ROBERT CORI

Un langage quasi-rationnel lié aux graphes planaires

Séminaire Schützenberger, tome 1 (1969-1970), exp. nº 1, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SMS_1969-1970__1__A1_0>

Séminaire SCHÜTZENBERGER-LENTIN-NIVAT
(Problèmes mathématiques
de la Théorie des automates)
Année 1969/70, n° 1, 16 p.

4 novembre 1969

UN LANGAGE QUASI-RATIONNEL LIÉ AUX GRAPHES PLANAIRES

par Robert CORI

Dans [3], il a été établi une bijection entre les graphes planaires connexes à $k+1$ sommets fixés et les mots d'un langage algébrique L_k. Ceci nous a permis de retrouver certaines relations d'énumération données par TUTTE [14], et d'en donner d'originales. D'autre part, la série génératrice de ces graphes peut être obtenue à partir de L_k par identification de lettres et passage à l'image commutative, c'est donc une série algébrique.

La construction d'une bijection entre des objets et les éléments d'un monoïde, méthode développée sous l'impulsion de M. P. SCHÜTZENBERGER, se retrouve dans un certain nombre de travaux récents de combinatoire (CARTIER et FOATA [1], FOATA [7], FOATA et SCHÜTZENBERGER [8], LENORMAND [11]). Il est plus rare (cf. GROSS [9]) de déduire les propriétés de la série génératrice de celles du langage formé des mots en bijection avec les objets à énumérer.

C'est ce que nous nous proposons d'effectuer ici pour démontrer que la série génératrice des graphes planaires connexes à sommets fixés est une fonction rationnelle des variables

$$y_i = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x_i^2}}{2x_i} .$$

Pour ceci, nous donnons d'abord (partie I) quelques propriétés sur les séries formelles en variables non commutatives, propriétés qui nous seront utiles par la suite. Nous précisons ensuite (partie II) nos notations, et rappelons les résultats utiles de [3].

C'est dans la partie III que nous démontrons le résultat principal de ce travail à partir de deux lemmes qui sont eux-mêmes démontrés dans les parties IV et V.

I. Notions sur les séries formelles en variables non commutatives.

Soient X un alphabet fini, X^* le monoïde libre engendré par X, $Z\langle\langle X\rangle\rangle$ l'algèbre large du monoïde X^* (ou algèbre des séries formelles à variables non commutatives) sur l'anneau Z. Un élément A de $Z\langle\langle X\rangle\rangle$ s'écrit

$$A = \sum_{f \in X^*} (A , f) f ,$$

où (A , f) est élément de Z pour tout f. Si (A , f) est égal à 0 ou 1, A est alors la série caractéristique d'un langage que nous noterons aussi A. Toutes les séries étudiées dans la suite sont des séries caractéristiques de langages, et nous confondrons un langage et sa série caractéristique.

Nous renvoyons à CHOMSKY et SCHÜTZENBERGER [2], NIVAT [12], FLIESS [5], pour l'étude des propriétés des séries rationnelles, algébriques, et celles des transductions rationnelles. Nous donnons ici quelques notions moins classiques sur les séries quasi-rationnelles et sur l'image commutative d'une série.

1. Séries quasi-rationnelles (cf. CRESTIN [4]).

Soit f un mot de X^*, nous notons $\tilde{f}$ l'image miroir de f (l'application $f \dashrightarrow \tilde{f}$ est un anti-isomorphisme involutif).

Opération crochet. - Soit $m = (f_1 , f_2)$ un élément de $X^* \times X^*$, nous notons $[m , g]$, où g appartient à X^*, le mot :

$$[m , g] = f_1 \, g\tilde{f}_2 .$$

Cette opération peut s'étendre à l'ensemble des séries formelles $Z\langle\langle X^*\rangle\rangle$ par la relation :

Soient A un élément de $Z\langle\langle X\rangle\rangle$, B un élément de $Z\langle\langle X^* \times X^*\rangle\rangle$. $C = [B , A]$ est défini par :

$$(C , f) = \sum_{f_1 f_3 f_2 = f} (B , (f_1 , f_2))(A , f_3) .$$

Notons les deux propriétés suivantes :

$$[B_1 + B_2 , A] = [B_1 , A] + [B_2 , A] ,$$

$$[B_1 \, B_2 , A] = [B_1 , [B_2 , A]] .$$

La famille des séries quasi-rationnelles est alors définie par :

(1) Tout monôme est Q. R. (quasi-rationnel) ;

(2) Si A_1 et A_2 sont Q. R., $A_1 + A_2$ l'est ;

(3) Si A_1 et A_2 sont Q. R., $A_1 \, A_2$ l'est ;

(4) Si A est Q. R. et $(A , e) = 0$ (où e désigne le mot vide) :

$$(1 - A)^{-1} = 1 + \sum_{n>0} A^n \text{ est Q. R. ;}$$

(5) Si B est une série rationnelle de $Z\langle\langle X^* \times X^*\rangle\rangle$, et si A est Q. R., alors $[B , A]$ est Q. R.

PROPRIÉTÉ I.1. - Soient X^* et Y^* deux monoïdes libres finiment engendrés, et soit φ un morphisme de $Z\langle\langle X\rangle\rangle$ dans $Z\langle\langle Y\rangle\rangle$ tel que, pour tout x de X, $\varphi(x)$ soit Q. R. Alors si A est une série Q. R. de $Z\langle\langle X\rangle\rangle$, $\varphi(A)$ est Q. R. de $Z\langle\langle Y\rangle\rangle$.

Soit $X = \{x_1 , x_2 , \ldots , x_n\}$; A est obtenue à partir des séries

$$x_1 , x_2 , \ldots , x_n$$

par un nombre fini d'opérations d'addition, de multiplication, de passage à l'inverse, ou de crochet, alors $\varphi(A)$ s'obtient par ces mêmes opérations à partir des $\varphi(x_i)$ qui sont quasi-rationnelles, d'où le résultat.

PROPRIÉTÉ I.2 (NIVAT) [1]. - L'image par une transduction rationnelle d'une série quasi-rationnelle est une série quasi-rationnelle.

2. Image commutative d'une série.

Nous notons $Z[[x]]$ l'anneau des séries formelles à variables commutatives $x_1 , \ldots , x_n$.

Nous définissons l'application χ de $Z\langle\langle X\rangle\rangle$ dans $Z[[x]]$ par $\chi(A) = B$ qui est telle que

$$B = \sum B_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \quad \text{où} \quad B_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \sum (A , f)$$

pour tous les mots f d'image commutative $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$.

χ est un morphisme d'algèbre.

PROPRIÉTÉ I.3. - Soit φ un morphisme de $Z\langle\langle X\rangle\rangle$, dans une algèbre $\mathfrak{A}$ commutative sur Z, il existe alors un morphisme unique $\hat{\varphi}$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} Z\langle\langle X\rangle\rangle \arrow[r, "\chi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Z[[x]] \arrow[d, "\hat{\varphi}"] \\ & \mathfrak{A} \end{tikzcd}$$

Le morphisme, défini par $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x)$, est le seul qui vérifie cette propriété.

PROPRIÉTÉ I.4. - Soit φ un morphisme de $Z\langle\langle X\rangle\rangle$ dans $Z\langle\langle Y\rangle\rangle$, alors il existe un unique morphisme $\bar{\varphi}$ de $Z[[x]]$ dans $Z[[y]]$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

---

[1] Ce résultat, non publié, figure dans la version miméographiée de la thèse de M. NIVAT : Transductions des langages de Chomsky.

$$\begin{array}{ccc} Z\langle\langle X\rangle\rangle & \xrightarrow{\varphi} & Z\langle\langle Y\rangle\rangle \\ \chi\downarrow & & \downarrow\chi \\ Z[[x]] & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & Z[[y]] \end{array}$$

Il suffit d'appliquer la propriété I.3 à $\varphi' = \chi\varphi$.

Remarque. - Si $X^* = Y^*$, φ est alors une opération de substitution d'une série à une lettre de X , et la propriété I.4 exprime le fait que l'on peut permuter l'ordre des opérations :

- substitution d'une série à une variable,
- passage à l'image commutative.

PROPRIÉTÉ I.5. - L'image par χ d'une série rationnelle (resp. algébrique) est une série rationnelle (resp. algébrique).

Ceci est une conséquence immédiate du fait que χ est un morphisme tel que $\chi(x)$ est un monôme pour tout élément x de X .

PROPRIÉTÉ I.6. - Si A est une série quasi-rationnelle, $\chi(A)$ est rationnelle.

Il suffit de montrer que si A est telle que $\chi(A)$ est rationnelle, et si B est rationnelle de $Z\langle\langle X^* \times X^*\rangle\rangle$, alors $\chi([B , A])$ est rationnelle.

Soit $\mathfrak{F}$ la famille des séries B telles que $\chi([B , 1])$ est rationnelle, $\mathfrak{F}$ contient les monômes, $\mathfrak{F}$ est formée par :

- addition (car $[B_1 + B_2 , 1] = [B_1 , 1] + [B_2 , 1]$),
- multiplication (car $[B_1 B_2 , 1] = [B_1 , [B_2 , 1]]$),
- passage à l'inverse (car $\chi([B^* , 1]) = \chi(\frac{1}{1 - [B , 1]})$).

$\chi([B , 1])$ est donc rationnelle quelle que soit B rationnelle, le résultat découle alors de l'identité

$$\chi([B , A]) = \chi(A)\, \chi([B , 1]) .$$

II. Notations. Caractérisations de L_k

1. Notations.

Pour tout ensemble P fini, $P = \{i_1 , i_2 , \dots , i_p\}$ de $\mathbb{N}^+$ (ensemble des entiers strictement positifs), soient $\hat{P}$ l'alphabet

$$\{0 , i_1 , \dots , i_p , \bar{0} , \bar{i}_1 , \dots , \bar{i}_p\} ,$$

et $\hat{P}^*$ le monoïde libre engendré par $\hat{P}$. Pour tout f appartenant à $\hat{P}^*$, nous notons $|f|$ la longueur de f, et $|f|_{i_j}$ le nombre d'occurences de i_j ou $\bar{i}_j$ dans f. Ainsi,

$$|f| = |f|_0 + \sum_{j=1,p} |f|_{i_j} .$$

Opérateur ∇^i. - Il associe un langage de $\widehat{[k]}^*$ à un langage de $\widehat{[k] \setminus \{i\}}^*$.

Soit π_i le morphisme de $\widehat{[k]}^*$ dans $\widehat{[k] \setminus \{i\}}^*$, défini par

$$\pi_i(j) = j , \quad \pi_i(\bar{j}) = \bar{j} \text{ pour tout } j \neq i , \quad \pi_i(i) = 0 , \quad \pi_i(\bar{i}) = \bar{0} .$$

Soit $L \subset \widehat{[k] \setminus \{i\}}^*$, f appartient à $\nabla^i L$ si :

- $\pi_i(f)$ appartient à L,
- Aucune occurence de 0 ou $\bar{0}$ ne précède, dans f, une occurence de i ou de $\bar{i}$.

Remarques.

1° ∇^i vérifie des relations analogues à celles d'une dérivation, soit

$$\nabla^i(A + B) = \nabla^i(A) + \nabla^i(B) ,$$

$$\nabla^i(AB) = (\nabla^i A)B + \theta^i(A)(\nabla^i B) ,$$

où θ^i est le morphisme de $\widehat{[k]}^*$ dans lui-même, défini par

$$\theta^i(0) = i \qquad \theta^i(j) = j$$

$$\theta^i(\bar{0}) = \bar{i} \qquad \theta^i(\bar{j}) = \bar{j} \quad (\text{pour } j \neq 0) .$$

2° Il a été noté, par FLIESS [6], que cet opérateur est une transduction rationnelle de $\widehat{[k] \setminus \{i\}}^*$ dans $\widehat{[k]}^*$ et, par suite, si L est algébrique (resp. rationnel, quasi-rationnel), $\nabla^i L$ est algébrique (resp. rationnel, quasi-rationnel). [Voir propriété I.2 pour le cas où L est quasi-rationnel.]

2. Le langage L_P.

Nous définissons le langage (2) L_P pour tout P fini inclus dans $\mathbb{N}^+$ par récurrence sur $|P| = p$ comme suit :

(i) Si $p = 0$, P est vide, et L_o est le langage restreint de Dyck sur l'alphabet $\{0 , \bar{0}\}$, langage qui vérifie l'équation

---

(2) Pour simplifier l'écriture, nous noterons L_k au lieu de $L_{[k]}$.

$$L_o = 0L_o\,\bar{0}L_o + e \quad (^3) .$$

(ii) Si L_p est défini, nous définissons L_P , pour tout $|P| = p$, par $L_P = \lambda_P(L_p)$, où λ_P est la bijection croissante entre $[p]$ et P .

(iii) Nous définissons L_k à partir de tous les L_P , $|P| < k$ par l'équation :

$$\text{(II,1)} \qquad L_k = \sum_{P \subseteq [k]} 0L_P\,\bar{0}L_{[k]\setminus P} + \sum_{i=1,k} 0\bar{i}\nabla^i\, L_{[k]\setminus\{i\}} ,$$

où la première somme est étendue à tous les sous-ensembles P de $[k]$, y compris $[k]$ lui-même, et l'ensemble vide.

Le théorème suivant est une conséquence directe des résultats de [3] :

THÉORÈME. - Soit $t(p_o , p_1 , p_2 , \ldots , p_k)$ le nombre (4) de graphes planaires connexes de sommets $s_o , s_1 , \ldots , s_k$ fixés admettant pour degré p_i en s_i , et où une arête de s_o a été distinguée (5). La série génératrice

$$\mathcal{E}_k = \sum_{p_o, p_1, \ldots, p_k > 0} t(p_o , p_1 , \ldots , p_k) x_o^{p_o} \ldots x_k^{p_k} ,$$

élément de $Z[[x_o , x_1 , \ldots , x_k]]$ est une série algébrique.

En effet, dans [3], nous avons démontré qu'il existe une bijection entre les graphes planaires connexes de sommets fixés $\{s_o , s_1 , \ldots , s_k\}$ dont une arête issue de s_o a été distinguée et les mots du langage L_k . Si le graphe admet le degré p_i en s_i , le mot f correspondant est tel que $|f|_i = p_i$. Ceci entraîne, par définition de χ , que la série génératrice $\mathcal{L}_k$ (6) est obtenue à partir de $\chi(L_k)$ par identification de i et $\bar{i}$ à x_i . Or L_k est algébrique, il en est de même pour $\mathcal{L}_k$.

Cette autre caractérisation de L_k nous sera utile dans la partie V.

3. Emboitement.

Un mot f de $([k] \cup \{0\})^*$ est dit un emboitement, si :

---

(3) e désigne l'élément unité de $Z\langle\langle \widehat{[k]} \rangle\rangle$.

(4) Ce nombre est noté t' dans [3].

(5) Pour une définition précise de ces objets, voir [3] ou [15].

(6) Nous noterons, dans la suite, par une lettre "capitale" une série de $Z\langle\langle \widehat{[k]} \rangle\rangle$, et par la même lettre en "ronde" la série obtenue par image commutative et par identification de i et $\bar{i}$ à x_i .

- f contient une occurence au moins de tout i, $i = 0, k$,
- $f = 0f'$,
- f ne contient aucun sous-mot (7) de la forme $ijij$ quels que soient $i \neq j$.

4. Permutation f-autorisée.

Soit f un mot de $([k] \cup \{0\})^*$, tel que $|f| = n$; notons f_i le rang de la première occurence de i dans f. Une permutation α sur $[n]$ est f-autorisée si, pour tout $i = 1, k$:

- $\alpha^{-1}(f_i) = f_i - 1$,
- $\alpha^{-1}(j) \geq f_i - 1$ pour tout j tel que $f(j) = i$.

Soit f un mot de L_0 ; nous associons à f (cf. [3]) une involution α sans point fixe telle que

$$(\alpha(i) = j) \iff (f = f_1\ f(i) f_2\ f(j) f_3),$$

où f_2 est élément de L_0.

Soient φ et ψ les morphismes définis par

$$\widehat{[k]}^* \xrightarrow{\varphi} ([k] \cup \{0\})^* \quad \varphi(i) = \varphi(\bar{i}) = i, \quad \forall\, i = 0, k ;$$

$$\widehat{[k]}^* \xrightarrow{\psi} \{0, \bar{0}\}^* \quad \psi(i) = 0, \quad \psi(\bar{i}) = \bar{0}, \quad \forall\, i = 0, k.$$

Nous notons $\check{f} = \varphi(f)$.

THÉORÈME (cf. [3]). - L_k est constitué de l'ensemble des mots f de $\widehat{[k]}^*$ vérifiant :

(1) $\check{f}$ est un emboitement,
(2) $g = \psi(f)$ appartient à L_0,
(3) L'involution associée à g est $\check{f}$-autorisée.

III. Résultat principal

Le but de ce travail est la démonstration du théorème suivant.

THÉORÈME. - Il existe une série rationnelle $\mathcal{R}_k$ de $Z[[y_0, y_1, \dots, y_k]]$ telle que $\mathcal{L}_k = \mathcal{R}_k\left(\frac{1-\sqrt{1-4x_0^2}}{2x_0}, \dots, \frac{1-\sqrt{1-4x_k^2}}{2x_k}\right)$.

---

(7) $g = a_1 a_2 \dots a_p$ est un sous-mot de f si $f = f_1 a_1 f_2 a_2 \dots f_p a_p f_{p+1}$.

Pour ceci, nous définissons trois sous-ensembles de L_k :

Le langage L'_k . - Il est défini par l'équation :

$$L'_k = \sum_{\substack{P \neq \emptyset \\ P \subset [k]}} OL_P \, \bar{O}L_{[k] \setminus P} + \sum_{i=1,k} O\bar{i}\nabla^i \, L_{[k] \setminus \{i\}} \, . \tag{III.1}$$

Ainsi, d'après (II.1), L_k et L'_k sont liés par :

$$L_k = OL_o \, \bar{O}L_k + OL_k \, \bar{O}L_o + L'_k \, . \tag{III.2}$$

Le langage M_k . - C'est le sous-langage de L'_k formé des mots qui ne contiennent aucun facteur [8] de la forme $i\bar{i}$ (pour $i = 0 , 1 , \ldots , k$).

Les mots de M_k sont alors en bijection avec les graphes planaires n'ayant pas de boucle homotope à zéro, sur la sphère diminuée des sommets du graphe.

Le langage $\bar{M}_{[k]}$. - Soit Λ le morphisme de $Z\langle\langle\widehat{[k]}\rangle\rangle$ dans lui-même défini par

$$\Lambda(i) = iL^i \qquad \Lambda(\bar{i}) = \bar{i}L^i \quad \text{pour} \quad i = 0 , 1 , \ldots , k ,$$

où L^i est le langage restreint de Dyck sur l'alphabet $\{i , \bar{i}\}$
($L^i = iL^i \, \bar{i}L^i + e$) .

Alors $\bar{M}_k = \Lambda(M_k)$.

Le théorème résulte alors des propriétés suivantes de ces 3 langages :

PROPRIÉTÉ 1. - M_k est Quasi-Rationnel.

(Elle sera démontrée dans la partie IV.)

PROPRIÉTÉ 2. - $\bar{M}_k$ et L'_k ont même image commutative.

(Elle sera démontrée dans la partie V.)

PROPRIÉTÉ 3. - $\mathcal{L}_k = \dfrac{1 + y_o^2}{1 - y_o^2} \, \mathcal{L}'_k$

(où $y_o = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4x_o^2}}{2x_o}$, et $\mathcal{L}'_k$ est obtenue à partir de $\chi(L'_k)$ par identification de $(i , \bar{i})$ à x_i .)

Celle-ci résulte de la relation (III.2) ; en effet, $\mathcal{L}_k$ vérifie :

$$\mathcal{L}_k = 2x_o^2 \, \mathcal{L}_o \, \mathcal{L}_k + \mathcal{L}'_k \, . \tag{III.2)'$$

---

[8] g est facteur de f si $f = f_1 \, g \, f_2$.

Or $\mathcal{L}_o = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4x_o^2}}{2x_o^2}$ (puisque $\mathcal{L}_o = x_o^2 \mathcal{L}_o^2 + 1$), et (III.2)' entraîne

$$\mathcal{L}_k = \frac{1}{\sqrt{1 - 4x_o^2}} \mathcal{L}'_k .$$

Le résultat découle alors du fait que :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 4x_o^2}} = \frac{1 + ((1 - \sqrt{1 - 4x_o^2})/2x_o)^2}{1 - ((1 - \sqrt{1 - 4x_o^2})/2x_o)^2} .$$

<u>Démonstration du théorème</u>. - D'après la propriété 3, il suffit de montrer que $\mathcal{L}'_k$ est une série rationnelle en

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x_i^2}}{2x_i} .$$

D'après la propriété I.4, on peut permuter les opérations de substitution et de passage à l'image commutative, soit :

$$\bar{\mathcal{M}}_k(x_o , x_1 , \dots , x_k) = \mathcal{M}_k(x_o \mathcal{L}^o , x_1 \mathcal{L}^1 , \dots , x_k \mathcal{L}^k) .$$

D'après les propriétés 1 et (I.6), $\mathcal{M}_k$ est une série rationnelle. Or $\mathcal{L}'_k = \mathcal{M}_k$ (Propriété 2). Donc $\mathcal{L}'_k$ est une fonction rationnelle de $y_o , y_1 , \dots , y_k$.

Q. E. D.

IV. Etude du langage M_k

Dans cette partie, nous démontrons que M_k est un langage quasi-rationnel.

Pour cela, nous définissons l'application τ_i de $[\hat{k}]^*$ dans $Z\langle\langle[\hat{k}]\rangle\rangle$.

Soit f un élément de $[\hat{k}]^*$.

- Si $|f|_o = 0$, $\tau_i(f) = f$,
- Si $|f|_o \neq 0$, f se décompose d'une manière unique en $f = f_1 f_2$, où $|f_1|_o = 0$ et où f_2 appartient à $\{0 , \bar{0}\}.[\hat{k}]^*$

$$\tau_i(f) = \sum_{n \geq 0} f_1 \, i^n \, \bar{0}^n \, f_2 .$$

τ_i s'étend linéairement en une application de $Z\langle\langle[\hat{k}]\rangle\rangle$ dans lui-même.

LEMME IV.1. - <u>Si</u> L <u>est quasi-rationnel, il en est de même pour</u> $\tau_i(L)$.

On peut en effet décomposer τ_i en un produit :

- d'une transduction rationnelle de $[\hat{k}]^*$ dans $([k] \cup \{\alpha , \bar{\alpha}\})^*$ définie par un transducteur $\mathbb{T}$,

- d'un morphisme τ_i' : $Z\langle\langle \widehat{[k]} \cup \alpha \cup \bar{\alpha}\rangle\rangle$ dans $Z\langle\langle \widehat{[k]}^*\rangle\rangle$ tel que $\tau_i(x)$ est Q. R. pour tout élément x de $\widehat{[k]} \cup \{\alpha , \bar{\alpha}\}$.

T a deux états I et F (I initial, I et F finaux), et il est défini par les quadruples (I , j , j , I) , $(I , \bar{j} , \bar{j} , I)$ pour $j = 1 , k$; $(I , 0 , \alpha , F)$, $(I , \bar{0} , \bar{\alpha} , F)$ et (F , j , j , F) , $(F , \bar{j} , \bar{j} , F)$ pour $j = 0 , k$.

τ_i' est défini par

$$\tau_i'(j) = j \qquad \tau_i'(\bar{j}) = \bar{j} \quad \text{pour} \quad j = 0 , k \ ;$$

$$\tau_i'(\alpha) = \sum_{n\geq 0} i^n \bar{0}^n 0 \qquad \tau_i'(\bar{\alpha}) = \sum_{n\geq 0} i^n \bar{0}^n \bar{0} \ .$$

<u>Définition</u>. - Soit M_k^i l'ensemble des mots de $\nabla^i M_{[k]\setminus\{i\}}$ qui possèdent au moins une occurence de i ou de $\bar{i}$ et une occurence de 0 ou de $\bar{0}$. Ainsi :

$$\nabla^i M_{[k]\setminus\{i\}} = M_{[k]\setminus\{i\}} + \theta_i(M_{[k]\setminus\{i\}}) + M_k^i \ .$$

La propriété 1 résulte alors de la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ IV.2. - <u>Le langage</u> M_k <u>vérifie</u> :

1° M_0 <u>est vide</u>,

2° $M_1 = 0\bar{1}[(1 , \bar{0})^* , e]$,

3° <u>Pour</u> $k > 1$, <u>notons</u> $\mu_i = (i , \bar{i})^*$ et $\mu_i' = (i , \bar{0})^*$ (<u>sous-ensembles de</u> $\widehat{[k]}^* \times \widehat{[k]}^*$) .

M_k <u>est alors somme disjointe de</u> A_k , B_k , B_k' , B_k'' <u>définis par</u>

$$A_k = \sum_{\substack{P\subset[k] \\ P\neq\emptyset}} 0[\mu_0 , M]\bar{0}[\mu_0 , M_{[k]\setminus P}] \ ,$$

$$B_k = \sum_{i=1,k} 0\bar{i}[\mu_i' , \tau_i(M_k^i)] \ ,$$

$$B_k' = \sum_{i=1,k} 0\bar{i}[\mu_i' , [\mu_i , \theta_i(M_{[k]\setminus\{i\}})][\mu_i' , e]] \ ,$$

$$B_k'' = \sum_{i=1,k} 0\bar{i}[\mu_i' , [\mu_i' , e][\mu_0 , M_{[k]\setminus\{i\}}]] \ .$$

<u>Démonstration de la propriété 1</u> (à partir de IV.2).

M_1 est quasi-rationnel, d'après IV.2.

Si M_P est Q. R. pour $|P| < k$, M_k^i est Q. R. puisque image de $M_{[k]\setminus\{i\}}$ par une transduction rationnelle, et $\tau_i(M_k^i)$ est aussi Q. R.

Le fait que M_k est Q. R. résulte alors de la propriété IV.2, les μ_i et μ_i'

étant des sous-ensembles rationnels de $\widehat{[k]}^* \times [k]^*$.

Démonstration de la propriété IV.2. - Le lecteur vérifiera que A_k, B_k, B'_k et B''_k sont bien des sous-ensembles disjoints de M_k ; montrons que M_k en est la réunion ; pour ceci nous faisons d'abord deux remarques.

Remarque 1. - Si f appartient à L_k, et ne contient aucun facteur de la forme $i\bar{i}$ (pour $i = 0, 1, \dots, k$), alors $f = 0^n h\bar{0}^n$, où h appartient à M_k et n, est positif ou nul.

Remarque 2. - Soit f un élément de M_k tel que $f = f_1 g f_2$, où g appartient à L_P. g est alors de la forme :

$$g = 0^n h\bar{0}^n, \quad h \in M_P .$$

En effet, g est un mot de L_P qui vérifie qu'aucun de ses facteurs n'est de la forme $i\bar{i}$ (sinon f n'appartient pas à M_k).

Soit f un mot de M_k, montrons qu'il appartient à A_k, B_k, B'_k ou B''_k. En tant que mot de L_k, il est élément de

$$\sum_P 0L_P\,\bar{0}L_{[k]\setminus P} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1,k} 0\bar{i}\nabla^i\, L_{[k]\setminus\{i\}} .$$

1er Cas : f appartient à $0L_P\,\bar{0}L_{[k]\setminus P}$ (Soit $f = 0f_1\bar{0}f_2$ avec $f_1 \in L_P$, $f_2 \in L_{[k]\setminus P}$). - Puisque f est élément de $M_k \subset L'_k$, $P \neq 0$ et $P \neq [k]$.

D'après la remarque 2,

$$f_1 = 0^{n_1} g_1 \bar{0}^{n_1} \quad \text{et} \quad f_2 = 0^{n_2} g_2 \bar{0}^{n_2} ,$$

g_1 (resp. g_2) appartenant à M_P (resp. $M_{[k]\setminus P}$), et f est élément de A_k.

2e Cas : f appartient à $0\bar{i}\nabla^i\, L_{[k]\setminus\{i\}}$ (Soit $f = 0\bar{i}g$). - g peut se décomposer d'une manière unique en

$$g = i^{n_1} h\bar{0}^{n_1} \quad (n_1 \geq 0 , \quad h \notin i\widehat{[k]}^*\,\bar{0}) .$$

g, élément de $\nabla^i\, L_{[k]\setminus\{i\}}$ se met uniquement sous la forme :

$$g = i^{n_1} h_1 h_2 \bar{0}^{n_2}$$

(où $|h_1|_0 = |h_2|_i = 0$, et h_2 est ou bien vide ou bien élément de $(0, \bar{0})\widehat{[k]}^*$).

h_1 et h_2 se décomposent d'une manière unique en

$$h_1 = h'_1\, i^{n_2} , \quad h_2 = \bar{0}^{n_2} h'_2 \qquad h'_2\, h'_1 \notin \bar{0}\widehat{[k]}^*\, i .$$

Remarquons que $h'_1\, h'_2$ est un mot non vide de $L_{[k]\setminus\{i\}}$, car $k > 1$, et aucune occurence différente de 0 ou i n'est apparue ; 3 cas sont alors à distinguer :

Si h'_1 est vide. - h'_2 appartient alors à $L_{[k]\setminus\{i\}}$ (élément de $\nabla^i L_{[k]\setminus\{i\}}$ sans occurence de i ou $\bar{i}$). D'après la remarque 2, $h'_2 = 0^{n_3} h''_2 \bar{0}^{n_3}$, et f appartient à B''_k.

Si h'_2 est vide. - h'_1 appartient à $\theta_i(L_{[k]\setminus\{i\}})$. $\pi_i(h'_1)$ est élément de $L_{[k]\setminus\{i\}}$ et, d'après la remarque 2, $\pi_i(h'_1) = 0^{n_3} h''_1 \bar{0}^{n_3}$, soit

$$h'_1 = i^{n_3} \theta_i(h''_1)\bar{i}^{n_3} ,$$

et f est alors élément de B'_k.

Si h'_1 et h'_2 ne sont pas vides. - Montrons que $h'_1 h'_2$ appartient à M^i_k (f appartient alors à B_k).

Il suffit de montrer que $w = \pi_i(h'_1 h'_2)$ appartient à $M_{[k]\setminus\{i\}}$. En effet, $|h'_1|_0 = 0$ et $|h'_2|_i = 0$ entraînent alors que $h'_1 h'_2$ appartient à $\nabla^i M_{[k]\setminus\{i\}}$; et d'autre part, h'_2 commence par 0 ou $\bar{0}$, et h'_1 par i puisqu'il est non vide et que $\pi_i(h'_1 h'_2)$ commence par 0. Alors $h'_1 h'_2$ appartient donc à M^i_k.

Montrons que $w \in M_{[k]\setminus\{i\}}$. w appartient clairement à $L_{[k]\setminus\{i\}}$. Pour $j \neq 0$, $j\bar{j}$ n'est pas facteur de $h'_1 h'_2$ (car il n'est facteur, ni de h'_1, ni de h'_2, et que h'_2 commence par 0 ou $\bar{0}$), et $j\bar{j}$ n'est pas facteur de w ($= \pi_i(h'_1 h'_2)$).

Si $0\bar{0}$ est facteur de w, il ne peut être facteur de $\pi_i(h'_1)$ (resp. $\pi_i(h'_2)$); car $i\bar{i}$ (resp. $0\bar{0}$) serait alors facteur de h'_1 (resp. h'_2) ; par conséquent, $\pi_i(h'_1) = w_i\, 0$ et $\pi_i(h'_2) = \bar{0}w_2$, ce qui est contraire au fait que $h'_2\, h'_1 \notin \bar{0}\widehat{[k]}^*\, i$.

w appartient à $L_{[k]\setminus\{i\}}$ et n'admet aucun facteur de la forme $j\bar{j}$ ($j = 0 , 1 , \dots , k$) ; d'après la remarque 1, w s'écrit $w = 0^{n_3} w' \bar{0}^{n_3}$, où w' appartient à $M_{[k]\setminus\{i\}}$, mais n_3 est nul, car $h \notin i\widehat{[k]}^*\, \bar{0}$.

Q. E. D.

V. Etude de L'_k

Dans cette partie, nous démontrons la propriété 2. Nous utilisons pour cela la deuxième caractérisation de L_k, donnée dans la partie III.

Soit, dans $\widehat{[k]}^*$, la congruence de Thue (cf. [10] et [13]), définie par $i\bar{i} \sim e$ pour $i = 0 , 1 , \dots , k$; pour tout f de $\widehat{[k]}^*$, nous notons $\mathring{f}$ le mot de la classe de f de plus petite longueur. Un mot de f est dit réduit si $\mathring{f} = f$.

Remarquons que si $f = f_1\, i_1\, \bar{i}_2\, f_2$ (où $i_1 \neq i_2$), alors $\mathring{f} = \mathring{f}_1\, i_1\, \bar{i}_2\, \mathring{f}_2$ (en général, si $f = f_1\, f_2$, $\mathring{f} \neq \mathring{f}_1\, \mathring{f}_2$).

Les lemmes suivants donnent une caractérisation des mots de L'_k par rapport à leur mot réduit.

LEMME V.1. - *Si* g *appartient à* L'_k , $\mathring{g}$ *appartient à* M_k .

Il est clair que si f $(\in ([k] \cup \{0\})^*)$ est un emboîtement, il en est de même de tout sous-mot de f contenant toutes les lettres de $[k] \cup \{0\}$ et commençant par 0 .

Montrons que $\mathring{g}$ appartient à L_k .

$\check{\mathring{g}}$ est sous-mot de $\check{g}$, d'autre part, g appartenant à L'_k , $g = g_1\, 0\bar{i}g_2$ (où $g_1 \in \{0\ ,\ \bar{0}\}^*$), ce qui entraîne $\mathring{g} = \mathring{g}_1\, 0\mathring{\bar{i}}\mathring{g}_2$, et $\check{\mathring{g}}$ commence par 0 , enfin $\check{\mathring{g}}$ contient toutes les lettres de $[k] \cup \{0\}$ puisque, pour tout j $(j = 1,k)$, il existe i , g_j et g'_j tels que

$$g = g_j\ i\bar{j}g'_j \quad \text{où} \quad |g_j|_j = 0\ .$$

$\check{\mathring{g}}$ est donc un emboîtement.

On vérifie facilement que $\psi(\mathring{g})$ appartient à L_0 , et que l'involution associée à $\psi(\mathring{g})$ est $\check{\mathring{g}}$-autorisée. $\mathring{g}$ est alors élément de L'_k et de M_k , car il ne contient aucun facteur de la forme $i\bar{i}$ (mot réduit).

LEMME V.2. - *Soit* g *un élément de* L'_k , *et soit* $f = \mathring{g}$. *Si* $|f| = \ell$, $f = a_1\, a_2 \ldots a_\ell$; g *est alors égal à* $a_1\, w_1 \ldots a_\ell\, w_\ell$, *et chaque* w_i *est un produit de mots appartenant à* $L^{i_1}\, L^{i_2} \ldots L^{i_\alpha}$.

En effet, w_i est un mot tel que $\mathring{w}_i = e$. De plus, aucun sous-mot de $\check{w}_i$ ne peut être de la forme $i_1\, i_2\, i_1$, car alors la première occurence de $\bar{i}_2$ dans g se trouve nécessairement à gauche de w_i et $i_2\, i_1\, i_2\, i_1$, et sous-mot de $\check{g}$, en contradiction avec le fait que $\check{g}$ est un emboîtement. Par conséquent, w_i est un produit de mots $w_i = v_{i_1}\, v_{i_2} \ldots v_{i_\alpha}$ où $v_{i_j} \in L^{i_j}$. Nous supposerons que v_{i_1} est un mot de L^{a_i} quitte à multiplier à gauche w_i par le mot vide.

Les facteurs v_{i_2} , ... , v_{i_α} non vides de g seront dits *mauvais facteurs de* g .

LEMME V.3. - *Pour tout mauvais facteur* v_{i_j} *de* g , *il existe une décomposition unique de* g :

$$g = g_1\ i_j\ \bar{i}'_j\ g_2\ v_{i_j}\ g_3 \quad \text{où} \quad \begin{cases} |g_2|_{i_j} = 0 \\ |g_1|_{i'_j} = 0 \end{cases} \qquad (i'_j \neq i_j)$$

En effet, la première occurence de i_j ou $\bar{i}_j$ dans g ne saurait appartenir à v_{i_j} (car ce doit être un $\bar{i}_j$ précédé par un ℓ). Soit donc

$$g = g' x_j \, g'' v_{i_j} \, g''' \quad \text{ou} \quad |g''|_{i_j} = 0 \quad (x_j = i_j \ \text{ou} \ \bar{i}_j) .$$

g'' n'est pas vide car il contient au moins a_i .

$g'' = y g'_2$, y est nécessairement la première occurence d'un $\bar{i}'_j$ (car $\check{g}$ est un emboîtement) et, par conséquent

$$g = g_1 \, i_j \, \bar{i}'_j \, g'_2 \, v_{i_j} \, g_3 .$$

<u>Démonstration de la propriété 2</u>. - Nous avons défini Λ , application de $Z\langle\!\langle \widehat{[k]^*} \rangle\!\rangle$ dans lui-même, par $\Lambda(i) = iL^i$, $\Lambda(\bar{i}) = \bar{i}L^i$. Remarquons que si $g \in \Lambda(f)$, alors $\overset{o}{g} = \overset{o}{f}$; par conséquent, si f' et f'' sont réduits, $\Lambda(f') \cap \Lambda(f'') = \emptyset$.

Nous avons défini $\bar{M}_k$ comme

$$\bar{M}_k = \Lambda(M_k) = \sum_{f \in M_k} \Lambda(f)$$

(car les $\Lambda(f)$ sont disjoints).

Soit Λ' l'application de M_k sur L'_k , définie par $\Lambda'(f) = \{g \in L'_k \mid \overset{o}{g} = f\}$.

D'après le lemme V.1,

$$\Lambda'(M_k) = L'_k = \sum_{f \in M_k} \Lambda(f) .$$

Pour démontrer la propriété 2, nous définissons pour tout f de M_k une bijection b de $\Lambda'(f)$ sur $\Lambda(f)$ telle que g et $b(g)$ aient même image commutative.

<u>Définition de</u> b . - Soit g un élément de $\Lambda'(f)$, d'après le lemme V.3 , g contient au plus k <u>mauvais facteurs</u> et, pour tout v_j , g s'écrit

$$g = g_1 \, i_j \, \bar{i}'_j \, g_2 \, v_j \, g_3 ,$$

alors nous définissons $g^j = g_1 \, i_j \, v_j \, \bar{i}'_j \, g_3$, et nous dirons que v_j a été <u>déplacé</u>.

$b(g)$ est le mot obtenu après déplacement de tous les mauvais facteurs de g .

On vérifie que :

- l'ordre dans lequel les mauvais facteurs sont déplacés ne modifie pas le résultat $b(g)$,
- $b(g)$ appartient bien à $\Lambda(f)$,
- g et $b(g)$ ont même image commutative.

<u>Définition de</u> b' (réciproque de b). - Soit h un élément de $\Lambda(f)$, $h = a_1 u_1 a_2 u_2 \dots a_\ell u_\ell$; les <u>mauvais facteurs</u> de h sont ceux des u_i placés immédiatement avant la première occurence d'un $\bar{j}$ dans h .

Pour tout mauvais facteur u_i , h s'écrit uniquement sous la forme

$$h = g_1 \, iu_i \, \bar{j}g_2 \, g_3$$

où aucune lettre apparaissant dans $\check{g}_1$ n'apparaît dans $\check{g}_2$, et g_3 est vide, ou bien la première lettre de g_3 apparait dans g_1 .

Soit $h^j = g_1 \, i\bar{j}g_2 \, u_i \, g_3$, nous dirons que u_i a été <u>déplacé</u>.

b'(h) est le mot obtenu en déplaçant tous les mauvais facteurs de h .

On vérifie facilement que :

- L'ordre dans lequel les mauvais facteurs sont déplacés n'intervient pas dans le résultat,
- Si b(g) = h , b'(h) = g ,
- Si b'(h) = g , b(g) = h .

b est donc une bijection.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTIER (P.) et FOATA (D.). - Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements. - Berlin, Springer-Verlag, 1969 (Lecture Notes in Mathematics, 85).

[2] CHOMSKY (N.) and SCHÜTZENBERGER (M. P.). - The algebraic theory of context free languages in computer programming and formal systems. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1963.

[3] CORI (R.). - Graphes planaires et systèmes de parenthèses ; Thèse de 3e cycle, Paris, 1969.

[4] CRESTIN (J.-P.). - Sur un langage quasi-rationnel d'ambiguité non bornée, Thèse 3e cycle, Paris, 1968.

[5] FLIESS (M.). - Transductions et séries formelles, Thèse 3e cycle, Paris, 1969.

[6] FLIESS (M.). - Exemples de transductions, Automatentheorie und formale Sprachen [1969. Oberwolfach] (à paraître).

[7] FOATA (D.). - Etude algébrique de certains problèmes d'analyse combinatoire et du calcul des probabilités, Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, t. 14, 1965, p. 81-241.

[8] FOATA (D.) et SCHÜTZENBERGER (M. P.). - Théorie géométrique des polynômes eulériens. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 138).

[9] GROSS (M.). - Applications géométriques des langages formels, I. C. C. Bull., t. 5, 1966, p. 141-168.

[10] GROSS (M.) et LENTIN (A.). - Notions sur les grammaires formelles. - Paris, Gauthier-Villars, 1967.

[11] LENORMAND (C.). - Séries formelles et quelques problèmes combinatoires, Automatentheorie und formale Sprachen [1969, Oberwolfach] (à paraître).

[12] NIVAT (M.). - Transductions des langages de Chomsky, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 18, 1968, fasc. 1, p. 339-455.

[13] NIVAT (M.) et PERROT (J.-F.). - Prolégomènes à une étude algébrique des langages formels. - Paris, Institut Blaise Pascal, 1965.

[14] TUTTE (W. T.). - A census of slicings, Canad. J. Math., t. 14, 1962, p. 708-722.

[15] TUTTE (W. T.). - A census of planar maps, Canad. J. Math., t. 15, 1963, p. 249-271.

Robert CORI
26 rue Ferdinand Jamin
92 - BOURG-la-REINE

(Texte reçu le 11 mars 1970)