}$). Soit en effet A_1 le semi-groupe de $\underline{\mathbb{N}} \times A$ engendré par $B_1 = \{(n, b) \mid b \in B, n \in \lambda b\}$. Les projections $\pi_1 : A_1 \rightarrow \underline{\mathbb{N}}$ et $\pi_2 : A_1 \rightarrow A$ vérifient $\lambda a = \pi_1(\pi_2^{-1} a)$, $\forall a \in A$. Il suffit donc de prouver le théorème 2 pour A_1 .

Nous allons donc poser $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$, et considérer λ comme un morphisme de A dans $\underline{\mathbb{P}}$ donné par $\lambda b_i = d_i \in \underline{\mathbb{P}}$ ($1 \leq i \leq k$).

Il est commode de considérer au lieu de A le monoïde A' obtenu en lui adjoignant un élément neutre $\varepsilon \notin A$, et de poser $\lambda\varepsilon = 0$.

Donnons-nous un ensemble $X = \{x_{ij} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i\}$, et posons

$$\bar{B} = \{\bar{b}_i = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{d_i}} \mid 1 \leq i \leq k\} \subset X^*$$

Soient $\hat{\alpha} : \bar{B}^* \rightarrow A'$ le morphisme de monoïdes tel que $\hat{\alpha}\bar{b}_i = b_i$ ($1 \leq i \leq k$), et α la congruence sur \bar{B}^* canoniquement associée à $\hat{\alpha}$. On remarque que $|g| = \lambda(\hat{\alpha}g)$, $\forall g \in \bar{B}^*$. Soient β la congruence sur X^* engendrée par α , et $\hat{\beta} : X^* \rightarrow Q = X^*/\beta$ le morphisme associé. On a $\alpha = \beta \cap (\bar{B}^* * \bar{B}^*)$. On peut donc ([1], vol. 2, § 9.1) plonger d'une façon naturelle A' dans Q en écrivant (à un isomorphisme près) :

$$(19) \quad \hat{\beta}g = \hat{\alpha}g, \quad \forall g \in \bar{B}^*.$$

Posons :

$$\begin{aligned} J &= \{f \in X^* \mid X^*fX^* \cap \bar{B}^* = \emptyset\} \\ R &= \{r \in X^* \mid XX^*r \cap \bar{B}^* \neq \emptyset\} \\ L &= \{\ell \in X^* \mid \ell XX^* \cap \bar{B}^* \neq \emptyset\} \\ C &= \{c \in XX^* \mid XX^*cXX^* \cap \bar{B}^* \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

On a

$$(20) \quad X^* = J \cup R\bar{B}^*L \cup C \quad \text{et} \quad J \cap (R\bar{B}^*L \cup C) = \emptyset.$$

J , résidu de \bar{B}^* dans X^* , est non vide sauf si $d_i = 1$ ($1 \leq i \leq k$) auquel cas le théorème 2 se réduit trivialement au théorème 1. J étant idéal de X^* , $\hat{\beta}J$ est idéal de Q . Soit $\hat{\theta} : Q \rightarrow D$ le morphisme canoniquement associé à la congruence de Rees modulo $\hat{\beta}J$ [1]. D est engendré par $E = \hat{\beta}\hat{\theta}X$. Soit $z = \hat{\beta}\hat{\theta}f$, $\forall f \in J$ le zéro de D . Montrons que D est à générations bornées. Soit $t \in \underline{P}$. Si $u \in E^t$, il existe $f \in X^*$ tel que $|f| = t$ et $u = \hat{\beta}\hat{\theta}f$.

Si en outre $u \neq z$, on a $f \notin J$, donc, par (20), $f \in R\bar{B}^*L \cup C$.

Si $f \in R\bar{B}^*L$, on peut écrire $f = rgl$, $r \in R$, $g \in \bar{B}^*$, $l \in L$.

Si $\Lambda = \sup \{d_i \mid 1 \leq i \leq k\}$, on a :

$$t - 2(\Lambda - 1) \leq |g| = t - |r| - |s| \leq t.$$

Or $|g| = \lambda(\hat{\theta}g)$. Donc $\hat{\theta}g$ appartient à un ensemble de cardinal $\leq m(2\Lambda - 1)$.

Si, au contraire, $f \in R\bar{B}^*L$, $f \in C$ qui est un ensemble fini. Par conséquent, on a

$$\text{Card } E^t \leq 1 + (\text{Card } R)^2 m(2\Lambda - 1) + \text{Card } C = m_1.$$

En vertu du théorème 1, il y aura alors $j \in \underline{P}$, un semi-groupe fini S ,

$T_1 \subset \underline{N} \times S$, et un épimorphisme

$$\varphi_1 : T_1 \rightarrow (E^j) = \bigcup_{t \geq j} E^t.$$

Par ailleurs, la restriction de $\hat{\theta}$ à $A' = \hat{\beta}\bar{B} \subset Q$ est un isomorphisme ψ de A' sur $A'' \subset D$ qui est tel que $\forall a'' \in A''$, $a'' \in E^t \iff t = \lambda(\psi^{-1} a'')$.

On a donc

$$\psi^{-1}(A'' \cap (E^j)) = \bigcup_{d \geq j} A_d,$$

d'où l'existence d'un épimorphisme

$$\varphi : T \rightarrow \bigcup_{d \geq j} A_d,$$

en prenant

$$\varphi = \psi^{-1} \varphi_1 \text{ et } T = \varphi^{-1} \bigcup_{d \geq j} A_d.$$

3. Application aux semi-groupes répétitifs.

Si X est un ensemble, appelons mots les éléments du semi-groupe libre sans élément neutre $XX^* \subset X^*$. Si $g \in XX^*$ et $f \in X^*gX^*$, g est facteur de f . Si en plus $g = g_1 g_2 \dots g_k$, $g_i \in XX^*$, g_1, g_2, \dots sont k facteurs consécutifs de f .

Reprenons la définition ([2], [3]) des semi-groupes répétitifs.

Définition. - Un semi-groupe D est dit répétitif si, quels que soient l'ensemble fini X , le morphisme $\varphi : XX^* \rightarrow D$ et $k \in \underline{\mathbb{P}}$, il existe un entier $L = L_\varphi(k)$ tel que tout $f \in X^L X^*$ possède k facteurs consécutifs congrus modulo φ .

Remarque. - Il revient au même d'imposer φX fini au lieu de X fini.

Le théorème 2 de [3] peut se généraliser ainsi :

THÉORÈME 3. - Soit $\theta : D \rightarrow E$ un morphisme de semi-groupe tel que $\text{Card } \theta^{-1}u \leq m \in \underline{\mathbb{P}}$, $\forall u \in E$. Alors si E est répétitif, D l'est aussi.

Preuve. - Soit le morphisme $\varphi : XX^* \rightarrow D$ où X est fini. On va montrer que si L est convenablement choisi, tout $f \in X^L X^*$ possède k facteurs consécutifs congrus modulo φ . Considérons le morphisme $\psi = \theta\varphi : XX^* \rightarrow E$. E étant répétitif, prenons $L = L_\psi(q)$ où $q \in \underline{\mathbb{P}}$ est arbitraire pour l'instant. Le mot f possède q facteurs consécutifs f_1, f_2, \dots, f_q ayant même image u par ψ .

Posons :

$$\varphi f_i = b_i \in D, \text{ d'où } \theta b_i = u \in E \quad (1 \leq i \leq q).$$

Le sous-semi-groupe A de D engendré par $B = \{b_i \mid 1 \leq i \leq q\}$ est à générations bornées par m puisque $B^t \subset \theta^{-1}(u^t)$.

On peut donc, par le théorème 1, trouver $j \in \underline{P}$ borné par une fonction de m seul un semi-groupe fini S de cardinal $< s$ fonction de m seul, $T \subset \underline{N} \times S$ et un épimorphisme $\alpha : T \rightarrow \bigcup_{t \geq j} B^t$.

Comme on peut sans inconvénient remplacer j par une valeur supérieure, on considérera que j ne dépend que de m .

Pour tout $a \in B^j$, choisissons un élément noté $\mu(a)$ dans $T \cap (\{j\} \times S) \cap \alpha^{-1} a$.

Soient $G = \{g \in XX^* \mid \varphi g \in B^j\}$, et \bar{G} un ensemble en correspondance bijective avec G par la bijection $\beta : \bar{G} \rightarrow G$.

Considérons le morphisme $\omega : \bar{G}\bar{G}^* \rightarrow \underline{N} \times S$ donné par

$$(21) \quad \omega \bar{g} = \mu \varphi(\beta \bar{g}), \quad \forall \bar{g} \in \bar{G}.$$

Il appartient à l'ensemble de morphismes de semi-groupes

$$\Omega = \{\omega' \mid \omega' : YY^* \rightarrow \underline{N} \times S', \text{ Card } S' < s, \text{ "Y" } \subset \{j\} \times S'\}.$$

D'après le théorème 1 de [3], tout produit direct de \underline{N} par un semi-groupe fini est répétitif. On voit facilement que l'ensemble $\{L_{\omega'}(k) \mid \omega' \in \Omega\}$ est fini.

Soit r sa borne supérieure. Nous prendrons $q = rj$.

Mettons en évidence, dans f , r facteurs consécutifs

$$g_i = f_{x+1} f_{x+2} \dots f_{x+j} \quad \text{où } x = (i-1)j.$$

Soit $\bar{g}_i = \beta^{-1} g_i$ ($1 \leq i \leq r$). Le mot $\bar{g}_1 \bar{g}_2 \dots \bar{g}_r \in \bar{G}\bar{G}^*$ possède k facteurs consécutifs congrus modulo ω , puisque $r \geq L_{\omega}(k)$. En vertu de (21), les facteurs correspondants de $g_1 g_2 \dots g_r$ seront congrus modulo φ .

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GLIFFORD (A. H.), PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semi-groups. Vol. 1 and vol. 2. - Providence, American mathematical Society, 1961 and 1967 (Mathematical Surveys, 7).
- [2] JUSTIN (J.). - Propriétés combinatoires de certains semi-groupes. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 1969, série A, p. 1113-1115.
- [3] JUSTIN (J.). - Généralisation du théorème de Van der Waerden sur les semi-groupes répétitifs (à paraître).