Jacques Frisch

Platitudes (géométrie analytique)

Séminaire Lelong. Analyse, tome 7 (1966-1967), exp. nº 7, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1966-1967__7__A7_0>

PLATITUDES

(Géométrie analytique)

par Jacques FRISCH

1. – Ces notes constituent le résumé de deux conférences faites au Séminaire. Comme une rédaction détaillée est à paraître aux "Inventiones Mathematicae", d'ici la fin de l'année, on se bornera ici à l'exposé des résultats et aux idées des démonstrations, renvoyant pour les précisions à l'article indiqué.

2. – Voici le problème (posé dans [7], exposé n° 13). Soient $\varphi : Y \to S$ un morphisme d'espaces analytiques complexes (non nécessairement réduits), $\mathfrak{F}$ un faisceau analytique cohérent sur Y. Pour $y \in Y$ et $s = \varphi(y)$, φ définit un homomorphisme d'anneaux $\mathcal{O}_{S,s} \to \mathcal{O}_{Y,y}$, de sorte que $\mathfrak{F}_y$ devient un $\mathcal{O}_{S,s}$-module. On dit que $\mathfrak{F}$ est φ-plat (ou S-plat) en y, si le $\mathcal{O}_{S,s}$-module $\mathfrak{F}_y$ est plat. En particulier, on dit que Y est φ-plat (ou S-plat) en y, si $\mathcal{O}_Y$ est φ-plat en y. Il s'agit de prouver l'assertion suivante :

THÉORÈME. – L'ensemble des points $y \in Y$ où $\mathfrak{F}$ n'est pas φ-plat est analytique.

3. – Commençons par mettre ce problème sous une forme plus maniable. D'abord, en vertu du critère de platitude ([2], chap. III, § 5, théorème 1) (l'hypothèse "idéalement séparé" étant satisfaite en vertu de [2], chap. III, § 5, prop. 2), pour que $\mathfrak{F}$ soit φ-plat en y, il faut et il suffit que

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathfrak{F}_y , \underset{\sim}{C}) = 0$$

(on rappelle que $\underset{\sim}{C}$ est le corps résiduel de $\mathcal{O}_{S,s}$).

Ensuite, le problème est local (sur Y). Or, localement, Y se plonge dans un ouvert U de $\underset{\sim}{C}^n$; soit i un plongement (i. e. un isomorphisme de Y sur un sous-espace de U). Alors $\varphi \times i : Y \to S \times U$ est encore un plongement, et l'on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, dashed, "\varphi \times i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & S \times U \arrow[dl, "\pi"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

où π est la projection $(s, x) \longmapsto s$. En outre, $(\varphi \times i)_* \mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur $S \times U$, nul hors de $(\varphi \times i)(Y)$; et si

$$(s, x) = (\varphi(y), i(y)),$$

on a

$$(\varphi \times i)_* \mathcal{F})_{(s,x)} = \mathcal{F}_y .$$

On peut donc supposer que $Y = S \times U$, et $\varphi = \pi$.

Cela fait, le problème est toujours local (sur $S \times U$ maintenant). On peut donc supposer qu'il existe sur $S \times U$ un début de résolution libre de $\mathcal{F}$:

$$\begin{cases} \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0, \\ \mathcal{C} : \mathcal{O}^p_{S\times U} \xrightarrow{u} \mathcal{O}^q_{S\times U} \xrightarrow{v} \mathcal{O}^r_{S\times U} . \end{cases}$$

Pour $(s, x) \in S \times U$, le $\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathcal{F}_{(s,x)}, \underset{\sim}{C})$ s'identifie à l'homologie du complexe

$$\mathcal{C}_x(s) = \mathcal{C}_{(s,x)} \underset{\mathcal{O}_{S,s}}{\otimes} \underset{\sim}{C} = \mathcal{C}_{(s,x)} \underset{\mathcal{O}_{S\times U(s,x)}}{\otimes} \mathcal{O}_{U,x} ;$$

$$\mathcal{C}_x(s) : \mathcal{O}^p_{U,x} \xrightarrow{u_x(s)} \mathcal{O}^q_{U,x} \xrightarrow{v_x(s)} \mathcal{O}^r_{U,x} .$$

Nous voilà ramenés à prouver le théorème sous la forme suivante :

<u>L'ensemble</u> E <u>des points</u> $(s, x) \in S \times U$ <u>tels que le complexe</u> $\mathcal{C}_x(s)$ <u>ne soit pas acyclique est analytique</u>.

<u>4</u>. - Étant donné un espace analytique complexe X, on dit qu'une partie P de X est <u>constructible</u>, si c'est un élément de la plus petite famille de parties de X stable par réunion finie, intersection finie et passage au complémentaire, et contenant les sous-ensembles analytiques de X. (Remarquer que, contrairement au cas de la géométrie algébrique, si Y est un sous-ensemble analytique de X, et P une partie constructible de $X \setminus Y$, P n'a aucune raison d'être constructible dans X.) Voici un exemple :

LEMME. - <u>Soient</u> X <u>un espace analytique complexe</u>, E, F, G, H <u>quatre espaces vectoriels de dimension finie sur</u> $\underset{\sim}{C}$, u <u>et</u> v <u>deux morphismes de</u> X <u>dans</u> $L(E, F)$ <u>et</u> $L(G, H)$ <u>respectivement</u>, π <u>une application linéaire de</u> G <u>sur</u> F.

<u>L'ensemble des</u> $x \in X$ <u>tels que</u>

$$\dim \operatorname{Im} u(x) = \dim \pi(\operatorname{Ker} v(x))$$

<u>est constructible</u>.

Une partie constructible P de X peut toujours se mettre sous la forme

$$P = \bigcup_{i \in I} (A_i \setminus B_i) \ ,$$

où $(A_i\ ,\ B_i)_{i \in I}$ est une famille finie de couples de sous-ensembles analytiques de X. La notion de partie localement constructible de X va de soi. Son intérêt réside dans le lemme (trivial) suivant :

LEMME. - <u>Les sous-ensembles analytiques d'un espace analytique</u> X <u>sont les parties localement constructibles et fermées</u>.

5. - Pour prouver le théorème, nous montrerons que l'ensemble E qui nous intéresse est localement constructible et fermé. Le fait que E soit <u>fermé</u> est facile à voir (modulo la thèse de DOUADY [3] qui, elle, <u>n'est pas</u> facile à lire), voici comment :

Soit $(s_0\ ,\ x_0) \in S \times U$, et soit $K \subset U$ un polycylindre $\mathfrak{F}(s_0)$-privilégié contenant x_0 à son intérieur ($\mathfrak{F}(s_0)$ est le faisceau sur U dont la fibre en $x \in U$ est

$$\mathfrak{F}_{(s_0,x)} \underset{\mathcal{O}_{S,s_0}}{\otimes} \underset{\sim}{C} = \mathfrak{F}_{(s_0,x)} \underset{\mathcal{O}_{S\times U(s_0,x)}}{\otimes} \mathcal{O}_{U,x} = \operatorname{Coker} v_x(s_0)\ ).$$

$\mathcal{C}$ définit un complexe de fibrés analytiques banachiques triviaux de base S :

$$B(K\ ,\ \mathcal{C}) : \ B(K\ ,\ \mathcal{O}^p_{S\times U}) \dashrightarrow B(K\ ,\ \mathcal{O}^q_{S\times U}) \dashrightarrow B(K\ ,\ \mathcal{O}^r_{S\times U}) \ .$$

Si $\mathcal{C}_{x_0}(s_0)$ est acyclique, on peut choisir K assez petit pour que $B(K\ ,\ \mathcal{C})$ soit une suite exacte directe en s_0, donc au-dessus d'un voisinage Ω de s_0 dans S (loc. cit., "platitude et privilège"). Pour $s \in \Omega$, $B(K\ ,\ \mathcal{C})$ est donc exacte directe en s, et par suite $\mathcal{C}(s)$ est une suite exacte de faisceaux au-dessus de $\overset{\circ}{K}$ (loc. cit., § 8, "lemme préliminaire"). Ainsi, $\mathfrak{F}$ est S-plat en tout point de $\Omega \times \overset{\circ}{K}$, et E est bien fermé.

6. - Il faut montrer maintenant que E est <u>localement constructible</u>. Pour

$x \in U$, soit $\mathfrak{M}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{U,x}$. On pose, pour tout entier α ,

$$[\mathcal{O}_{U,x}]_\alpha = \mathcal{O}_{U,x} / \mathfrak{M}_x^{\alpha+1} ;$$

on a alors des projections canoniques :

$$\mathcal{O}_{U,x} \xrightarrow{\pi_{\alpha+\beta}} [\mathcal{O}_{U,x}]_{\alpha+\beta} \xrightarrow{\pi_\alpha^{\alpha+\beta}} [\mathcal{O}_{U,x}]_\alpha .$$

Si ψ est un homomorphisme $\mathcal{O}_{U,x}^p \to \mathcal{O}_{U,x}^q$, on en déduit un homomorphisme

$$[\mathcal{O}_{U,x}^p]_\alpha \to [\mathcal{O}_{U,x}^q]_\alpha$$

noté $[\psi]_\alpha$.

CRITÈRE local d'acyclicité. - Soient $\mathcal{C}$: $\mathcal{O}_{S\times U}^p \xrightarrow{u} \mathcal{O}_{S\times U}^q \xrightarrow{v} \mathcal{O}_{S\times U}^r$ un complexe sur $S \times U$, (s , x) un point de $S \times U$. Il existe un voisinage $\Omega \times V$ de (s , x) et deux entiers α et β tels que, pour tout

$$(s' , x') \in \Omega \times V ,$$

les deux conditions suivantes soient équivalentes :

(i) Le complexe $\mathcal{C}_{x'}(s')$ est acyclique ;

(ii) $\operatorname{Im}[u_{x'}(s')]_\alpha = \pi_\alpha^{\alpha+\beta} (\operatorname{Ker}[v_{x'}(s')]_{\alpha+\beta})$.

(Noter qu'on oublie maintenant que $\mathcal{C}$ est une résolution de $\mathcal{F}$.) Ce critère, joint au premier lemme du § 4, prouve que l'ensemble E est localement constructible. Il ne reste donc plus qu'à prouver ce critère.

On voit, par un argument facile, qu'il suffit de le prouver sur les parallèles à S . Plus précisément, il suffit de prouver qu'il existe un voisinage Ω de s dans S et deux entiers α et β tels que, pour tout $s' \in \Omega$, il y ait équivalence entre :

(i) $\mathcal{C}_x(s')$ est acyclique,

(ii) $\operatorname{Im}[u_x(s')]_\alpha = \pi_\alpha^{\alpha+\beta}(\operatorname{Ker}[v_x(s')]_{\alpha+\beta})$.

7. - LEMME. - Soient v : $\mathcal{O}_{S\times U}^q \to \mathcal{O}_{S\times U}^r$ un morphisme de faisceaux, et (s , x) un point de $S \times U$. Il existe un voisinage Ω de s dans S et deux entiers λ_0 et μ_0 tels que :

(1) Pour tout $s' \in \Omega$ et tout $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\mathfrak{M}_x(\mathfrak{M}_x^\lambda\ \mathcal{O}^r_{U,x} \cap \operatorname{Im} v_x(s')) = \mathfrak{M}_x^{\lambda+1}\ \mathcal{O}^r_{U,x} \cap \operatorname{Im} v_x(s') ,$$

(2) Pour tout $s' \in \Omega$ et tout $\mu \geq \mu_0$,

$$\mathfrak{M}_x(\mathfrak{M}_x^\mu\ \mathcal{O}^q_{U,x} \cap \operatorname{Ker} v_x(s')) = \mathfrak{M}_x^{\mu+1}\ \mathcal{O}^q_{U,x} \cap \operatorname{Ker} v_x(s') .$$

On reconnait le lemme d'Artin-Rees, mais pour un $\mathcal{O}_{U,x}$-module ($\operatorname{Im} v_x(s')$ dans (1) et $\operatorname{Ker} v_x(s')$ dans (2)) dépendant d'un paramètre. Esquissons la démonstration du critère d'acyclicité (sur les parallèles à S) modulo le lemme. Prenons pour Ω celui du lemme, et pour α le μ_0 du lemme. On a, pour tout $s' \in \Omega$,

$$\mathfrak{M}_x^{\alpha+1}\ \mathcal{O}^q_{U,x} \cap \operatorname{Ker} v_x(s') \subset \mathfrak{M}_x \operatorname{Ker} v_x(s') .$$

Le lemme de Nakayama montre alors que tout sous-$\mathcal{O}_{U,x}$-module M de $\mathcal{O}^q_{U,x}$ tel que

$$M \subset \operatorname{Ker} v_x(s') \subset M + \mathfrak{M}_x^{\alpha+1}\ \mathcal{O}^q_{U,x}$$

est, en fait, égal à $\operatorname{Ker} v_x(s')$. Appliquant cela à $M = \operatorname{Im} u_x(s')$, on obtient déjà que, pour tout $s' \in \Omega$, la condition (i) du critère équivaut à

(iii) $\operatorname{Im}[u_x(s')]_\alpha = \pi_\alpha(\operatorname{Ker} v_x(s'))$.

Il reste à prouver que (iii) $\Longleftrightarrow$ (ii) , ce qui revient à trouver un β tel que pour tout $s' \in \Omega$,

$$\pi_\alpha(\operatorname{Ker} v_x(s')) = \pi_\alpha^{\alpha+\beta}(\operatorname{Ker}[v_x(s')]_{\alpha+\beta}) .$$

On utilise pour cela la partie (1) du lemme. Les détails sont laissés au soin du lecteur scrupuleux, s'il s'en trouve.

8. - Il faut à présent prouver le lemme du § 7. Ce paragraphe et les deux suivants sont consacrés à des préliminaires.

THÉORÈME. - Soient X un espace analytique complexe, x un point de X , $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X . Il existe un système fondamental de voisinages K de x qui sont compacts, de Stein (i. e. les théorèmes A et B sont vrais sur K), $\mathcal{F}$-privilégiés (i. e. $\Gamma(K , \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}_x$ est injective), et noethériens (i. e. tels que l'anneau $\Gamma(K , \mathcal{O}_X)$ soit noethérien).

(Pour l'existence de voisinages $\mathfrak{F}$-privilégiés, voir [6] ou [7] ; pour celle de voisinages noethériens, voir [4].) Ce théorème permet d'étendre aux faisceaux analytiques cohérents certains théorèmes d'algèbre, comme on va le voir.

9. - Rappelons le théorème d'Artin-Rees :

Soient A un anneau noethérien, I un idéal de A, F un A-module de type fini, E un sous-module de F. Il existe un entier λ_0 tel que, pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$

$$I(I^{\lambda} F \cap E) = I^{\lambda+1} F \cap E .$$

Voici son analogue pour les faisceaux analytiques cohérents :

LEMME. - Soient X un espace analytique complexe, $\mathfrak{I}$ un faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_X$, $\mathfrak{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, $\mathcal{E}$ un sous-$\mathcal{O}_X$-module cohérent de $\mathfrak{F}$. Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage K de x et un entier λ_0 tels que, pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$, on ait au-dessus de K :

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{I}^{\lambda} \mathfrak{F} \cap \mathcal{E}) = \mathfrak{I}^{\lambda+1} \mathfrak{F} \cap \mathcal{E} .$$

Démonstration. - Soit K un voisinage de x compact, noethérien et de Stein. On applique le théorème d'Artin-Rees à

$$A , I , E , F = \Gamma(K ; \mathcal{O}_X , \mathfrak{I} , \mathcal{E} , \mathfrak{F}) .$$

En posant $\mathcal{G}_{\lambda} = (\mathfrak{I}^{\lambda+1} \mathfrak{F} \cap \mathcal{E}) / \mathfrak{I}(\mathfrak{I}^{\lambda} \mathfrak{F} \cap \mathcal{E})$, on obtient $\Gamma(K , \mathcal{G}_{\lambda}) = 0$. On conclut grâce au théorème A.

10. - Le lemme algébrique que voici se trouve dans [5] (lemme 6.9.2) :

Soient A un anneau intègre noethérien, B une A-algèbre de type fini, G un B-module de type fini. Il existe $f \neq 0$ dans A tel que G_f soit un A_f-module libre.

La proposition analytique qui s'en déduit s'énonce ainsi :

THÉORÈME de platitude générique. - Soient S un espace analytique complexe réduit, U un ouvert de $\underline{C}^n$, (s , x) un point de $S \times U$, $\mathfrak{I}$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{S\times U}$ défini par le sous-espace $S \times \{x\}$ de $S \times U$, $\mathfrak{F}$ un $\mathcal{O}_{S\times U}$-module cohérent.

(i) Il existe un voisinage ouvert Ω de s dans S et un sous-ensemble analytique strict T de Ω tels que, pour tout $s' \in \Omega \setminus T$ et tout entier $k \geqslant 0$, le faisceau $\mathfrak{F} / \mathfrak{I}^{k+1} \mathfrak{F}$ soit S-libre en (s' , x) ;

(ii) Si tous les faisceaux $\mathfrak{F} / \mathfrak{J}^{k+1} \mathfrak{F}$ sont S-libres en (s', x), $\mathfrak{F}$ est S-plat en ce point.

Démonstration. - La partie (ii) est laissée au soin du lecteur : c'est peu ou prou un exercice de BOURBAKI. Pour (i), on peut supposer le germe de S en s irréductible, de sorte que l'anneau $\mathcal{O}_{S,s}$ est noethérien intègre. Soit K un voisinage de s compact, de Stein, noethérien et $\mathcal{O}_S$-privilégié.

$$A = \Gamma(K , \mathcal{O}_S)$$

est un anneau intègre noethérien. Soit

$$B = \Gamma(K \times \{x\} , gr_{\mathfrak{J}} \mathcal{O}_{S\times U}) ;$$

c'est une A-algèbre de type fini (alors que $\Gamma(K \times \{x\} , \mathcal{O}_{S\times U})$ n'en serait pas une). Enfin,

$$G = \Gamma(K \times \{x\}, gr_{\mathfrak{J}} \mathfrak{F})$$

est un B-module de type fini. Il existe alors $f \neq 0$ dans A tel que G_f soit un A_f-module libre ;

$$T = \{s \in \overset{\circ}{K} ; \ f(s) = 0\}$$

est un sous-ensemble analytique strict de $\overset{\circ}{K}$ (car S est réduit). On voit, en utilisant le théorème B , que, pour tout $s' \in \overset{\circ}{K} \setminus T$, $(gr_{\mathfrak{J}} \mathfrak{F})_{(s',x)}$ est $\mathcal{O}_{S,s'}$-libre, ce qui équivaut à la conclusion de (i). On peut aussi prouver (i) sans utiliser le lemme algébrique de [5], mais c'est bien plus pénible.

11. - Voici maintenant l'idée de la démonstration du lemme du § 7. Il est clair que l'on peut supposer S réduit.

Partie (1) : Triviale si $\dim S_s = 0$ (c'est Artin-Rees tout cru). On raisonne par récurrence sur $\dim S_s$. Soit $\mathfrak{J}$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{S\times U}$ défini par le sous-espace $S \times \{x\}$ de $S \times U$. D'après le § 9, il existe un voisinage ouvert Ω_1 de s dans S et un entier λ_1 tels que, pour tout $\lambda \geq \lambda_1$, on ait au-dessus de $\Omega_1 \times \{x\}$:

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{J}^{\lambda} \mathcal{O}^r_{S\times U} \cap \operatorname{Im} v) = \mathfrak{J}^{\lambda+1} \mathcal{O}^r_{S\times U} \cap \operatorname{Im} v .$$

Intuitivement, pour obtenir (1), il s'agit de découper cela en tranches verticales ce qui, mathématiquement, revient à appliquer le foncteur $\underset{S\times U(s',x)}{\otimes} \mathcal{O}_{U,x}$.

HYPOLEMME. - Soit $s' \in S$. Supposons que $(\mathcal{O}^r_{S\times U} / (\mathfrak{J}^\lambda \mathcal{O}^r_{S\times U} + \mathrm{Im}\ v))_{(s',x)}$ soit $\mathcal{O}_{S,s}$-libre pour tout entier λ . Alors, pour tout λ ,

$$\mathfrak{m}_x(\mathfrak{m}_x^\lambda \mathcal{O}^r_{U,x} \cap \mathrm{Im}\ \mathcal{O}_x(s')) = \text{image canonique de } \mathfrak{J}(\mathfrak{J}^\lambda \mathcal{O}^r_{S\times U} \cap \mathrm{Im}\ v)_{(s',x)} \text{ dans } \mathcal{O}^r_{U,x} ,$$

$$\mathfrak{m}_x^{\lambda+1} \mathcal{O}^r_{U,x} \cap \mathrm{Im}\ v_x(s') = \text{image canonique de } (\mathfrak{J}^{\lambda+1} \mathcal{O}^r_{S\times U} \cap \mathrm{Im}\ v)_{(s',x)} \text{ dans } \mathcal{O}^r_{U,x} .$$

Cela résulte de [1] (chap. 1, § 2, prop. 6 et lemme 7). Ainsi, (1) est valable pour tout $s' \in S$ où l'hypothèse de l'hypolemme est vérifiée. Mais, d'après le théorème de platitude générique, appliqué au faisceau $\mathcal{O}^r_{S\times U} / \mathrm{Im}\ v$, c'est le cas pour tout $s' \in \Omega'_1 \setminus T_1$, où Ω'_1 est un voisinage ouvert de s contenu dans Ω_1 , et T_1 un sous-ensemble analytique strict de Ω'_1 . Il reste donc à prouver (1) sur T_1 ; mais cela résulte de l'hypothèse de récurrence appliquée à l'image canonique de $(\mathrm{Im}\ v \otimes_{\mathcal{O}_{S\times U}} \mathcal{O}_{T\times U})|_{T\times U}$ dans $\mathcal{O}^r_{T\times U}$; (1) est établi.

Partie (2) : On commence par établir, en utilisant le théorème de platitude générique, l'hypolemme suivant :

HYPOLEMME. - Il existe un voisinage Ω de s dans S et une famille finie $(f_i)_{i\in I}$ de sections de $\mathcal{O}^q_{S\times U}$ au-dessus de $\Omega \times \{x\}$, tels que, pour tout $s \in \Omega$, ceux des $f_{i,x}(s)$ qui sont dans $\mathrm{Ker}\ v_x(s)$ engendrent $\mathrm{Ker}\ v_x(s)$ comme $\mathcal{O}_{U,x}$-module.

Notons, pour toute partie σ de I , $\mathfrak{F}_\sigma$ le faisceau engendré par les f_i , $i \in \sigma$; les $\mathfrak{F}_\sigma$ sont des images, auxquelles on peut appliquer (1). Comme l'ensemble des parties de I est fini, (2) est établi.

Cela achève la preuve du théorème énoncé dans le § 2.

12. - Il faut noter qu'il n'y a en général aucune raison pour que l'ensemble analytique Z des points de non φ-platitude de $\mathfrak{F}$ soit un sous-ensemble strict de Y (exemple : Y = droite simple , S = droite double), ni pour que $\varphi(Z)$ soit "petit" dans S . C'est cependant le cas si S est réduit. Plus précisément, $\varphi(Z)$ est dans ce cas une partie négligeable de S , ce qui signifie que

$$\varphi(Z) \cap S_{\text{rég}}$$

($S_{\text{rég}}$ = ensemble des points réguliers de S) est une réunion dénombrable de sous-variétés localement fermées d'intérieur vide de $S_{\text{rég}}$ (cela implique que $\varphi(Z)$ est maigre dans S). En particulier, si S est réduit et φ propre, $\varphi(Z)$ est un sous-ensemble analytique strict de S .

13. - Remarquons pour terminer qu'il ne s'introduit pas sur Z de structure naturelle d'espace analytique non nécessairement réduit (d'ailleurs, c'est aussi le cas en géométrie algébrique). Peut-être en verra-t-on une motivation dans le théorème ci-dessous, concernant les morphismes propres (vrai aussi en géométrie algébrique), et qui, en un certain sens, exprime pour chaque point de S de combien il s'en faut pour que $\mathfrak{F}$ soit S-plat au-dessus de s :

THÉORÈME. - Soient $\varphi : Y \dashrightarrow S$ un morphisme propre d'espaces analytiques complexes, $\mathfrak{F}$ un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent. Il existe un espace $\mathfrak{S}$ au-dessus de S tel que :

(i) $\mathfrak{F}(\mathfrak{S})$ soit $\mathfrak{S}$-plat,

(ii) $\mathfrak{S}$ soit universel pour cette propriété (i. e. pour tout espace T au-dessus de S tel que $\mathfrak{F}(T)$ soit T-plat, $T \dashrightarrow S$ se factorise de façon unique à travers $\mathfrak{S}$).

De plus, $\mathfrak{S}$ est une somme disjointe localement finie de sous-espaces localement fermés de S , dont les ensembles sous-jacents forment une partition de S .

(Si T est un espace au-dessus de S , $\mathfrak{F}(T)$ désigne le faisceau sur $T \times_S Y$, image réciproque de $\mathfrak{F}$.) La démonstration paraîtra ultérieurement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, Chap. 1 : Modules plats, Chap. 2 : Localisation. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290 ; Bourbaki, 27).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, Chap. 3 : Graduations, filtrations et topologies, Chap. 4 : Idéaux premiers associés et décomposition primaire. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1293 ; Bourbaki, 28).

[3] DOUADY (Adrien). - Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, fasc. 1, p. 1-95 (Thèse Sc. math. Paris, 1965).

[4] FRISCH (Jacques). - Fonctions analytiques sur un ensemble semi-analytique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 2974-2976.

[5] GROTHENDIECK (Alexander). - Eléments de géométrie algébrique, IV : Etude locale des schémas et des morphismes de schémas. - Paris, Presses universitaires de France, 1966 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 28).

[6] HERVÉ (Michel). - Several complex variables. Local theory. - London, Oxford University Press, 1963 (Tata Institute of fundamental Research. Studies in Mathematics, 1).

[7] Séminaire Cartan, 13e année, 1960/61 : Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique. - Paris, Secrétariat mathématique, 1962.