Séminaire Lelong.
Analyse

PIERRE DOLBEAULT

Résolution d'un faisceau de formes différentielles méromorphes fermées

Séminaire Lelong. Analyse, tome 7 (1966-1967), exp. nº 8, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1966-1967__7__A8_0>

RÉSOLUTION D'UN FAISCEAU DE FORMES DIFFÉRENTIELLES MÉROMORPHES FERMÉES

par Pierre DOLBEAULT

Les résultats de cet exposé ont été obtenus en collaboration avec Guy ROBIN ; un résumé partiel en a été publié [3].

Introduction.

Soit X une variété analytique complexe, supposée paracompacte dans toutes les questions globales. On désigne par $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X. Soient ρ un élément irréductible de $\mathcal{O}_x$ $(x \in X)$; $[\rho]$ le germe d'ensemble analytique complexe de codimension 1 formé des zéros de ρ ; toute combinaison linéaire à coefficients entiers $\delta = \sum_k r_k[\rho_k]$ de tels germes est appelé un <u>germe de diviseur</u>. L'ensemble des germes de diviseurs sur X constitue un faisceau de groupes abéliens, appelé le <u>faisceau des diviseurs</u> de X, et noté D. En tout point $x \in X$, soit M_x le corps des fractions de $\mathcal{O}_x$, la réunion M des M_x <u>est</u> le <u>faisceau des fonctions méromorphes sur</u> X ; c'est un faisceau de $\mathcal{O}$-modules. Soit N le faisceau des groupes multiplicatifs de M, et soit $\mathcal{O}^*$ le faisceau des groupes multiplicatifs des germes de fonctions holomorphes sans zéro. On voit facilement qu'il existe un isomorphisme canonique $D \to N/\mathcal{O}^*$ qui applique δ sur la classe module $\mathcal{O}_x$ de $\prod_k \rho_k^{r_k}$. On appelle <u>diviseur à coefficients entiers</u>, toute combinaison linéaire localement finie, à coefficients entiers, d'ensembles analytiques de X de codimension 1. Les diviseurs constituent un groupe abélien canoniquement isomorphe à $H^0(X, D)$. Il est classique d'associer, comme suit, une classe de cohomologie de X à un diviseur : on considère les suites exactes :

$$(1) \qquad \begin{cases} 0 \to \mathcal{O}^* \to N \to D \to 0 \,, \\ 0 \to \underset{\sim}{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \to 0 \,, \end{cases}$$

où $\underset{\sim}{Z}$ est le faisceau constant des entiers, et e l'application $\varphi \mapsto \exp 2\pi i\varphi$. La classe de cohomologie $c(W)$ de $W \in H^0(X, D)$ est l'image de W par l'homomorphisme

$$H^0(X, D) \to H^1(X, \mathcal{O}^*) \to H^2(X, \underset{\sim}{Z})$$

déduit des suites (1).

Les résultats suivants sont classiques :

Si X est une variété de Stein, tout élément de $H^2(X, \underset{\sim}{Z})$ est la classe de cohomologie d'un diviseur (J.-P. SERRE [7]).

Si X est une variété algébrique projective complexe sans singularité, tout élément du sous-groupe $H^{1,1}(X, \underset{\sim}{Z})$ de $H^2(X, \underset{\sim}{Z})$ formé des classes qui, par le théorème de de Rham, sont représentables par des formes de type $(1, 1)$, est la classe de cohomologie d'un diviseur (théorème de Lefschetz-Hodge [4]).

Plus généralement, se pose le problème suivant : Quelle est l'image, pour $q \geq 0$, de l'homomorphisme

$$H^q(X, D) \longrightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^{q+2}(X, \underset{\sim}{Z})$$

déduit des suites exactes (1), au moins pour certaines variétés X ?

Un problème plus faible consiste à chercher l'image de $H^q(X, D_c)$ (où

$$D_c = D \otimes_{\underset{\sim}{Z}} C$$

est le faisceau des diviseurs à coefficients complexes) dans

$$H^{q+2}(X, \underset{\sim}{Z}) \otimes_{\underset{\sim}{Z}} \underset{\sim}{C} = H^{q+2}(X, \underset{\sim}{C}) .$$

Dans le but d'approcher d'une solution de ce problème pour un certain sous-faisceau D'_c de D_c, et afin de remplacer $H^q(X, D'_c)$ par un groupe de cohomologie de sections de faisceaux, on va construire une résolution fine de D'_c.

1. Formes méromorphes et diviseurs.

Soit Ω^p le faisceau des p-formes différentielles holomorphes, c'est-à-dire : de type $(p, 0)$, à coefficients holomorphes ; on appelle <u>faisceau des p-formes méromorphes</u>, le faisceau

$$\mathfrak{M}^p = M \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^p ,$$

autrement dit, pour tout $x \in X$, tout élément $\alpha \in \mathfrak{M}^p_x$ s'écrit $f^{-1}\omega$, où $\omega \in \Omega^p_x$ et $f \in \mathcal{O}_x$, $f \neq 0$.

La différentielle extérieure du germe de p-forme méromorphe $f^{-1}\omega$ est

$$d(f^{-1}\omega) = f^{-1} d\omega - f^{-2} df \wedge \omega ;$$

$f^{-1}\omega$ est dite d-fermée, si $d(f^{-1}\omega) = 0$, c'est-à-dire si $f d\omega - df \wedge \omega = 0$.

Il est clair que d est un homomorphisme de faisceaux : $\mathfrak{M}^p \longrightarrow \mathfrak{M}^{p+1}$.

Soit M^p le noyau de $d : \mathfrak{M}^p \longrightarrow \mathfrak{M}^{p+1}$.

Si $\alpha = z^{-1}\,\omega \in M^p_x$, où $\omega \in \Omega^p_x$ et où z est une coordonnée complexe locale nulle en x , alors

$$\alpha = A \wedge z^{-1}\,dz + dB ,$$

où A est un germe de $(p-1)$-forme holomorphe fermée ne dépendant ni de z ni de dz , et où B est un germe de $(p-1)$-forme holomorphe.

Démonstration. - $\omega = a\,dz + b$, où a et b ne dépendent pas de dz ;

(2) $$d(z^{-1}\,\omega) = 0$$

entraîne

$$z(da \wedge dz + db) - dz \wedge b = 0 ;$$

comme b ne contient pas de facteur dz , on a : $b = zb'$, où $b' \in \Omega^{p-1}_x$.

Mais, par la formule de Taylor par rapport à z au voisinage de x , on a, en désignant par (z , u) un système de coordonnées en x :

$$a(z , u) = a(0 , u) + za'(z , u) ,$$

d'où

$$\omega = a(0 , u)\,dz + z(a'(z , u)\,dz - b') .$$

Alors (2) entraîne

$$da(0 , u) \wedge dz + z(da' \wedge dz + db') = 0 .$$

Comme $da(0 , u) \wedge dz$ est indépendant de z , il est nul ; donc $da(0 , u)$ ne contenant pas de terme en dz est nul, d'où

$$\alpha = A \wedge z^{-1}\,dz + B' ,$$

avec B' holomorphe fermé, donc égal à une différentielle exacte ; A est indépendant de z , et $dA = 0$.

1.1. - Plus généralement, si $\alpha = z^{-n}\,\omega$ avec $\omega \in \Omega^p_x$, et $d\alpha = 0$, on a

$$\alpha = A \wedge z^{-1}\,dz + d(z^{-n+1}\,C) ,$$

où A et $C \in \Omega^{p-1}_x$, et où $dA = 0$ ([2], chap. 3).

1.2. - Si $\alpha \in M_x^1$, il existe des germes $\rho_k \in \mathcal{O}_x$, irréductibles, tels que

$$\alpha = \omega \prod_k \rho_k^{-r_k} , \qquad \text{où} \quad \omega \in \Omega_x^1 \quad \text{et} \quad r_k \quad \text{entier} \geqslant 0 .$$

Alors, par un argument de cohomologie de Čech, on met α sous la forme :

$$\alpha = \sum_k A_k \rho_k^{-1} d\rho_k + dB ,$$

où $B \in M_x$, et où les A_k sont des constantes complexes ([2], chap. 3).

1.3. - Soit E^1 le faisceau des 1-formes holomorphes fermées ; $\alpha \in M_x^1$ étant donné à l'addition près d'un élément de E_x^1 , le germe de diviseur à coefficients complexes $\sum_k r_k[\rho_k]$ est bien déterminé, il en résulte l'isomorphisme

$$M^1/E^1 \approx D_c \oplus dM/E^1 .$$

1.4. - Soit $\underset{\sim}{M}^1$ le sous-faisceau de M^1 dont l'image dans M^1/E^1 est isomorphe à D_c ; on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{O}^* & \to & M & \to & D & \to & 0 , \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & E^1 & \to & \underset{\sim}{M}^1 & \to & D_c & \to & 0 , \end{array}$$

dans lequel les deux premières flèches verticales désignent les homomorphismes $\varphi \longmapsto (1/2\pi i)\varphi^{-1}\, d\varphi$, et le troisième l'injection. On a aussi le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \underset{\sim}{Z} & \to & \mathcal{O} & \to & \mathcal{O}^* & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \underset{\sim}{C} & \to & \mathcal{O} & \to & E^1 & \to & 0 , \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales désignent : l'injection canonique, l'identité, et l'homomorphisme défini ci-dessus. Il en résulte le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^q(X , D) & \to & H^{q+1}(X , \mathcal{O}^*) & \to & H^{q+2}(X , \underset{\sim}{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^q(X , D_c) & \to & H^{q+1}(X , E^1) & \to & H^{q+2}(X , \underset{\sim}{C}) . \end{array}$$

L'homomorphisme $H^q(X , D_c) \to H^{q+2}(X , \underset{\sim}{C})$ ci-dessus permet (pour $q = 0$) de prolonger aux diviseurs à coefficients complexes la définition de la classe de cohomologie complexe d'un diviseur (à coefficients entiers).

2. Formes semi-méromorphes régulières.

2.1. - Le faisceau A des formes différentielles C^∞ sur X est un faisceau de $\mathcal{O}$-modules ; le faisceau $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} A$ est appelé le faisceau des formes différentielles semi-méromorphes ; il est somme directe des faisceaux $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} A^{p,q}$, où $A^{p,q}$ est le sous-faisceau des formes de type (p , q) ((d'après la distributivité de $\otimes$ par rapport à $\oplus$) ; A, identifié à $\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} A$, est un sous-faisceau de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} A$. La différentiation extérieure est définie comme pour les formes méromorphes.

Pour tout point $x \in X$, soit $\mathbb{S}_x$ l'ensemble des germes de sous-variétés analytiques complexes (sans singularité) de codimension 1. Soit $m^{p,q}_{x,s}$ le sous-$\mathcal{O}_x$-module de $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} A^{p,q})_x$ formé des germes $\rho^{-r}\varphi^{p,q}$, où $\varphi^{p,q} \in A^{p,q}_x$, où r est un entier $\geqslant 0$, et ρ un germe de coordonnée complexe locale en x tel que $[\rho] = s$. Soit

$$m^{p,q}_x = \sum_{s\in\mathbb{S}_x} m^{p,q}_{x,s}$$

le sous-$\mathcal{O}_x$-module de $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} A^{p,q})_x$ engendré par les $m^{p,q}_{x,s}$. Posons

$$m^{p,q} = \bigcup_{x\in X} m^{p,q}_x \, .$$

Alors, $m^{p,q}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} A^{p,q}$, appelé (suivant L. SCHWARTZ [6]) faisceau des formes différentielles semi-méromorphes régulières de type (p , q).

2.2. - Le sous-faisceau de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^p$, défini de la même façon, est dit faisceau des p-formes méromorphes régulières, et noté m^p ; c'est un sous-faisceau de $m^{p,0}$; on désignera par m^p le sous-faisceau des éléments d-fermés de m^p.

Soit μ^1 le faisceau des 1-formes méromorphes fermées du type suivant : Si $\alpha \in \mu^1$, alors

$$\alpha = \omega \prod_k \rho_k^{-r_k} ,$$

où ρ_k est un germe de fonction coordonnée locale, où ω est holomorphe, et où $d\alpha = 0$; alors on montre qu'il existe un germe C de fonction holomorphe et des constantes complexes A_k tels que

$$\alpha = \sum_k A_k\, \rho_k^{-1} \cdot d\rho_k + d(C \prod_k \rho_k^{-r_k+1}) \qquad \text{avec } r_k \geqslant 1 \, .$$

En particulier, le faisceau μ^1 contient le sous-faisceau $\underset{\sim}{m}^1$ pour les éléments duquel tous les r_k sont égaux à 1 ; on a

$$\underset{\sim}{m}^1 = m^1 \cap \underset{\sim}{M}^1 .$$

Le faisceau $\underset{\sim}{m}^1/E^1$ est isomorphe au faisceau des diviseurs à coefficients complexes D'_c dont les supports des germes sont des réunions de germes de variétés analytiques complexes de codimension 1 .

2.3. - Soit $\alpha \in m^1$, alors

$$\alpha = \sum_k \rho_k^{-r_k} \varphi_k ,$$

les $[\rho_k]$ étant distincts, les entiers r_k strictement positifs, et les germes $\varphi_k \rho_k^{-r_k}$ irréductibles ; la condition $d\alpha = 0$ entraîne : pour tout k , $d(\rho_k^{-r_k} \varphi_k)$ est holomorphe fermé (car deux formes méromorphes ayant des ensembles polaires distincts ne peuvent coïncider) ; donc, il existe des germes holomorphes ψ_k tels que

$$d(\rho_k^{-r_k} \varphi_k) = d\psi_k ,$$

d'où

$$\alpha = \sum_k \rho_k^{-r_k} \varphi'_k ,$$

avec, pour tout k ,

$$d(\rho_k^{-r_k} \varphi'_k) = 0 .$$

Alors, d'après 1.1, on a

$$\rho_k^{-r_k} \varphi'_k = A_k \rho_k^{-1} d\rho_k + d(\rho_k^{-r_k+1} B_k) ,$$

avec B_k holomorphe, d'où

$$m^1/E^1 \approx D'_c \cup dm^0/E^1 .$$

On se propose de former une résolution fine des faisceaux m^1/E^1 , et $\underset{\sim}{m}^1/E^1 \approx D'_c$.

3. Résolutions fines du faisceau des 1-formes méromorphes régulières fermées et du faisceau D'_c .

3.1. - La construction de la résolution repose sur le lemme suivant :

LEMME A. - <u>En tout point</u> $x \in X$, <u>on a</u>

$$m_x^{p,q}/A_x^{p,q} = \bigoplus_{s \in \mathcal{S}_x} (m_{x,s}^{p,q}/A_x^{p,q}) \ .$$

Remarque. - Dans le cas méromorphe, ce lemme est trivial (cf. 2.3).

Notations. - On pose

$$n^{p,q} = \bigoplus_{r=0}^{q} m^{p+r,q-r} \ ; \qquad n_{x,s}^{p,q} = \bigoplus_{r=0}^{q} m_{x,s}^{p+r,q-r} \ ,$$

$$B^{p,q} = \bigoplus_{r=0}^{q} A^{p+r,q-r} \ ,$$

$$\Delta^{p,q} = n^{p,q}/B^{p,q} \ .$$

3.2. - THÉORÈME. - <u>Sur une variété analytique complexe</u> X , <u>le faisceau</u> m^1/E^1 <u>possède la résolution fine</u>

$$0 \longrightarrow m^1/E^1 \xrightarrow{j} \Delta^{1,0} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Delta^{1,q} \xrightarrow{d} \cdots \ ,$$

<u>dans laquelle</u> j <u>est définie par l'injection canonique</u> $i : m^1 \longrightarrow m^{1,0}$, <u>et</u> d <u>par la différentiation extérieure</u> : $n^{1,q} \longrightarrow n^{1,q+1}$.

Démonstration. - On utilise les résultats connus suivants :

(a) La suite $A^{p,q-1} \xrightarrow{d''} A^{p,q} \xrightarrow{d''} A^{p,q+1}$ est exacte (lemme de Grothendieck) ([2], chap. 1).

(b) $0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow B^{1,0} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} B^{1,q} \longrightarrow \cdots$ est une résolution fine de E^1 ([2], chap. 1).

(c) Il résulte de 1.1 que si ρ est un germe de coordonnée locale, et si $\omega^p \in \Omega^p$ tels que $d(\rho^{-r}\,\omega^p) = 0$, avec $p \geqslant 2$, il existe $\omega^{p-1} \in \Omega^{p-1}$ tel que,

si $r \geqslant 2$, $\qquad \rho^{-r}\,\omega^p = d(\rho^{-r+1}\,\omega^{p-1})$,

si $r = 1$, $\qquad \rho^{-1}\,\omega^p = d(\rho^{-1}\,\omega^{p-1})$ ([2], chap. 3).

(d) Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont trois complexes de modules avec des morphismes tels que la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

soit exacte, alors, si deux des complexes de modules sont acycliques, le troisième l'est aussi ([5], chap. 4, théorème 6).

(i) <u>La suite</u> $0 \to m^1/E^1 \xrightarrow{j} \Delta^{1,0} \xrightarrow{d} \Delta^{1,1}$ <u>est exacte</u>.

D'après (b) et (d), il suffit de prouver que

$$0 \to m^1 \xrightarrow{i} n^{1,0} \xrightarrow{d} n^{1,1}$$

est exacte. Cela résulte de la proposition suivante :

<u>Le sous-faisceau des éléments</u> d-<u>fermés de</u> $m^{p,0}$ <u>est</u> m^p .

<u>Preuve</u>. - Soit

$$\alpha = \sum_k \rho_k^{-r_k} \varphi_k^{p,0} \in m^{p,0} \qquad \text{tel que} \quad d\alpha = 0 \ ;$$

on a $d''\alpha = 0$, d'où

$$\sum_k \rho_k^{-r_k} d''\varphi_k^{p,0} = 0 \ .$$

Alors, $\rho_k^{-r_k} d''\varphi_k^{p,0}$ est C^∞ , d'après le lemme A appliqué à $m^{p,1}$, et d''-fermé, donc égal à $d''\psi_k^{p,0}$, où $\psi_k^{p,0} \in A^{p,0}$ (d'après (a)), avec

$$\sum_k d''\psi_k^{p,0} = d'' \sum_k \psi_k^{p,0} = 0 \ ,$$

donc $\sum_k \psi_k^{p,0}$ est holomorphe, et

$$\alpha = \sum_k (\rho_k^{-r_k} \varphi_k^{p,0} - \psi_k^{p,0}) + \sum_k \psi_k^{p,0} \ .$$

Alors

$$d''(\rho_k^{-r_k} \varphi_k^{p,0} - \psi_k^{p,0}) = 0 \ ,$$

et α est une p-forme méromorphe régulière et d-fermée.

(ii) <u>Pour</u> $s \in S_x$, <u>la suite</u> $n_{x,s}^{p,0} \xrightarrow{d} n_{x,s}^{p,1} \xrightarrow{d} n_{x,s}^{p,2}$ <u>est exacte</u>.

Soit $\theta = \rho^{-r} \varphi^{p,1} + \rho^{-s} \varphi^{p+1,0}$; $d\theta = 0$ équivaut à :

(α) $\rho^{-r} d''\varphi^{p,1} = 0$;

(β) $d'(\rho^{-r} \varphi^{p,1}) + d''(\rho^{-s} \varphi^{p+1,0}) = 0$;

(γ) $d'(\rho^{-s}\ \varphi^{p+1,0}) = 0$.

(α) entraîne "il existe $\psi^{p,0} \in A^{p,0}$ tel que $\varphi^{p,1} = d''\psi^{p,0}$ " (d'après (a)) ;

(β) entraîne " $\rho^{-s}\ \varphi^{p+1,0} - d'(\rho^{-r}\ \psi^{p,0}) = \rho^{-t}\ \psi^{p+1,0}$ " , où $\psi^{p+1,0}$ est holomorphe.

(γ) entraîne " $\rho^{-t}\ \psi^{p+1,0}$ est fermée".

Alors, d'après (c), il existe $\tau \in m_x^p \cap m_{x,s}^{p,0}$ tel que $d\tau = \rho^{-t}\ \psi^{p+1,0}$, d'où

$$\theta = d(\rho^{-r}\ \psi^{p,0} + \tau) .$$

(iii) <u>La suite</u> $n^{p,0} \xrightarrow{d} n^{p,1} \xrightarrow{d} n^{p,2}$ <u>est exacte</u> (à l'aide du lemme A et de (ii)).

(iv) <u>La suite</u> $m^{p,q-1} \xrightarrow{d''} m^{p,q} \xrightarrow{d''} m^{p,q+1}$ <u>est exacte</u>.

A l'aide du lemme A, on est ramené à démontrer que, pour $s \in \mathbb{S}_x$, la suite

$$m_{x,s}^{p,q-1} \xrightarrow{d''} m_{x,s}^{p,q} \xrightarrow{d''} m_{x,s}^{p,q+1}$$

est exacte, ce qui résulte de (a).

(v) <u>La suite</u> $n^{p,q} \xrightarrow{d} n^{p,q+1} \xrightarrow{d} n^{p,q+2}$ <u>est exacte</u>.

Cela se démontre par récurrence descendante sur p , compte tenu de

$$n^{p,q} = m^{p,q} \oplus n^{p+1,q-1} ,$$

à l'aide de (iv) et de (iii).

La résolution est fine, parce que les faisceaux $A^{p,q}$ sont fins ; cela termine la démonstration.

3.3. - Soit $\underset{\sim}{m}^{p,q}$ le sous-faisceau de $m^{p,q}$ constitué des germes

$$\sum_k \rho_k^{-p}\ \varphi_k^{p,q} ,$$

où $\varphi_k^{p,q} \in A^{p,q}$, et où ρ_k est un germe de fonction coordonnée complexe locale ; on pose

$$\underset{\sim}{n}^{p,q} = \bigoplus_{r=0}^{q} \underset{\sim}{m}^{p+r,q-r} ;$$

alors d applique $\underset{\sim}{n}^{p,q}$ dans $\underset{\sim}{n}^{p,q+1}$. Soit $D^{p,q} = \underset{\sim}{n}^{p,q}/B^{p,q}$.

La démonstration de 3.2 est valable pour $D'_c \approx \underset{\sim}{m}^1/E^1$ au lieu de m^1/E^1 , et $\underset{\sim}{n}^{1,q}$ au lieu de $n^{1,q}$, d'où le théorème suivant :

3.4. - THÉORÈME. - <u>Sur une variété analytique complexe</u> X , <u>le faisceau</u> D'_c <u>possède la résolution fine</u>

$$0 \longrightarrow D'_c \xrightarrow{j} D^{1,0} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} D^{1,q} \xrightarrow{d} \dots , \tag{3}$$

<u>dans laquelle</u> j <u>est définie par l'injection canonique</u> i : $\underset{\sim}{m}^1 \to \underset{\sim}{m}^{1,0}$, <u>et</u> d <u>par la différentiation extérieure.</u>

4. Résumé de la preuve du lemme A.

4.1. - On a

$$m_x^{p,q}/A_x^{p,q} = \sum_{s \in \mathbb{S}_x} (m_{x,s}^{p,q}/A_x^{p,q}) \ ;$$

il s'agit de montrer que la somme est directe, c'est-à-dire :

$$\alpha = \rho^{-r}\, \varphi^{p,q} = \sum_{\substack{k \\ [\rho_k] \neq [\rho]}} \rho_k^{-r_k}\, \varphi_k^{p,q} \tag{4}$$

entraîne $\alpha \in A_x^{p,q}$.

On note de la même façon des fonctions sur un voisinage U de x et les germes qu'elles induisent en x .

Soit

$$S_\rho = \{y \in U \mid \exists\, k \ \text{ tel que } \ [\rho_k] \neq [\rho] \ ; \ \ \rho_k(y) = \rho(y) = 0\} \ ;$$

c'est un sous-ensemble analytique de $[\rho]$ qui est rare et fermé. Mais $\rho^{-r}\, \varphi^{p,q}$ est égale, à cause du dernier membre de (4), à une forme C^∞ sur $U \setminus S_\rho$; alors $\rho^{-r}\, \varphi^{p,q}$ est C^∞ sur U , à cause du théorème suivant :

4.2. - THÉORÈME. - <u>Soient</u> U <u>un ouvert de</u> $\underset{\sim}{C}^n$, ρ <u>une fonction coordonnée complexe sur</u> U , φ <u>une fonction</u> C^∞ <u>sur</u> U , S <u>un sous-ensemble rare et fermé de</u> $[\rho]$. <u>Alors, si la fonction semi-méromorphe</u> $\rho^{-p}\, \varphi$ (p <u>entier</u> > 0) <u>est égale, sur</u> $U \setminus [\rho]$, <u>à la restriction d'une fonction</u> C^∞ <u>sur</u> $U \setminus S$, <u>elle est égale à la restriction, à</u> $U \setminus [\rho]$, <u>d'une fonction</u> C^∞ <u>sur</u> U <u>tout entier.</u>

Supposons le théorème démontré pour p ; si $\rho^{-p-1}\, \varphi$ est prolongeable de $U \setminus [\rho]$ à $U \setminus S$ en une fonction C^∞ , il en est de même de $\rho(\rho^{-p-1}\, \varphi) = \rho^{-p}\, \varphi$, et on sait (hypothèse de récurrence) que $\rho^{-p}\varphi$ est prolongeable à U en une fonction Φ, C^∞ ; il reste à montrer que $\rho^{-1}\Phi$ est prolongeable à U, sachant qu'elle est prolongeable de $U \setminus [\rho]$ à $U \setminus S$; il suffit donc de montrer le théorème pour $p = 1$.

On utilise un développement de Taylor en ρ, $\bar\rho$, de la fonction φ :

$$\varphi = Q_0 + \rho R_{1,0} + \bar\rho R_{0,1} ,$$

où Q_0 est indépendant de ρ, valable dans un voisinage W de $[\rho]$ dans U ; la fonction Q_0 est nulle sur $[\rho] \setminus S$, donc sur $[\rho]$ (et même sur W), puisqu'elle est continue. De sorte que :

$$\rho^{-1}\varphi = R_{1,0} + (\rho^{-1}\bar\rho)R_{0,1} .$$

On achève la démonstration à l'aide des lemmes suivants :

(a) <u>Soient</u> v_j $(j = 0, \ldots, p)$ <u>des fonctions continues sur un ouvert</u> U <u>telles que</u>

$$w = \sum_{j=0}^{p} v_j(\rho^{-1}\bar\rho)^j$$

<u>soit égale, sur</u> $U \setminus [\rho]$, <u>à la restriction d'une fonction continue</u> w' <u>sur</u> $U \setminus S$, <u>alors</u> :

1° $v_1, \ldots, v_p$ <u>s'annulent sur</u> $[\rho]$;

2° <u>Il existe une fonction</u> w'' <u>continue sur</u> U, <u>égale à</u> w' <u>sur</u> $U \setminus S$, <u>et telle que, sur</u> $[\rho]$, <u>on ait</u>

$$w''|[\rho] = v_0|[\rho] .$$

(b) <u>Soit</u> Φ <u>une fonction semi-méromorphe sur un ouvert</u> U <u>tel que</u> :

1° <u>Sur un voisinage</u> W <u>de</u> $[\rho]$ <u>dans</u> U, <u>on ait</u> :

$$\Phi = \sum_{t=0}^{r} R_t(\rho^{-1}\bar\rho)^t , \tag{5}$$

<u>où</u> R_t <u>est</u> C^∞ <u>sur</u> W, <u>pour</u> $t = 0, \ldots, r$;

2° $\Phi = \Phi'|W \setminus [\rho]$, <u>où</u> Φ' <u>est</u> C^1 <u>sur</u> $W \setminus S$, <u>alors</u>

$$\Phi'' = \begin{cases} \Phi' & \text{sur } W \setminus S \\ R_0|[\rho] & \text{sur } [\rho] \end{cases}$$

est C^1 sur W tout entier. Les dérivées partielles de φ sont des fonctions semi-méromorphes de la forme (5), C^∞ sur $U \setminus [\rho]$, et prolongeables sur $U \setminus S$ en des fonctions continues.

5. Application du théorème 3.4.

5.1. - Supposons X paracompacte. Considérons le complexe des sections de (3) :

$$0 \to \Gamma(X , D'_c) \to \Gamma(X , D^{1,0}) \to \dots \to \Gamma(X , D^{1,q}) \to \dots$$

Soit $\mathcal{K}^{1,q}(X , \underset{\sim}{C})$ le q-ième groupe de cohomologie de ce complexe. De même, soit $K^{1,q+1}(X , \underset{\sim}{C})$ le $(q+1)$-ième groupe de cohomologie du complexe des sections de la résolution

$$0 \to E^1 \to B^{1,0} \to B^{1,1} \to \dots$$

Alors, d'après le théorème de de Rham (formel), on a des isomorphismes verticaux tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}^{1,q}(X , \underset{\sim}{C}) & \xrightarrow{h^{1,q}} & K^{1,q+1}(X , \underset{\sim}{C}) \\ \approx\downarrow & & \approx\downarrow \\ H^q(X , D'_c) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(X , E^1) \end{array} ,$$

où δ et $h^{1,q}$ désignent les homomorphismes de connexion, soit commutatif ou anticommutatif suivant que q est impair ou pair. Cela se déduit du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & E^1 & \to & \underset{\sim}{m}^1 & \to & D'_c & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & B^{1,0} & \to & \underset{\sim}{n}^{1,0} & \to & D^{1,0} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & B^{1,1} & \to & \underset{\sim}{n}^{1,1} & \to & D^{1,1} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array} ,$$

dans lequel les suites verticales sont des résolutions fines.

On peut décrire $h^{1,q}$ ainsi : soit $\bar{\gamma} \in \mathcal{K}^{1,q}(X , \underset{\sim}{C})$, et soit $\gamma \in \Gamma(X , D^{1,q})$ un représentant de $\bar{\gamma}$, alors $d\gamma = 0$; soit $\mu \in \Gamma(X , n^{1,q})$ dont l'image par l'épimorphisme

$$\Gamma(X\ ,\ n^{1,q}) \dashrightarrow \Gamma(X\ ,\ D^{1,q})$$

est γ ; alors

$$d\beta = \alpha \in \Gamma(X\ ,\ B^{1,q+1})\ ,$$

et $h^{1,q}(\overline{\gamma})$ est la classe de α dans $K^{1,q+1}(X\ ,\ \underset{\sim}{C})$.

Cela résoud, pour le faisceau D'_c , un problème posé dans l'introduction : remplacer $H^q(X\ ,\ D'_c)$ par un groupe de cohomologie des sections d'un autre faisceau, et cela donne une factorisation de l'homomorphisme canonique

$$H^q(X\ ,\ D'_c) \dashrightarrow H^{q+1}(X\ ,\ E^1)\ .$$

5.2. - On va montrer, sur un exemple, que $\operatorname{Im} h^{1,q}$ peut ne pas être réduit à $\{0\}$.

L'homomorphisme de faisceaux

$$\underset{\sim}{n}^{1,0} \times B^{0,q} \dashrightarrow \underset{\sim}{n}^{1,q} \qquad (\text{resp. } B^{1,1} \times B^{0,q} \dashrightarrow B^{1,q+1}\ )\ ,$$

qui applique $(\alpha\ ,\ \beta)$ sur $\alpha \wedge \beta$, définit une application $\underset{\sim}{C}$-bilinéaire telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}^{1,0}(X\ ,\ \underset{\sim}{C}) \times K^{0,q}(X\ ,\ \underset{\sim}{C}) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "{(h^{1,0}\ ,\ i)}"'] & \mathcal{K}^{1,q}(X\ ,\ \underset{\sim}{C}) \arrow[d, dashed, "h^{1,q}"] \\
K^{1,1}(X\ ,\ \underset{\sim}{C}) \times K^{0,q}(X\ ,\ \underset{\sim}{C}) \arrow[r, dashed] & K^{1,q+1}(X\ ,\ \underset{\sim}{C})\ ,
\end{tikzcd}$$

où i désigne l'identité ; on a $\mathcal{K}^{1,0}(X\ ,\ \underset{\sim}{C}) \approx H^0(X\ ,\ D'_c)$.

Supposons que X soit une variété algébrique projective, sans singularité, munie de la métrique kählérienne habituelle. Sur X , on identifie les éléments de $K^{p,q}(X\ ,\ \underset{\sim}{C})$ et les formes harmoniques qui les représentent dans le théorème de Hodge.

Soit W un diviseur de X dont le support est, au voisinage de chaque point, la réunion de sous-variétés analytiques complexes de codimension 1 ; soient α l'image de W dans $\mathcal{K}^{1,0}(X\ ,\ \underset{\sim}{C})$, et $\omega^{1,1}$ sa classe de cohomologie complexe ; on a $h^{1,0}(\alpha) = \omega^{1,1}$. Alors, pour toute forme harmonique $\varphi \in H^q(X, \underset{\sim}{C}) = K^{0,q}(X, \underset{\sim}{C})$, on a

$$h^{1,q}(\alpha \wedge \varphi) = \omega^{1,1} \wedge \varphi\ .$$

Donc

$$\operatorname{Im} h^{1,q} \supset \{\omega^{1,1} \wedge \varphi\ ;\quad \varphi \in H^q(X\ ,\ \underset{\sim}{C})\}\ .$$

En particulier, si P est une section hyperplane, la classe de cohomologie $\omega^{1,1}$ du diviseur $1.P$ est la forme fondamentale de X ([1], chap. 9, § 6). D'où le théorème suivant :

THÉORÈME. - *Si* X *est une variété algébrique projective sans singularité, l'image de* $h^{1,q} \circ i_1$

$$\begin{tikzcd} H^q(X\,,\,D'_c) \arrow[d, "i_1"', "\approx"] & \\ K^{1,q}(X\,,\,C) \arrow[r, dashed, "h^{1,q}"] & K^{1,q+1}(X\,,\,\underset{\sim}{C})\ , \end{tikzcd}$$

contient le sous-espace vectoriel des classes de cohomologie non primitives ([8], p. 75) *de* X .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BALDASSARI (M.). - Algebraic varieties. - Berlin, Springer-Verlag, 1956 (Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, 12).

[2] DOLBEAULT (Pierre). - Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe, Annals of Math., Series 2, t. 64, 1956, p. 83-130 ; t. 65, 1957, p. 282-330 (Thèse Sc. math. Paris, 1955).

[3] DOLBEAULT (P.) et ROBIN (G.). - Sur le faisceau des diviseurs à coefficients complexes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, 1966, Série A, p. 1452-1455.

[4] KODAIRA (K.) and SPENCER (D.C.). - Divisor class groups on algebraic varieties, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 39, 1954, p. 872-877.

[5] NORTHCOTT (D. C.). - An introduction to homological algebra. - Cambridge, at the University Press, 1960.

[6] SCHWARTZ (Laurent). - Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analytique complexe, Colloques internationaux du Centre national de la Recherche scientifique : Géométrie différentielle [52. 1953. Strasbourg], p. 185-195. - Paris, C. N. R. S., 1953.

[7] SERRE (Jean-Pierre). - Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables [1953. Bruxelles], p. 57-68. - Liège, Georges Thone ; Paris, Masson, 1953 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[8] WEIL (André). - Introduction à l'étude des variétés kählériennes. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1267 ; Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 6).