ÉLIE CARTAN

La structure des groupes infinis (suite)

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 4 (1936-1937), exp. n° 7, p. 1-45
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1936-1937__4__A9_0>

IV.- H.

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Quatrième année 1936-1937

Les TRAVAUX de M. ELIE CARTAN

La STRUCTURE des GROUPES INFINIS
(suite)

Exposé fait par M. Elie CARTAN, le lundi 15 Mars 1937

Cette seconde conférence sera consacrée à deux problèmes importants de la théorie des groupes.

Problème A.- Recherche des groupes de Lie isomorphes d'un groupe de Lie donné.

Problème B.- Recherche des sous-groupes de Lie d'un groupe de Lie donné.

A.- Groupes isomorphes d'un groupe donné

Nous avons déjà introduit la notion d'isomorphisme en partant de la notion de prolongement (holoédrique ou mériédrique) d'un groupe. Deux groupes G_1 et G_2 sont isomorphes holoédriques s'ils admettent deux prolongements holoédriques semblables ; le groupe G_1 est isomorphe mériédrique de G_2 s'il existe un prolongement mériédrique de G_1 semblable à un prolongement holoédrique de G_2. Il importe de remarquer ici la nécessité de distinguer un isomorphisme mériédrique propre et un isomorphisme mériédrique impropre. Considérons par exemple le groupe de Lie G

$$X = x \quad , Y = y + f(x) \quad , \quad Z = z + f'(x)$$

où f(x) désigne une fonction analytique arbitraire et f'(x) sa dérivée. Soit G_1 le groupe qui indique comment G transforme x et y , et G_2 le groupe qui indique comment G transforme x et z . G est un prolongement holoédrique de G_1 et un prolongement mériédrique de G_2 ; il en résulte alors que G_2 est isomorphe mériédrique de G_1 . Mais d'autre part G_1 et G_2 ont les mêmes équations de définition ($X=x$, $\frac{\partial Y}{\partial y} = 1$ pour G_1 ; $X=x$, $\frac{\partial Z}{\partial z} = 1$ pour G_2) : ils doivent donc être regardés aussi comme isomorphes holoédriques ; nous dirons dans ce cas que l'isomorphisme mériédrique est impropre. C'est pour cette raison qu'il peut y avoir des groupes simples propres et des groupes simples impropres .

Avant d'aborder la solution du problème A, il sera bon de dire quelques mots du <u>prolongement normal</u> d'un groupe <u>normal</u> G (c'est-à-dire d'un groupe dont les équations de définition sont du premier ordre . Soient $x^{\nu+1}, \ldots, x^n$ les invariants de G et

$$(1) \qquad d\omega^i = \frac{1}{2} c^i_{jk}\,\omega^j\,\omega^k + a^i_{k\rho}\,\omega^k\,\varpi^\rho \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

ses équations de structure . Le prolongement normal est celui qui indique comment G transforme les variables $x^1, x^2, \ldots x^n$ et les quantités $u^1, u^2, \ldots, u^p$ qui entrent dans les coefficients des formes ω^i . Nous avons déjà vu que les équations

$$\omega^i(\bar{x},\bar{u},d\bar{x}) = \omega^i(x,u,dx)$$

conduisent aux équations

$$a^{i}_{k\rho}\ \omega^k(x,u,dx)\left[\varpi^\rho(\bar{x},\bar{u},d\bar{x},d\bar{u}) - \varpi^\rho(x,u,dx,du)\right] = 0$$

et comment on en déduit

$$\varpi^\alpha(\bar{x},\bar{u},d\bar{x},d\bar{u}) - \varpi^\alpha(x,u,dx,du) = b^\alpha_{\lambda k}\ t^\lambda \omega^k$$

avec $\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n$ variables arbitraires t^λ.

Ces équations peuvent s'écrire

$$(\varpi^\alpha)^*(\bar{x},\bar{u},\bar{v},d\bar{x},d\bar{u}) = (\varpi^\alpha)^*(x,u,v,dx,du)$$

en posant

$$(\varpi^\alpha)^* = \varpi^\alpha + b^\alpha_{\lambda k}\ v^\lambda \omega^k$$

En écrivant maintenant ϖ^α au lieu de $(\varpi^\alpha)^*$, le groupe prolongé est celui qui laisse invariantes les formes ω^i et ϖ^α. On a du reste

$$(2)\qquad d\varpi^\alpha = \frac{1}{2}\gamma^\alpha_{\rho\sigma}\varpi^\rho\varpi^\sigma + \delta^\alpha_{k\rho}\omega^k\varpi^\rho + \frac{1}{2}\varepsilon^\alpha_{kh}\omega^k\omega^h + b^\alpha_{\lambda k}\omega^k\chi^\lambda$$

les χ^λ étant de nouvelles formes linéairement indépendantes par rapport aux <u>dv</u> ; mais en réalité on peut profiter de l'indétermination relative de ces formes pour annuler le plus grand nombre possible des autres coefficients .

Notons encore que les formules (2) peuvent s'obtenir en résolvant de la manière la plus générale les équations obtenues en annulant les différentielles extérieures des seconds membres des équations (1) , ce qui est un problème purement algébrique.

On démontre facilement que le système de Pfaff systatique du groupe prolongé, à savoir

$$b_{\lambda k}^{\alpha}\omega^{k} = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,p\ ;\ \lambda = 1,2,\ldots,\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + r\sigma_r)$$

est identique à celui de G. Par suite les <u>invariants essentiels d'un groupe normal se conservent par le prolongement normal</u>.

La recherche des groupes de Lie isomorphes d'un groupe de Lie donné G, qu'on peut toujours supposer normal, reposent sur le lemme suivant, dont nous ne donnerons pas la démonstration.

<u>Lemme</u>.- <u>Si</u> G_1 <u>et</u> G_2 <u>sont deux groupes normaux tels que</u> G_1 <u>admette</u> G_2 <u>comme prolongement holoédrique, le groupe</u> G_2 <u>admet réciproquement comme prolongement holoédrique un des prolongements holoédriques normaux successifs de</u> G_1, <u>complété au besoin par l'adjonction de plusieurs variables transformées identiquement</u>.

Cela posé, soit G <u>un</u> groupe normal donné, $\mathcal{G}$ un groupe isomorphe (holoédrique ou mériédrique) de G. Par définition il existe deux groupes semblables Γ_1 et Γ_2, l'un Γ_1 prolongement holoédrique de G, l'autre Γ_2 prolongement (holoédrique ou mériédrique) de $\mathcal{G}$. On peut supposer Γ_1

(et par suite Γ_2) normal . D'après le lemme, le groupe Γ_1 admet comme prolongement un prolongement normal G' de G , complété au besoin en $\overline{G'}$ par l'adjonction de variables transformées transitivement . Par suite, $\overline{G'}$, par un changement de variables convenables, est un prolongement de $\mathcal{G}$; d'où le théorème :

Théorème fondamental . - Tout groupe $\mathcal{G}$ isomorphe holoédrique ou mériédrique d'un groupe normal donné G admet comme prolongement un des prolongements normaux successifs de G, complété au besoin par l'adjonction de variables transformées identiquement .

En définitive, le problème transformé se ramène à trois autres :

1°- Former les prolongements normaux successifs d'un groupe normal donné ;

2°- Trouver tous les groupes admettant pour prolongement un groupe normal donné ;

3°- Reconnaître dans le cas où un groupe normal G est le prolongement d'un groupe $\mathcal{G}$, si ce prolongement est holoédrique ou mériédrique.

Nous avons donné des indications suffisantes sur le premier problème . Occupons-nous du second .

Recherche des groupes admettant pour prolongement un groupe normal donné

Soit G un groupe normal n'ayant que des invariants essentiels, mais aux variables x^i duquel on pourra adjoindre un nombre indéterminé de variables y transformées identiquement (invariants non essentiels) . Soit $\mathcal{G}$ un groupe admettant G pour prolongement . Les variables transformées par $\mathcal{G}$ seront certaines fonctions des variables x, y, et on pourra toujours supposer qu'elles comprennent tous les invariants , essentiels ou non de G, quitte à se débarrasser ensuite de ceux d'entre eux qui ne seront pas essentiels <u>pour</u> $\mathcal{G}$. Les variables transformées par $\mathcal{G}$, autres que ses invariants, peuvent être considérées comme les intégrales premières d'un système de Pfaff que nous supposerons réductible à la forme

$$(3) \qquad \theta^i \equiv \omega^i + \alpha^i_k \, \omega^{s+k} + \beta^i_k \, dy^k = 0$$

$$(i=1,2,\ldots,s;\ k=1,2,\ldots,n-s)$$

Le groupe $\mathcal{G}$ est celui qui indique comment G transforme entre elles ces intégrales premières et les y^k ; mais comme G laisse invariantes les formes ω^i et dy^k et doit d'autre part laisser invariant le système précédent (puisque G transforme entre elles les variables de $\mathcal{G}$), c'est que les coefficients α^i_k et β^i_k ne dépendent que des invariants de G et des y^k; on peut donc supprimer dans les équations (3) les termes en dy^k et réduire ces équations à la forme

$$(3') \quad \theta^i \equiv \omega^i + \alpha^i_k \, \omega^{s+k} = 0$$

$$(i=1,2,\ldots,s \; ; \; k=1,2,\ldots,n-1)$$

Les coefficients α^i_k étant des invariants de G et de $\mathcal{G}$, on peut les regarder comme des invariants indépendants, quitte ensuite à établir entre ces invariants , si cela est nécessaire, certaines relations .

Le calcul de $d\,\theta^i$

$$d\,\theta^i \equiv d\,\omega^i + \alpha^i_k \, d\,\omega^{s+k} + d\,\alpha^i_k \, \omega^{s+k}$$

donne , en remplaçant $d\,\omega^i$ et $d\,\omega^{s+k}$ par leurs valeurs, et tenant compte des équations (3), une expression contenant des termes de la forme

$$\theta^k \theta^h , \quad \theta^k \omega^{s+h} , \; \omega^{s+k} \, \omega^{s+h} ,$$

$$d\,\alpha^i_k \, \omega^{s+k} , \; \theta^k \varpi^\rho , \; \omega^{s+k} \varpi^\rho .$$

Le système (3') auquel on joint $dy^h = 0$, $d\alpha^i_k = 0$ est complètement intégrable . Il faut donc

1°) que l'ensemble des termes en $\omega^{s+k} \omega^{s+h}$ soit identiquement nul;

2°) que l'ensemble des termes en $\omega^{s+k} \varpi^\rho$ soit identiquement nul .

<u>Ces conditions se traduisent par des relations algèbriques entre les</u> α^i_k <u>et les coefficients de structure de</u> G . On pourra imaginer des relations résolues de manière à exprimer les α^i_k en fonctions déterminées des invariants essentiels de G et des paramètres z^k qu'on pourra provisoirement regarder comme de nouveaux invariants indépendants. Cela fait les transformations qui indiquent comment G transforme entre elles les intégrales premières du système (3) constituent un groupe $\mathcal{G}$ isomorphe de G , avec comme invariants les invariants essentiels de G et les invariants z^k . On formera alors le système systatique de $\mathcal{G}$, obtenu en annulant les dérivées partielles des $d\theta^i$ par rapport aux formes ω^{s+k} et ϖ^p . Les premiers membres des équations de ce système sont linéaires par rapport aux θ^i et aux dz^k . Les invariants essentiels de $\mathcal{G}$ s'en déduisent.

La méthode précédente permet donc, <u>par des calculs purement algèbriques</u> de former les équations de structure des groupes $\mathcal{G}$ admettant G pour prolongement et n'ayant que des invariants essentiels.

Si le groupe G est fini, il n'a pas d'invariant essentiel et est simplement transitif ; soit r son ordre . Tout groupe $\mathcal{G}$ isomorphe à n + h variables et h invariants, ne pourra exister que pour $n \leq r$; si $n = r$ $\mathcal{G}$ n'a pas d'invariant essentiel et se confond avec G .

Exemple I .-

Prenons le groupe G simplement transitif des translations du plan

$$\overline{x} = x + a \quad , \quad \overline{y} = y + b$$

On a ici

$$\omega^1 = dx \quad , \omega^2 = dy \ ; \qquad d\omega^1 = 0 \ , \quad d\omega^2 = 0 \ .$$

Le seul cas qui se présente est celui d'un groupe $\mathcal{G}$ à h+1 variables dont h invariants . On posera suivant la méthode générale

$$\theta^1 \equiv \omega^1 + z\omega^2 \qquad , \ \text{d'où} \qquad d\theta^1 = dz\,\omega^2$$

Le système systatique est $dz = 0$; z est un invariant essentiel . La variable de $\mathcal{G}$ autre que z est $x + z\,y = X$, et on a pour équations de $\mathcal{G}$

$$\overline{X} = X + a + bz \quad , \quad \overline{Z} = z$$

On pourrait aussi prendre pour z une constante , mais alors $\mathcal{G}$ serait isomorphe mériédrique de G .

Exemple II.-

Soit le groupe simplement transitif

$$\overline{x} = ax \qquad , \qquad \overline{y} = ay + b$$

avec

$$\omega^1 = \frac{dx}{x} \qquad , \ \omega^2 = \frac{dy}{x} \ ; \ \ d\omega^1 = 0 \ , \ \ d\omega^2 = \omega^2\,\omega^1$$

Le seul cas à considérer est celui de $s=1$ ($h+1$ variables dont h invariants) . Si d'abord on prend $\theta^1 \equiv \omega^1$, on a un système $\theta^1 = 0$ complètement intégrable avec l'intégrale première x ; dans ce cas $\mathcal{G}$ n'a pas d'invariant essentiel et a pour équation $\bar{x} = ax$: il est isomorphe mériédrique de G .

Dans le cas général on posera

$$\theta^1 \equiv \omega^2 + z\,\omega^1 , \qquad \text{avec} \qquad d\theta^1 = (\theta^1 + dz)\,\omega^1 .$$

Le système astatique de $\mathcal{G}$ est $\theta^1 + dz = 0$; l'invariant z n'est pas essentiel et on peut donner à z la valeur 0 . La variable unique de $\mathcal{G}$ est l'intégrale première y de $\omega^2 = 0$; l'équation de $\mathcal{G}$ est

$$\bar{y} = ay + b$$

et $\mathcal{G}$ est isomorphe holoédrique de G .

Exemple III.-

Prenons pour G le groupe infini d'une variable x , avec

$$\omega^1 = u\,dx \quad , \qquad d\omega^1 = \omega^1 \varpi$$

En changeant de notation et en formant les prolongements normaux successifs nous aurons par différentiations extérieures

$$d\omega^1 = \omega^1\,\omega^2$$

$$d\omega^2 = \omega^1\,\omega^3$$

$$d\omega^3 = \omega^1\omega^4 + \omega^2\,\omega^3$$

$$d\omega^4 = \omega^1\,\omega^5 + 2\,\omega^2\,\omega^4$$

$$d\omega^5 = \omega^1\,\omega^6 + 3\omega^2\,\omega^5 + 2\,\omega^3\,\omega^4$$

....

Le ième prolongement normal de G a pour équations de structure l'ensemble des i+1 premières équations de la suite .

On peut obtenir facilement les formes ω^i successives on a

$$\omega^1 = u\,dx$$

$$\omega^2 = -\frac{du}{u} + v\,dx$$

$$\omega^3 = -\frac{dv}{u} + w\,dx$$

$$\omega^4 = -\frac{dw}{u} + \frac{w\,dv}{u^2} - \frac{w}{u^2}\,du + s\,dx$$

....

avec les équations finies

$$\bar{x} = f(x) = X(x)$$

$$\bar{u} = \frac{u}{X'}$$

$$\bar{v} = \frac{v}{X'} - \frac{X''}{X'^2}$$

$$\bar{w} = \frac{w}{X'} - \frac{v}{u}\frac{X''}{X'^2} - \frac{1}{u}\frac{X'''}{X'^2} + \frac{2}{u}\frac{X''^2}{X'^3}$$

....

Bornons-nous à la recherche des groupes $\mathcal{G}$ à $h+2$ variables dont h invariants. Il faudra prendre pour θ^1 et θ^2 deux combinaisons linéaires des formes ω^i, soit

$$\theta^1 \equiv \omega^\alpha + p_{\alpha-1}\omega^{\alpha-1} + \dots + p_2\,\omega^2 + p_1\,\omega^1 = 0$$

$$\theta^2 \equiv \omega^\beta + q_{\beta-1}\omega^{\beta-1} + \dots + q_2\,\omega^2 + q_1\,\omega^1 = 0$$

$$(\beta > \alpha \geq 1)$$

Si $\alpha > 1$, $d\theta^2$ contient le terme $\omega^1\omega^{\beta+1}$ qui ne peut se réduire en tenant compte des équations du système, il faut donc $\alpha = 1$ et par suite le système est de la forme (1)

$$\theta^1 \equiv \omega^1 = 0$$

$$\theta^2 \equiv \omega^\alpha + p_{\alpha-1}\,\omega^1 + \dots + p_2\,\omega^2 = 0$$

---

(1) D'une manière générale le système (3) dont les variables de $\mathcal{G}$ sont les intégrales premières est invariant par le groupe de stabilité linéaire de G, comme le montre un raisonnement géométrique simple : ici le groupe de stabilité de $G^{(\beta)}$ est $\delta\omega^\beta = \omega^1$; les équations $\theta^1 = \theta^2 = 0$ ne doivent donc pas changer quand on remplace ω^β par ω^β + un multiple arbitraire de ω^1.

On se rend compte facilement que l'exposant α ne peut dépasser 4 . Il n'y a donc que trois cas possibles .

1°) On prend

$$\theta^1 \equiv \omega^1 = 0 \quad , \quad \theta^2 \equiv \omega^2 = 0$$

avec

$$d\,\theta^1 = \theta^1\,\theta^2 \quad , \; d\,\theta^2 = \theta^1 \omega^3 ;$$

le système systatique se réduit à $\theta^1 = 0$; il n'y a pas d'invariant essentiel . Les variables du groupe $\mathcal{G}$ sont x et u et l'on a

$$\bar{x} = X \quad , \quad \bar{u} = \frac{u}{X'},$$

2°) On prend

$$\theta^1 \equiv \omega^1 = 0 \quad , \quad \theta^2 \equiv \omega^3 + \alpha\,\omega^2$$

avec

$$d\,\theta^1 = \theta^1 \omega^2 , \quad d\,\theta^2 = \alpha\,\theta^1\,\theta^2 + \theta^1\,\omega^4 + (d\alpha - \alpha^2\,\theta^1 - \theta^2)\,\omega^2$$

Le système systatique est ici

$$\theta^1 = 0 \qquad d\alpha - \alpha^2\,\theta^1 - \theta^2 = 0 ;$$

Il n'y a donc pas d'invariant essentiel et on peut faire $\alpha = 0$. Les variables de $\mathcal{G}$ sont les intégrales premières x et v du système $\omega^1 = \omega^3 = 0$. Les équations finies sont

$$\bar{x} = X \quad , \quad \bar{v} = \frac{v}{X'} - \frac{X''}{X'^2}$$

et l'on a

$$d\theta^1 = \theta^1 \omega^2 \quad . \quad d\theta^2 = \theta^1 \omega^4 - \theta^2 \omega^2$$

3°) On prend

$$\theta^1 \equiv \omega^1 = 0 \qquad \theta^2 \equiv \omega^4 + \alpha \omega^3 + \beta \omega^2 = 0 .$$

avec

$$d\theta^1 = \theta^1 \omega^2$$

$$d\theta^2 = -\alpha\omega^2 \omega^3 + \alpha \theta^1 \theta^2 + \theta^1 \omega^5 + \left[d\alpha + (\beta - \alpha^2)\theta^1\right] \omega^3$$
$$+ (d\beta - 2\theta^2 + \alpha\beta\theta^1) \omega^2$$

il faut donc $\alpha = 0$ et l'on a

$$d\theta^2 = \theta^1 \omega^5 + \beta \theta^1 \omega^3 + (d\beta - 2\theta^2) \omega^2$$

Le système systatique est

$$\theta^1 = 0 \quad , \qquad d\beta - 2\theta^2 = 0 .$$

Il n'y a donc aucun invariant essentiel . Le coefficient β peut être pris nul avec

$$d\theta^1 = \theta^1 \omega^2 \quad , \quad d\theta^2 = \theta^1 \omega^5 - 2\theta^2 \omega^2$$

Les variables transformées par $\mathcal{G}$ sont les intégrales premières du système $\omega^1 = \omega^2 = 0$, à savoir x et $u w - \frac{1}{2} v^2 = \xi$. Les équations finies sont

$$\bar{x} = X \quad , \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{X'^2} - \frac{X'''}{X'^3} + \frac{3}{2} \frac{X''^2}{X'^4}$$

On remarquera que tous ces groupes sont sans invariant essentiel : mais on peut trouver un groupe $\mathcal{G}$ isomorphe de G à six variables, dont un invariant essentiel. On trouvera dans le mémoire de M.E.Cartan la liste des groupes à trois variables ainsi qu'un certain nombre d'autres exemples. Citons seulement le groupe suivant, isomorphe au groupe $\overline{x} = X(x)$, $\overline{y} = Y(y)$:

$$\overline{x} = X(x)$$

$$\overline{y} = y(y)$$

$$\overline{z} = z\sqrt{\frac{X'}{Y'}}$$

$$\overline{t} = \frac{t}{\sqrt{X'Y'}} - z\frac{X''}{X'\sqrt{X'Y'}} - \frac{1}{z}\frac{Y''}{Y'\sqrt{X'Y'}}$$

Remarque

Le problème que nous venons de résoudre est au fond la détermination des différents objets géométriques (analytiques) au sens de O.Veblen et J.A.Schouten. Les dernières formules définissent par exemple un être géométrique à deux composantes z et t, envisagé par rapport au groupe infini $\overline{x} = f(x)$, $\overline{y} = \varphi(y)$; les deux dernières formules indiquant la loi suivant laquelle se transforment ces deux composantes par une transformation quelconque du groupe de base. L'objet géométrique classique est la forme différentielle quadratique $g_{ij}\, dx^i dx^j$, définie par ses <u>composantes</u> g_{ij}. Les g_{ij} se transforment par un groupe isomorphe au groupe général de n variables . Si l'on pose $\omega^i = u^i_k\ dx^k$ et que l'on forme $(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \dots + (\omega^n)^2$, les coefficients $\sum_i u^i_k u^i_h$ se transforment entre eux suivant le groupe cherché.

<u>Reconnaitre si le groupe $\mathcal{G}$ admet G pour prolongement holoédrique ou mériédrique .</u>

Nous ne dirons que quelques mots de ce second problème dont on trouvera la solution détaillée dans le Mémoire de M.E.Cartan . Voici le principe de cette solution .

Supposons, ce qui est permis, qu'on ait, s'il y a lieu, ajouté aux invariants essentiels de G les invariants essentiels de $\mathcal{G}$. On peut alors supposer que les variables de $\mathcal{G}$ sont les intégrales premières des équations obtenues en annulant les s premières formes ω^i qui entrent dans les équations de structure de G . Soient $x^1, x^2, \dots, x^s$ ces variables . On a des relations de la forme

$$\omega^i = a^i_k\,(x^1, \dots, x^s, \xi^1, \dots, \xi^q)\ dx^k \qquad (i=k=1,2,\dots,s)$$

les ξ étant des quantités indépendantes des $x^1, \dots, x^s$. Cela posé, cherchons quelles sont les transformations de G

qui correspondent à la transformation identique de $\mathcal{G}$.
Comme elles laissent les formes ω^i invariantes, on aura pour ces transformations de G

$$a^i_j\,(x^1,\ldots,x^s,\ \bar{\xi}^1,\ldots,\ \bar{\xi}^q) = a^i_j\,(x^1,\ldots,x^s,\ \xi^1,\ldots,\xi^q)$$

On peut toujours supposer que les coefficients a^i_j sont q fonctions indépendantes de $\xi^1,\ \ldots,\ \xi^q$. On voit donc que toute transformation de G qui correspond à la transformation identique de $\mathcal{G}$ laisse invariantes non seulement les variables x^1, x^2, ..., x^s, mais encore les variables ξ^1, ..., ξ^q.
Or, ces dernières, jointes aux premières, constituent les intégrales premières des équations obtenues en annulant les formes ω^i et les formes $\dfrac{\partial(d\,\omega^i)}{\partial(dx^k)}$ ou encore $\dfrac{\partial(d\,\omega^i)}{\partial\,\omega^k}$ $(i,k=1,2,\ldots,s)$; on a, en effet

$$\frac{\partial(d\ \omega^i)}{\partial(d\ x^k)} \equiv -\frac{\partial a^i_k}{\partial\xi^h}\ d\,\xi^h \quad (\text{mod.}\ \omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^s)$$

On conçoit qu'en procédant ainsi de proche en proche on arrive à trouver toutes les variables de G (ou plutôt toutes les fonctions de ces variables) qui sont invariantes par les transformations de G correspondant à la transformation identique de $\mathcal{G}$. Si l'on arrive ainsi à trouver autant de fonctions indépendantes qu'il y a de variables, le groupe G est un prolongement holoédrique de $\mathcal{G}$; sinon le prolongement est mériédrique . La connaissance des seules équations de structure permet dans chaque cas de déterminer ce qu'il en est et même fournit la structure du sous-groupe invariant de G qui correspondà la transformation identique de $\mathcal{G}$. Pour plus de détails sur la méthode , voir le Mémoire de M.E.Cartan (Annales Ecole Normale, 1905).

Dans le cas où G est le groupe infini d'une variable x , l'isomorphisme est toujours holoédrique car à la transformation identique de $\mathcal{G}$ correspond toujours la transformation $\bar{x} = x$.

Dans l'exemple I traité plus haut, on a

$$d\,\theta^1 = dz\ \omega^2 .$$

si z n'est pas une constante n, mais un invariant, $\frac{\partial(d\,\theta^1)}{\partial(\,dz\,)} = \omega^2$; à la transformation identique de $\mathcal{G}$ correspondent dans G les transformations qui laissent invariantes les intégrales premières de $\theta^1 = 0$ et $\omega^2 = 0$, c'est-à-dire x et y ; l'isomorphisme est holoédrique.Si z est une constante , l'isomorphisme est mériédrique .

Dans l'exemple II, avec une seule variable (l'invariant non essentiel z étant égal à zéro), on a $d\,\theta^1 = \theta^1\omega^1$ $\frac{\partial(d\theta^1)}{\partial\theta^1} = \omega^1$. Le système

$$\theta^1 = \omega^2 = 0 \qquad , \qquad \omega^1 = 0$$

montre que l'isomorphisme est holoédrique .

B.- Sous-groupes de Lie d'un groupe donné

Nous nous proposons de chercher tous les sous-groupes de Lie d'un groupe donné . Nous avons déjà remarqué que certains sous-groupes évidents comme le sous-groupe des transformations du groupe donné qui laissent fixe un point, ne sont pas toujours des groupes de Lie lorsque le groupe donné est infini ; nous ne nous en occuperons pas .

En principe on obtiendra un sous-groupe de Lie g (il ne sera plus question que de ceux-là) d'un groupe de Lie donné G en ajoutant aux équations de définition de G de nouvelles équations de manière que le nouveau système d'équations définisse un groupe de Lie . La difficulté est de savoir quelles équations il convient d'ajouter . Nous pouvons d'abord supposer que le groupe G est normal car s'il ne l'est pas on peut le prolonger holoédriquement de manière à le rendre normal, le sous-groupe g se prolongeant automatiquement en même temps que G . Les équations de définition de G étant alors du premier ordre, les équations de définition de g pourront être elles-mêmes du premier ordre ou d'un ordre supérieur .

Quoi qu'il en soit, supposons qu'aux équations de définition de G il y ait lieu d'ajouter pour obtenir celles de g un certain nombre d'équations finies. D'après ce qui a été vu dans l'exposé précédent, cela signifie que le groupe g admettra comme invariants non seulement les invariants de G, mais encore de nouveaux invariants dont il y aura autant d'indépendants qu'on a ajouté d'équations finies indépendantes entre les variables primitives et les variables transformées. Il peut arriver qu'on ait ainsi toutes les équations de définition de g. Dans ce premier cas, g se présente comme l'ensemble des transformations de G qui laissent invariantes un certain nombre de fonctions indépendantes des variables. Ces fonctions peuvent être appelées les invariants caractéristiques du sous-groupe g.

Supposons maintenant que pour obtenir g il faille ajouter de nouvelles équations aux dérivées partielles du premier ordre aux équations de définition de G. Revenons à la définition de G comme ensemble des transformations qui laissent invariantes n formes de Pfaff :

$$\omega^i = a_k^i (x,u) \ dx^k \qquad (i=1,2,\dots,n \ ; \ k=1,2,\dots,p)$$

La manière dont les variables u se transforment par G est fournie par les équations

$$u^i_k(\bar{x},\bar{u})\, d\bar{x}^k = a^i_k(x,u)\, dx^k$$

ou encore

$$a^i_m(\bar{x},\bar{u}) \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^k} = a^i_k(x,u)$$

On sait que ces équations en $u^1 \ldots\ldots u^p$ sont compatibles toutes les fois que les $\bar{x}$ se déduisent des x par une transformation de G . Cela veut dire que l'élimination des $\bar{u}$ entre les n^2 équations précédentes donne les équations de définition du groupe G (les u ne figurent plus dans le résultat de l'élimination) . Si maintenant on suppose que les $\bar{x}$ se déduisent des x par une transformation de g , c'est qu'il y aura lieu d'ajouter de nouvelles relations entre les x , les $\bar{x}$ et les $\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^k}$, par suite il y aura des relations finies entre les x , les $\bar{x}$, les u et les $\bar{u}$. Autrement dit, si on considère le prolongement normal G^1 de G (opérant sur les variables x et u) et le prolongement g^1 de g correspondant , le groupe g^1 admettra de nouveaux invariants fonctions des x et des u , qui s'ajouteront aux invariants éventuels déjà obtenus, fonctions des seules variables x. La propriété d'une transformation de G d'admettre ces invariants est équivalente à la propriété de cette transformation de satisfaire aux équations finies et aux équations aux dérivées partielles du premier ordre qu'on a ajoutées aux équations de définition de G pour obtenir tout ou partie des équations de définition de g.

Si les équations ajoutées ont fourni toutes les équations de définition de g, ce qui suppose que ces équations de définition sont limitées au premier ordre et forment un système en involution, le groupe g est défini par la propriété d'admettre comme invariants un certain nombre de fonctions des variables de G^1. S'il n'en est pas ainsi, on poursuivra le procédé en considérant les variables v qu'introduit le prolongement normal G^2 de G^1 ; l'addition de nouvelles équations de définition (qui seront du second ordre par rapport aux variables primitives de g) fournira de nouveaux invariants de g, fonctions des x, u, v, et ainsi de suite. Nous arrivons donc au théorème suivant :

Théorème fondamental .- Etant donné un sous-groupe g d'un groupe normal G, il existe un prolongement normal $G^{(h)}$ de G, tel que le sous-groupe correspondant $g^{(h)}$ prolongé de g soit défini par l'ensemble des transformations de $G^{(h)}$ qui laissent invariantes un certain nombre de fonctions des variables transformées par $G^{(h)}$. Ces fonctions sont les invariants caractéristiques du sous-groupe g.

Ce théorème est la généralisation d'un théorème bien connu sur les groupes de substitution. La démonstration même conduit à distinguer des invariants caractéristiques de différents ordres , ces ordres formant une suite ininterrompue d'entiers commençant par un entier $p \geqq 0$ (p étant l'ordre minimum des équations de définition qu'il a fallu ajouter à celles de G pour obtenir celles de g) et se terminant à h. Ces ordres sont relatifs au groupe G initial . Par rapport au groupe $G^{(h)}$, tous ces invariants sont d'ordre zéro.

Plusieurs problèmes se présentent maintenant à l'esprit .

Le premier est le suivant : Peut-on se donner arbitrairement les invariants caractéristiques d'un sous-groupe? Nous indiquerons tout à l'heure la méthode à suivre, mais remarquons dès maintenant que si l'on se donne certaines fonctions comme invariants caractéristiques d'un sous-groupe, il est nécessaire que les transformations de G qui laissent invariantes ces fonctions ne puissent laisser tout à la fois invariante une autre fonction indépendante des premières . Cela limite le choix des invariants caractéristiques .

Un autre problème important est la détermination des différents <u>types</u> de sous-groupes d'un groupe donné et celle d'un représentant de chaque type . Deux sous-groupes appartiennent au même type s'ils sont homologues dans le groupe total, c'est-à-dire s'ils peuvent être transformés l'un dans l'autre par une transformation du groupe total . On peut toujours supposer qu'il existe un prolongement normal $G^{(h)}$ du groupe G tel que les invariants caractéristiques des deux sous-groupes soient des fonctions des variables transformées par $G^{(h)}$. Les deux sous-groupes sont alors homologues, s'ils ont le même nombre d'invariants caractéristiques indépendants et s'il existe une transformation de $G^{(h)}$ transformant tout invariant caractéristique du premier sous-groupe dans un invariant caractéristique du second . Si l'on revient au groupe initial G, on voit que les invariants caractéristiques indépendants d'ordre zéro des deux sous-groupes doivent être de même nombre et transformables les uns dans les autres par une transformation de G ; les invariants caractéristiques d'ordre zéro et un devront être de même nombre et transformables les uns dans les autres par une transformation de $G^{(1)}$, et ainsi de suite . D'autre part l'ensemble des transformations de G qui laissent invariants les différents invariants caractéristiques d'ordre zéro d'un sous-groupe g de G forme un sous-groupe g^* , dont g est lui-même un sous-groupe . Soit γ^* l'ensemble des transformations de G qui transforment entre eux les invariants caractéristiques de g^* , c'ést-à-dire qui laissent invariant le sous-groupe g^* ; pour que deux sous-groupes de g^* soient homologues dans G, il faut et il suffit qu'ils soient homologues dans γ^*.

Supposons alors qu'on sache déterminer les différents types de sous-groupes de G dont tous les invariants caractéristiques sont d'ordre zéro ainsi qu'un représentant de chaque type, et supposons enfin qu'on sache déterminer pour chacun de ces représentants g^* le plus grand sous-groupe γ^* de G qui le laisse invariant. La résolution des problèmes analogues pour les sous-groupes dont tous les invariants caractéristiques sont d'ordre 1 (et zéro) se fera par les mêmes méthodes, en partant de chacun des représentants g^* obtenus et en remplaçant pour chacun d'eux le groupe total G par γ^* (ou plutôt par le groupe qui se déduit de γ^* par le premier prolongement normal de G). On aura ainsi une méthode régulière pour trouver successivement tous les types de sous-groupes d'un groupe donné et, pour chacun de ces types, un représentant.

En définitive, nous sommes ramenés aux problèmes suivants :

1°) <u>Etant donné un groupe normal G, déterminer les différents systèmes d'invariants caractéristiques d'ordre zéro d'un sous-groupe</u>.

2°) <u>Reconnaître si deux systèmes d'invariants caractéristiques d'ordre zéro sont homologues</u>.

3°) *Pour chaque type de systèmes d'invariants caractéristiques d'ordre zéro, trouver un sous-groupe correspondant* .

4°) *Ce représentant du type considéré étant connu, trouver le plus grand sous-groupe de G qui le laisse invariant* .

Tous ces problèmes peuvent être résolus en partant uniquement des équations de structure du groupe G ; les invariants caractéristiques seront donnés comme les intégrales premières d'un système de Pfaff complètement intégrable ; les équations de structure de chaque sous-groupe g et son plus grand sous-groupe γ qui le laisse invariant seront obtenues par des procédés purement algébriques .

Voici quelques indications générales sur la méthode . Supposons qu'un sous groupe g admette s invariants caractéristiques d'ordre zéro indépendants (*en dehors des invariants du groupe G lui-même*). Ils pourront être regardés comme des intégrales premières d'un système de Pfaff qu'on pourra réduire à la forme

$$(1)\quad \theta^i \equiv \omega^i + \alpha^i_k\ \omega^{s+k} = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,s;\ k=1,2,\ldots,n-s)$$

Toute transformation de G, et par suite de g, laissant invariantes les formes ω, et les transformations de g laissant évidemment invariant le système (1) , il en résulte que les coefficients α^i_k sont des invariants de g , c'est-à-dire des intégrales premières de (1) . D'autre part, les α_k^i sont des combinaisons linéaires des différentielles dI^1, dI^2, ... dI^s des invariants caractéristiques, mais comme g laisse invariante chaque forme θ^i les coefficients des dI^k sont eux-mêmes invariants et par suite les différentielles $d\theta^i$ peuvent s'exprimer au moyen des seules formes θ^k, les coefficients étant encore des invariants . Si $s=1$, $d\theta^1 = 0$. Le calcul de $d\theta^i$ conduit comme nous l'avons déjà vu auparavant, à des formes extérieures du second degré qui peuvent s'exprimer comme combinaisons linéaires des produits

$$\theta^k \theta^h \;, \quad \theta^k \omega^{s+h} \;, \quad \omega^{s+k} \omega^{s+h} \;, \quad d\alpha_k^i \, \omega^{s+k} \;,$$

$$\theta^k \varpi^\rho, \quad \omega^{s+k} \varpi^\rho \quad .$$

Comme les $d\alpha_k^i$ sont des combinaisons linéaires des θ^h, avec coefficients fonctions des invariants, nous poserons

$$d\alpha_k^i = \alpha_{k,h}^i \theta^h$$

Il faudra alors exprimer la possibilité de choisir pour les ϖ^α des combinaisons linéaires des θ^k et des ω^{s+h} de manière que $d\theta^i$ prenne la forme $\frac{1}{2}\gamma_{kh}^i \theta^k \theta^h$. Il en résultera en général des relations finies entre les coefficients α_k^i; ces relations seront algébriques entières et définiront dans l'espace à $(n-s)^2$ dimensions des α_k^i une ou plusieurs variétés indécomposables . Pour chacune variété V, on pourra exprimer les coordonnées α^i_k d'un point en fonction de paramètres β^k, qui seront encore des invariants, et on aura des relations linéaires entre leurs dérivées covariantes $\beta^k{}_{.h}$ (coefficient de θ^h dans $d\beta^k$) et les β^k. Ces relations devront naturellement être compatibles . Si l'élimination des $\beta^k{}_{.h}$ donnait de nouvelles relations entre les β^k, on serait ramené encore à une variété algébrique contenue dans V et qui pourrait encore être décomposable .

Supposons que cette dernière particularité ne se présente pas . Les différents sous-groupes correspondant à une même variété V sont-ils homologues entre eux ? Soient $I^1(x)$;..., $I^s(x)$ les invariants de l'un d'eux ; $J^1(x)$,...., $J^s(x)$, ceux d'un autre ; les équations

$$J^i(\overline{x}) = I^i(x), \qquad \omega^{s+h}(\overline{x},\overline{u},d\overline{x}) = \omega^{s+h}(x,u,dx)$$
$$(i=1,2,\ldots,s\ ;\ h=1,2,\ldots,n-s)$$

entrainant

$$\omega^i(\overline{x},\overline{u},d\overline{x}) = \omega^i(x,u,dx) \qquad (i=1,2,\ldots,s)$$

Si le système ainsi obtenu est compatible, il existera évidemment une transformation de G transformant le premier groupe dans le second. Quant aux transformations de G qui laissent invariant un sous-groupe donné, c'est-à-dire qui transforment entre eux les invariants caractéristiques de ce sous-groupe . ce seront celles qui laisseront invariants les coefficients α^i_k . c'est-à-dire les invariants β^k . Si ces invariants sont au nombre de s indépendants, ce qu'on pourra reconnaitre d'après les renseignements qu'on a sur les β^k.h le sous groupe g ne sera invariant que dans lui-même; sinon il sera invariant dans un sous-groupe plus grand .

Pour sortir de ces généralités nécessairement un peu vagues, prenons quelques exemples .

Exemple I

Prenons le groupe de translations du plan

$$\bar{x} = x + a \quad , \quad \bar{y} = y + b$$

avec

$$\omega^1 = dx \ , \ \omega^2 = dy \quad ; \quad d\,\omega^1 = 0 \quad , \quad d\omega^2 = 0$$

Le seul cas à considérer est celui d'un sous-groupe à un paramètre ; prenons donc

$$\theta^1 \equiv \omega^2 + \alpha\,\omega^1 \quad ;$$

nous avons

$$d\,\theta^1 = d\,\alpha\ \omega^1 \quad ;$$

il faut donc $d\,\alpha = 0$. Le coefficient α est une constante m , du reste quelconque; l'invariant du sous-groupe est $y + m\,x$, et les équations du sous-groupe sont

$$\bar{x} = x + a \quad , \quad \bar{y} = y - m\,a$$

Deux sous-groupes correspondant à deux valeurs différentes di m ne sont pas homologues, car une transformation de G ne peut transformer l'équation $\omega^2 + m\,\omega^1 = 0$ en l'équation $\omega^2 + m'\,\omega^1 = 0$ si $m' \neq m$. D'autre part, chaque sous-groupe est invariant dans le groupe total, car toute transformation du groupe laissent invariante l'équation $\omega^2 + m\,\omega^1 = 0$, où m est une constante donnée.

Exemple II.

Soit le groupe

$$\bar{x} = a x \quad , \qquad \bar{y} = ay + b$$

avec

$$\omega^1 = \frac{dx}{x} \quad , \omega^2 = \frac{dy}{x} \quad ; \qquad d\,\omega^1 = 0 \ , \quad d\omega^2 = \omega^2\,\omega^1$$

Il faut encore ici supposer $s = 1$.

Prenons d'abord

$$\theta^1 \equiv \omega^1 = 0 \text{ avec } d\theta^1 = 0$$

On a un sous-groupe caractérisé par l'invariant x. C'est un sous-groupe invariant car toute transformation de G laisse invariante l'équation $\omega^1 = 0$. Ses équations finies sont (x étant l'invariant)

$$\bar{x} = x_1 \ , \qquad \bar{y} = y + b$$

Prenons ensuite

$$\theta^1 \equiv \omega^2 + \alpha\,\omega^1 \quad ;$$

on a

$$d\,\theta^1 = (\,\theta^1 + d\,\alpha\,)\,\omega^1 \quad ;$$

il faut donc prendre $d\,\alpha + \theta^1 = 0$. Autrement dit, α est l'invariant du sous-groupe, et il est défini comme solution de l'équation complètement intégrable

$$d\,\alpha + \omega^2 + \alpha\,\omega^1 = 0$$

Il y a une infinité de solutions . D'où une infinité de sous-groupes . Ils sont homologues entre eux, car si α et β sont deux solutions le système

$$\beta\,(\bar{x},\bar{y}) = \alpha\,(x,y) \quad , \quad \omega^1(\bar{x},\bar{y},d\bar{x},d\bar{y}) = \omega^1(x,y,dx,dy)$$

entraine

$$\omega^2(\bar{x},\bar{y},d\bar{x},d\bar{y}) = \omega^2(x,y,dx,dy)$$

et ce système, différencié extérieurement, se révèle comme complètement intégrable à cause des équations de structure du groupe . La valeur générale de α est $\frac{C-y}{x}$, l'équation $\frac{C'-\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{C-y}{x}$, où l'on remplace $\bar{x}$ par ax et $\bar{y}$ par $ay+b$ donne effectivement $C' = aC + b$, ce qui fournit bien une infinité de transformations de G permettant de passer de C à C' .

Enfin, l'un des sous-groupes obtenus n'est invariant que dans lui-même, car toute transformation du groupe laissant invariante l'équation $\theta = 0$ laisse par cela même invariante la fonction α. Elle appartient donc au sous-groupe.

Les équations du sous-groupe sont, en remplaçant b par $(1-a)C$,

$$\bar{x} = ax \qquad \bar{y} - C = a\,(y - C)$$

Pour $C = 0$ on a un représentant du type considéré.

$$\bar{x} = ax \quad , \quad \bar{y} = ay$$

Exemple III.

Soit le groupe

$$\bar{x} = \frac{ax + b}{cx + d}$$

qui prolongé (voir exposé E) conduit aux formes

$$\omega^1 = u\,dx\,, \quad \omega^2 = \frac{du}{u} - \frac{v}{u}\,dx\,,$$

$$\omega^3 = -\frac{1}{u^2}\,dv + \frac{v}{u^3}\,du + \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{u^3}\,dx$$

avec les équations de structure

$$d\,\omega^1 = \omega^2\,\omega^1, \quad d\,\omega^2 = \omega^3\,\omega^1, \quad d\,\omega^3 = \omega^3\,\omega^2$$

Cherchons d'abord les sous-groupes à deux paramètres

Posons

$$\theta^1 \equiv \omega^3 + \alpha\,\omega^2 + \beta\,\omega^1 \quad :$$

on a

$$d\,\theta^1 \equiv (\alpha^2 - 2\beta)\,\omega^1\,\omega^2 + (\theta^1 + d\alpha)\,\omega^2 + (\alpha\,\theta^1 + d\beta)\,\omega^1\,.$$

Le second membre devant être identiquement nul, on a

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha^2 \qquad d\alpha + \theta^1 = 0$$

de sorte que l'invariant caractéristique α est solution de l'équation complètement intégrable

$$d\alpha + \omega^3 + \alpha\,\omega^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\,\omega^1 = 0$$

Là encore tous les sous-groupes correspondantssont homologues: il suffit de considérer le système

$$\alpha^1(\bar{x},\bar{u},\bar{v}) = \alpha(x,u,v)$$

$$\omega^1(\bar{x},\bar{u},\bar{v},d\bar{x},d\bar{u},d\bar{v}) = \omega^1(x,u,v,dx,du,dv)$$

$$\omega^2(\bar{x},\dots.) = \omega^2(x,\dots.)$$

qui est complètement intégrable et dont la solution générale dépend de deux constantes arbitraires. Quant à l'un de ces sous-groupes il n'est invariant que dans lui-même, car toute transformation de G qui laisse g invariant laisse invariante l'équation de Pfaff qui définit α, et par suite aussi les coefficients α, $\frac{1}{2}\alpha^2$ de cette équation.

Les équations de structure du sous-groupe sont :

$$d\omega^1 = \omega^2\,\omega^1 \,, \qquad d\omega^2 = (d\alpha - \alpha\,\omega^2)\,\omega^1 \,;$$

l'invariant α n'étant pas essentiel, ce groupe est semblable au groupe obtenu en faisant, dans les équations précédentes

$\alpha = 0$; $d\alpha = 0$, c'est-à-dire

$$d\omega^1 = \omega^2 \omega^1 \ , \quad d\omega^2 = 0$$

L'équation qui donne α s'intègre facilement et on trouve

$$\alpha = \frac{v}{u^2} + \frac{2}{u(x-C)}$$

Si l'on prend , par exemple, $\alpha = \frac{v}{u^2}$, les équations

$$\bar{x} = \frac{ax+b}{cx+d} \ , \quad \bar{u} = u(cx+d)^2 \ , \quad \bar{v} = v(cx+d)^2 + 2c(cx+d)$$

conduisent aux équations suivantes du sous-groupe $c=0$, $d=1$

$$\bar{x} = ax + b$$

Cherchons maintenant les sous-groupes à un paramètre

Posons

$$\theta^1 \equiv \omega^2 + \alpha\,\omega^1$$

$$\theta^2 \equiv \omega^3 + \beta\,\omega^1$$

on a

$$d\theta^1 = (\theta^2 + \alpha\,\theta^1 + d\alpha)\,\omega^1$$

$$d\theta^2 = \theta^2\theta^1 + (2\beta\,\theta^1 - \alpha\,\theta^2 + d\alpha)\,\omega^1$$

il faut donc prendre

$$d\alpha + \alpha\,\theta^1 + \theta^2 = 0 \qquad d\beta + 2\beta\,\theta^1 - \alpha\,\theta^2 = 0$$

système complètement intégrable .

Il y a ici à distinguer suivant que les invariants α et β sont indépendants ou non ; cela dépend de la quantité $\alpha^2 + 2\beta$:

1°) Si $\alpha^2 + 2\beta = 0$, $\beta = -\frac{1}{2}\alpha^2$. on a la seule relation

$$d\alpha + \alpha\,\theta^1 + \theta^2 \equiv d\alpha + \omega^3 + \alpha\,\omega^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\,\omega^1 = 0$$

qui, jointe à $\theta^1 = 0$, fournit un système complètement intégrable . Tous les sous-groupes ainsi obtenus sont homologues entre eux . Mais les transformations de G qui laissent un de ces sous-groupes invariants laissent invariant l'invariant du sous-groupe , mais pas nécessairement l'autre : ils laissent simplement invariante l'équation $\theta^1 = 0$ qui fournit cet autre invariant : le sous-groupe g est donc invariant dans un sous-groupe à deux paramètres de G . On peut prendre pour α la fonction $\frac{v}{u^2}$ déjà déterminée ; l'autre invariant est donné par $\frac{du}{u} = 0$. L'équation de g est alors

$$\bar{x} = x + a$$

2°) Si $\alpha^2 + 2\beta \neq 0$, il y a lieu de distinguer dans le plan des deux variables α et β , les deux régions limitées par la parabole $\alpha^2 + 2\beta = 0$. Les sous-groupes correspondant à chacune de ces deux régions sont homologues entre eux . Les deux types de groupes homographiques obtenus correspondent, l'un, aux sous-groupes formés des homographies ayant deux points doubles donnés réels, l'autre, aux sous-groupes formés des homographies ayant deux points doubles imaginaires conjugués . Chacun de ces sous-groupes n'est invariant que dans lui-même, tandis que les sous-groupes du cas 1°) formés des homographies paraboliques de point double donné sont invariants dans le groupe de toutes les homographies qui laissent fixe ce point double .

<u>Exemple IV</u>.

Prenons pour G le groupe infini d'une variable . Rappelons les équations de structure

$$d\,\omega^1 = \omega^1\,\omega^2$$

$$d\,\omega^2 = \omega^1\,\omega^3$$

$$d\,\omega^3 = \omega^1\,\omega^4 + \omega^2\,\omega^3$$

$$d\,\omega^4 = \omega^1\,\omega^5 + 2\,\omega^2\,\omega^4$$

$$d\,\omega^5 = \omega^1\,\omega^6 + 3\,\omega^2\,\omega^5 + 2\,\omega^3\,\omega^4$$

....

avec

$$\omega^1 = u\,dx$$

$$\omega^2 = -\frac{du}{u} + v\,dx$$

$$\omega^3 = -\frac{dv}{u} + w\,dx$$

$$\omega^4 = -\frac{dw}{u} + \frac{v\,dv}{u^2} - \frac{w}{u^2}\,du + s\,dx$$

....

Si nous prenons pour G le groupe qui transforme la seule variable x , un sous-groupe ne peut admettre un invariant caractéristique d'ordre zéro que s'il laisse x fini. Il se réduit alors à la transformation identique .

Soit α l'ordre minimum des invariants caractéristiques de g ; il y en a évidemment un seul de cet ordre et il est fourni par une équation de la forme

$$\theta \equiv \omega^{\alpha+1} + p_\alpha\,\omega^\alpha + p_{\alpha-1}\,\omega^{\alpha-1} + \ldots + p_2\,\omega^2 + p_1\,\omega^1 = 0$$

mais on peut ici supposer $p_1 = 0$ en tenant compte du groupe linéaire de stabilité $G^{(\alpha)}$ qui est $\delta\,\omega^{\alpha+1} = c\,\omega^1$. On vérifie immédiatement que α ne peut pas dépasser 3 ; si, par exemple $\alpha = 4$, on aurait dans $d\theta$ le terme $3\,\omega^2\,\omega^5$ qu'il serait impossible de réduire avec un autre .

Trois cas sont donc possibles :

1°) $\alpha = 1$. On peut donc supposer

$$\theta \equiv \omega^2$$

avec

$$d\,\vartheta = \omega^1\,\omega^3 = \omega^1\,\varpi$$

(ω^3 joue le rôle de forme ϖ pour le groupe $G^{(1)}$)

il faudra donc que ϖ soit ici de la forme $A\,\omega^1$. Tous les sous-groupes ainsi obtenus sont homologues entre eux, car si on considère deux d'entre eux, on pourra trouver une transformation de G transformant l'invariant du premier en une fonction de l'invariant du second ; il suffira d'intégrer

$$\omega^1(\bar{x},\bar{u},d\bar{x}) = \omega^1(x,u,dx)$$

$$\omega^2(\bar{x},\bar{u},d\bar{x},d\bar{u}) = \omega^2(x,u,dx,du)$$

et les équations différentiées extérieurement montrent qu'elles constituent un système complètement intégrable (à cause de la relation $\omega^1\,\omega^3 = 0$ vraie pour les deux sous-groupes) . Chacun de ces sous-groupes est invariant dans le groupe défini par

$$d\,\omega^1 = \omega^1\omega^2$$

$$d\,\omega^2 = 0$$

L'équation $\omega^2 = 0$ est de la forme $\frac{du}{u} - v\,dx = 0$;

son intégrale première est de la forme $\frac{u}{H(x)} = I$.

on a immédiatement les équations de définition du sous-groupe caractérisé par l'invariance de la forme

$$\omega^1 = u\, dx = I\, H(x)\, dx$$

et comme I est un invariant, le sous-groupe est défini par

$$H(\overline{x})\, d\overline{x} = H(x)\, dx$$

On a un groupe homologue en prenant $H(x) = 1$. d'où $\overline{x} = x + a$.

Le plus grand groupe qui laisse le sous-groupe invariant est caractérisé par l'invariance des deux formes

$$u\, dx \qquad \text{et} \qquad \frac{du}{u} - \frac{H'(x)}{H(x)}\, dx \quad ;$$

si l'on pose $\overline{x} = X(x)$, on a les équations de définition

$$\frac{X''}{X'} + \frac{H'(X)}{H(X)} X' = \frac{H'(x)}{H(x)}$$

c'est-à-dire

$$X'' = 0 \qquad \text{si} \qquad H(x) = 1 \quad .$$

2°) $\alpha = 2$. Nous pouvons poser

$$\theta = \omega^3 + \alpha\, \omega^2$$

avec

$$d\,\theta = \omega^2\, \theta + \omega^1 \omega^4 + \alpha\, \omega^1\, \omega^2 + d\alpha\; \omega^2 \; ;$$

en posant

$$\omega^4 = \varpi = A\, \omega^1 + B\, \omega^2 + C\, \theta \quad .$$

on trouve

$$d\,\theta = (B+\alpha)\,\omega^1\,\omega^2 + C\,\omega^1\,\theta + \omega^2(\theta - d\alpha)$$

d'où

$$B = -\alpha \quad , \quad C = 0 \quad . \quad d\,\alpha = \theta$$

$$\omega^1\,\omega^4 = -\alpha\,\omega^1\,\omega^2$$

L'équation

$$d\,\alpha = \omega^3 + \alpha\,\omega^2$$

étant ainsi complètement intégrable, on constate facilement que tous les sous-groupes obtenus sont homologues et que chacun n'est invariant que dans lui-même .

Les équations de structure d'un de ces sous-groupes sont

$$d\,\omega^1 = \omega^1\,\omega^2$$

$$d\,\omega^2 = \omega^1(d\alpha - \alpha\,\omega^2) \quad ;$$

l'invariant α n'étant pas essentiel, on peut supposer $\alpha = 0$ ce qui donne

$$d\,\omega^1 = \omega^1\,\omega^2 \quad . \qquad d\,\omega^2 = 0$$

Le calcul de α est facile; l'équation à intégrer est

$$d\alpha + \frac{dv}{u} + \alpha\,\frac{du}{u} - (w + \alpha\,v)\,dx = 0$$

elle donne

$$\alpha = \frac{H(x) - v}{u} \quad \text{d'où} \quad v = H(x) - \alpha\,u$$

Les équations de définition de g s'obtiennent en exprimant l'invariance des deux formes

$$\omega^1 = u\, dx\ ,$$

$$\omega^2 = -\frac{du}{u} + v\, dx = -\frac{du}{u} + H(x)\, dx - \alpha\, u\, dx$$

comme α est un invariant, la seconde forme peut être remplacée par

$$(\omega^2)^* = -\frac{du}{u} + H(x)\, dx$$

On aura

$$\overline{x} = X \qquad . \qquad \overline{u} = \frac{u}{X'}$$

puis l'équation de définition du sous-groupe :

$$\frac{X''}{X'} + H(X).X' = H(x)$$

Si l'on prend $H(x) = 0$, on obtient $X'' = 0$ ou $\overline{x} = ax + b$.

3°) $\alpha = 3$. Nous pouvons poser

$$\theta \equiv \omega^4 + \alpha\, \omega^3 + \beta\, \omega^2$$

d'où

$$d\,\theta = \omega^1\omega^5 + 2\,\omega^2(\theta - \alpha\,\omega^3) + \alpha\,\omega^1(\theta - \alpha\,\omega^3 - \beta\,\omega^2)$$
$$+ \alpha\,\omega^2\,\omega^3 + \beta\,\omega^1\omega^3 + d\alpha\,\omega^3 + d\beta\,\omega^2$$

la considération de l'ensemble des termes qui ne contiennent pas ω^1 montre que $\alpha = 0$. et il reste

$$d\,\theta = \omega^1\omega^5 + \beta\,\omega^1\omega^3 + \omega^2(2\,d\,\theta - d\,\beta) = 0$$

d'où

$$d\,\beta = 2\,\theta \qquad . \qquad \omega^1\omega^5 = -\beta\,\omega^1\omega^3$$

L'invariant β est donc donné par l'équation

$$d\,\beta = 2\,\omega^4 + 2\,\beta\,\omega^2 \quad .$$

Tous les groupes obtenus sont homologues et chacun d'eux n'est invariant que dans lui-même . Les équations de structure de l'un d'eux sont

$$d\,\omega^1 = \omega^1\,\omega^2$$

$$d\,\omega^2 = \omega^1\,\omega^3$$

$$d\,\omega^3 = \omega^2\omega^3 + \omega^1\left(\frac{1}{2}\;d\,\beta - \beta\omega^2\right) \quad ;$$

mais l'invariant β n'étant pas essentiel, on peut faire dans les équations précédentes $\beta = 0$ et on retrouve les équations de structure du groupe homographique .

Le calcul de β est facile ; on doit intégrer l'équation

$$d\,\beta + 2\,\frac{dw}{u} - 2\,v\,\frac{dv}{u^2} + 2\left(\frac{\beta}{u} + \frac{w}{u^2}\right)du - 2(s + \beta\,v)\,dx = 0$$

ce qui donne, pour l'invariant caractéristique cherché

$$\beta = - \frac{2w}{u} + \frac{v^2}{u^2} + \frac{H(x)}{u^2}$$

En exprimant l'invariance de cette fonction, on trouve les équations de définition du sous-groupe

$$2 \frac{X'''}{X'} - 3 \frac{X''^2}{X'^2} + H(X).X'^2 = H(x)$$

<u>Remarque</u>

Nous venons de résoudre le problème suivant : <u>Trouver tous les groupes de Lie à une variable</u> ; en dehors du groupe infini général, il n'y a que des groupes finis à 1, 2 ou 3 paramètres . C'est un résultat classique .

Dans chaque type de groupes finis à une variable, les transformations qui indiquent comme G transforme l'invariant caractéristique des différents sous-groupes du type considéré forment un groupe fonctionnel, les éléments transformés étant des fonctions: en fait, dans chaque cas, l'invariant est caractérisé par une fonction $H(x)$, et les formules qui donnent la fonction transformée $\overline{H} = H(X)$, jointes à $\overline{x} = X$, fournissent précisément les différents groupes à deux variables (x et H) isomorphes au groupe G, comme on peut s'en rendre compte facilement .

BIBLIOGRAPHIE

Pour la première partie de cet Exposé, on consultera le Mémoire de M.E.Cartan des Annales de l'Ecole Normale (1905) et pour la seconde partie, le Mémoire sur les sous-groupes des groupes infinis (Annales de l'Ecole Normale 1908) . On trouvera dans ce dernier mémoire la détermination effective de tous les groupes de Lie à deux variables , considérés comme sous-groupes du groupe général à deux variables .

Un dernier mémoire sur les groupes infinis (Annales Ecole Normale 1910) est consacré à la détermination des groupes simples . Les groupes infinis proprement simples se distinguent en groupes simples transitifs et groupes simples intransitifs .

Il y a quatre grandes classes de groupes simples transitifs , classes déjà signalées par S.Lie ;

1°) le groupe général à n variables ;

2°) le groupe des transformations de jacobiens égal à 1 ;

3°) le groupe des transformations de contact de l'espace à n dimensions ;

4°) le groupe qui laisse invariant la forme différentielle extérieure $dx^1 dx^2 + \ldots + dx^{2n-1} dx^{2n}$;

Les groupes simples intransitifs correspondent aux groupes simples transitifs (infinis ou finis) . Ce sont :

1°) le groupe $\quad \bar{x}^i = f^i(x^1 \dots x^n \; y^1 \dots y^p)$

$\bar{y}^k = y^k$ $\quad$ (f^i fonctions arbitraires)

2°) le groupe précédent avec $\quad \dfrac{D(\bar{x}^1 \dots \bar{x}^n)}{D(x^1 \dots x^n)} = 1$

3°) le groupe laissant invariante l'équation

$$dz - p_1 dx^1 - \dots - p_n dx^n = 0 \quad (\text{mod. } dy^1 \dots dy^p)$$

où les y^k sont des invariants .

4°) le groupe laissant invariante la forme

$$dx^1 dx^2 + \dots + dx^{2n-1} dx^{2n} \quad (\text{mod. } dy^1 \dots dy^p)$$

où les y^k sont des invariants .

5°) un groupe simple fini quelconque , où les paramètres sont regardés comme des fonctions arbitraires de p variables transformées indépendantes .