Séminaire Lelong.
Analyse

André Martineau

Sur le théorème du graphe fermé

Séminaire Lelong. Analyse, tome 7 (1966-1967), exp. n° 6, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1966-1967__7__A6_0>

Séminaire LELONG
(Analyse)
7e année, 1966/67, n° 6

26 avril 1967

SUR LE THÉORÈME DU GRAPHE FERMÉ

par André MARTINEAU

Introduction.

Il s'agit ici d'une généralisation du théorème du graphe fermé dans la direction suggérée par A. GROTHENDIECK dans sa thèse [6].

La première solution à ce problème a été fournie par D. A. RAIKOV. A la suite de RAIKOV, une autre solution a été donnée par L. SCHWARTZ [13], qui s'appuie sur sa théorie de l'intégration et sur un lemme de A. DOUADY, mais qui ne recouvre pas exactement la conjecture de Grothendieck. L'énoncé de Schwartz est particulièrement suggestif, et ma principale contribution [9] a été d'en fournir une nouvelle démonstration puisée dans l'ouvrage de BANACH [1].

Je détaillerai, même quand ils sont en principe connus, les démonstrations des résultats sur la théorie de la catégorie dont j'ai besoin dans la démonstration des énoncés du type Schwartz.

1. Remarques sur la théorie de la catégorie.

Dans la suite, sauf mention expresse du contraire, tous les espaces que je considère sont séparés (terminologie de BOURBAKI).

Une partie Y d'un espace topologique X est dite *rare*, si elle est incluse dans un fermé sans point intérieur ; elle est *maigre*, si elle est réunion dénombrable de parties rares (1re catégorie chez BAIRE et chez les Polonais). L'espace X est dit *non maigre*, s'il n'est pas un sous-ensemble maigre de lui-même. L'espace X est dit *espace de Baire*, si tout ouvert non vide de X est non maigre. Tout espace homéomorphe à un espace métrique complet est de Baire, mais par exemple un espace produit de droites est un espace de Baire sans être forcément métrisable.

THÉORÈME 1. - *Soit* Y *une partie de* X . *On désigne par* $D(Y)$ *l'ensemble des points* x *de* X *tels que pour tout voisinage* V *de* x *l'ensemble* $V \cap X$ *soit non maigre. On a :*

(α) $D(Y) \subset \overline{Y}$;

(β) Si $Y_1 \subset Y_2$, $D(Y_1) \subset D(Y_2)$;

(γ) $D(Y)$ *est fermé* ;

(δ) Pour que $O(Y) = \widehat{\mathring{D}(Y)} = \emptyset$, il faut et il suffit que Y soit un ensemble maigre ;

(ε) $Y \cap \complement D(Y)$ est un ensemble maigre ;

(ζ) $O(Y)$ est le plus grand ouvert dont tout sous-ensemble ouvert rencontre Y suivant un ensemble non maigre ;

(η) Si Y est réunion d'une suite de parties Y_n , $D(Y)$ contient $\bigcup_n D(Y_n)$, et en diffère au plus par un ensemble maigre.

Démonstration. - Les propriétés (α), (β), (γ) sont évidentes. Montrons (δ) en suivant BANACH (cf. aussi BOURBAKI [3], chapitre 9, § 5, exercice 3, p. 112).

Notons d'abord ceci : si A_ι , $\iota \in I$, est une famille d'ouverts disjoints deux à deux de X , et si B_ι est un sous-ensemble rare de A_ι pour chaque ι , l'ensemble $\bigcup_\iota B_\iota$ est rare dans X . En effet, on a

$$\overline{\bigcup_{\iota\in I} B_\iota} \cap A_{\iota_0} = \overline{B_{\iota_0}} \cap A_{\iota_0} ,$$

quel que soit ι_0 . Si ω est un ouvert non vide inclus dans $\overline{\bigcup_{\iota\in I} B_\iota}$, il rencontre un des B_ι , soit B_{ι_0} .

Alors $\omega \cap A_{\iota_0} \subset \overline{B_{\iota_0}} \cap A_{\iota_0}$, et ceci contredit l'hypothèse. Maintenant faisons l'hypothèse que chaque B_ι est maigre dans A_ι , alors $\bigcup_\iota B_\iota$ est maigre dans X . En effet, l'hypothèse signifie que, pour chaque $\iota \in I$, $B_\iota \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{\iota,n}$, chaque sous-ensemble $B_{\iota,n}$ de A_ι étant rare. Alors, on a

$$\bigcup_{\iota\in I} B_\iota = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_\iota B_{\iota,n}\right) ,$$

et chaque ensemble $\bigcup_\iota B_{\iota,n}$ est rare, donc $\bigcup_{\iota\in I} B_\iota$ est maigre.

Supposons alors que $O(Y) = \emptyset$. Soit ω_α , $\alpha \in A$, une famille d'ouverts deux à deux disjoints tels que, pour chaque α , $\omega_\alpha \cap Y$ soit maigre, et maximale. Il en existe une par ZORN. Je dis que

$$F = \complement\left(\bigcup_{\alpha\in A} \omega_\alpha\right)$$

est rare. En effet, dans le cas contraire, si x est un point intérieur de ce complémentaire dans un voisinage de x arbitrairement petit, on trouvera y et un voisinage W de y tel que $W \cap Y$ soit maigre, puisque $O(Y) = \emptyset$. L'ensemble $W \cap \hat{\mathring{F}}$ rencontre Y suivant un ensemble maigre, absurde. Ceci prouve (δ). Donc, $Y \subset F \cup \left(\bigcup_{\alpha\in A} Y \cap \omega_\alpha\right)$, donc est maigre.

<u>Prouvons</u> (ε) : Pour cela, nous appliquons le résultat précédent à l'espace $X_1 = \complement(DY)$ et à son sous-espace $Y_1 = Y \cap X_1$. Par définition de $D(Y)$, Y_1 est maigre en tout point de X_1, donc Y_1 est maigre dans X_1, en conséquence maigre dans X.

<u>Prouvons</u> (ζ) : Il est clair que tout ouvert inclus dans $O(Y)$ rencontre Y suivant un ensemble non maigre. Soit Π un ouvert jouissant de cette propriété. Si $x \in \Pi$, tout voisinage de x rencontre Y suivant un ensemble non maigre, donc $\Pi \subset D(Y)$, donc $\Pi \subset O(Y)$.

<u>Prouvons</u> (η) : Soit Π un ouvert inclus dans Y. L'ensemble $\Pi \cap Y$ est non maigre, donc $\Pi \cap Y_n$ est non maigre pour un n, donc $\Pi \cap O(Y_n)$ est non maigre en application de (δ) à l'espace Π et à son sous-espace $\Pi \cap Y_n$, donc $\bigcup_n O(Y_n)$ est un ouvert dense de $O(Y)$, ce qui montre que $O(Y) - \bigcup_n O(Y_n)$ est maigre.

2. Les espaces K-sousliniens.

A. <u>Espaces polonais.</u> - Rappelons que, selon N. BOURBAKI, on dit qu'un espace P est polonais, s'il est homéomorphe à un espace métrique complet de type dénombrable (séparable). Cette catégorie a les propriétés de stabilité suivantes :

(a) Tout sous-espace fermé d'un espace polonais est un espace polonais ;

(b) Le produit d'une famille dénombrable d'espaces polonais est un espace polonais ;

(c) La somme d'une famille dénombrable d'espaces polonais est un espace polonais;

(d) Tout sous-espace ouvert d'un espace polonais est un espace polonais.

Soit $\underset{\sim}{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels muni de sa topologie discrète. C'est un espace polonais, donc $\underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$ est aussi un espace polonais. On a la propriété:

(e) Tout espace polonais est image continue de $\underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$. Les résultats (a) à (d) sont dans le texte de l'ouvrage de BOURBAKI [3], le résultat (e) s'y trouve en exercice (§ 6, exercice 6, p. 143). Néanmoins, je ne le démontre pas, puisque ce n'est pas un résultat relatif à la catégorie.

B. <u>Espaces sousliniens.</u> - On appelle espace souslinien [8], [13], [3], un espace topologique X image continue d'un espace polonais. On peut encore dire que X <u>est image continue de</u> $\underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$. Un sous-espace Y de X est dit souslinien, s'il est un espace souslinien.

Des propriétés (a), (b), (c), (d) résultent alors les propriétés de stabilité suivantes :

(o^1) L'image continue d'un espace souslinien est un espace souslinien ;
(a^1) Un sous-espace fermé d'un espace souslinien est souslinien ;
(b^1) Le produit d'une famille dénombrable d'espaces sousliniens est souslinien ;
(c^1) La somme d'une famille dénombrable d'espaces sousliniens est souslinien ;
(d^1) Tout sous-espace ouvert d'un espace souslinien est souslinien.

Il résulte de la conjonction de tout ceci que, si l'on désigne par ensemble borélien d'un espace X un élément de la plus petite tribu d'ensembles stables par réunion dénombrable et par passage au complémentaire, contenant les fermés, que tout borélien d'un espace souslinien est souslinien.

Remarque. - Le résultat de l'opération A sur une famille d'espaces sousliniens donne un espace souslinien (cf. [7]).

C. Espaces K-sousliniens. - Notre définition est adaptée de celle de Z. FROLIK [5], et de C. A. ROGERS [12]. Soient U et V deux espaces topologiques, et Φ une application de U à valeurs dans $K(V)$, l'ensemble des compacts de V. Nous dirons que Φ est semi-continue si, pour tout $a \in U$, et tout $\mathcal{V}$ ouvert contenant $\Phi(u)$, il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de u tel que $w \in \mathcal{W}$ entraîne $\Phi(w) \subset \mathcal{V}$.

Un espace X est dit K-souslinien, s'il existe un espace polonais P, une application Φ de P dans $K(X)$ semi-continue, tels que

$$X = \bigcup_{p \in P} \Phi(p) \quad .$$

On vérifie aisément que les espaces K-analytiques de CHOQUET [4] sont K-sousliniens, et C. A. ROGERS [12] montre que, si X est complètement régulier (c'est justement le cas qui nous intéresse dans la suite), cette notion équivaut à celle de CHOQUET.

La catégorie des espaces K-sousliniens jouit des propriétés suivantes :

(o^2) L'image continue d'un espace K-souslinien est un espace K-souslinien ;
(a^2) Un sous-espace fermé d'un espace K-souslinien est K-souslinien ;
(b^2) Le produit d'une famille dénombrable d'espaces K-sousliniens est K-souslinien ;
(c^2) La somme d'une famille dénombrable d'espaces K-sousliniens est un espace K-souslinien.

Mais le (d^2), analogue au (d^1), n'est pas vrai en général car, si X est K-souslinien et si Y est ouvert dans X pour $F \in K(X)$, $F \cap Y \notin K(Y)$ en général. Pour avoir un exemple, on prendra pour Y un espace discret non dénombrable, et pour X le compactifié de Y . L'espace X est K-souslinien, mais son ouvert Y ne l'est pas.

Désignons par ensemble F-borélien de X , tout élément de la plus petite tribu stable par réunion dénombrable, intersection dénombrable et contenant les fermés de X .

Alors il résulte des propriétés (0^2), (a^2), (b^2), (c^2) que, si X est K-souslinien, tout sous-ensemble F-borélien de X est K-souslinien.

Remarque. - Plus généralement, on peut prouver que le résultat de l'opération $\mathfrak{a}$ appliquée aux fermés de X donne un ensemble K-souslinien.

Notons que tout espace souslinien est K-souslinien.

On a le résultat suivant, qui généralise un théorème classique de O. NIKODYM [10] (cf. la remarque suivant notre démonstration).

THÉORÈME 2. - Soit Y K-souslinien dans X , alors Y diffère de $D(Y)$ (donc de $O(Y)$) par un ensemble maigre.

Démonstration. - Puisque Y est K-souslinien, il existe une application Φ de $\underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$ dans $K(X)$, semi-continue, telle que

$$Y = \bigcup_{i \in \underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}} \Phi(i) \quad .$$

Si $i \in \underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$, $i = (i_0 , \ldots , i_n , \ldots)$, nous noterons par $i_{(N)}$ la suite $(i_0 , \ldots , i_N)$.

On pose

$$B_{i_{(N)}} = \bigcup_{j} \Phi(j) , \qquad j_{(N)} = i_{(N)} \quad .$$

Je dis qu'on a

$$\Phi(i) = \bigcap_{N} \overline{B_{i_{(N)}}} \quad .$$

En effet, pour tout ouvert $\mathcal{V}$ contenant $\Phi(i)$, il existe un N tel que $j_{(N)} = i_{(N)}$ entraîne $\Phi(j) \subset \mathcal{V}$, donc

$$\bigcup_{j} \Phi(j) \subset \mathcal{V} , \qquad j_{(N)} = i_{(N)} \quad .$$

Et comme notre espace est séparé, que $\Phi(i)$ est compact, on a

$$\bigcap_{\mathcal{V} \supset \Phi(i)} \overline{\mathcal{V}} = \Phi(i) \quad .$$

Nous considérons l'ensemble

$$Z = D(Y) - (\bigcup_i D(B_{i_{(1)}})) - (\bigcup_j D(B_{j_{(2)}})) - (\bigcup_k D(B_{k_{(3)}})) \dots .$$

Cet ensemble est maigre. Pour le voir, on remarque que, quels que soient

$$(i_0 , \dots , i_k) ,$$

$$D(B_{(i_0,\dots,i_k)}) - \bigcup_{i_{k+1}\in \underset{\sim}{N}} D(B_{(i_0,\dots,i_k,i_{k+1})})$$

est maigre en vertu de la propriété (η), démontrée au § 1, puisque

$$B_{(i_0,\dots,i_k)} = \bigcup_{i_{k+1}\in \underset{\sim}{N}} B_{(i_0,\dots,i_k,i_{k+1})} .$$

Si un point y de $D(Y)$ n'appartient pas à Z , c'est qu'il existe $(i_0 , \dots , i_k)$ tels que $y \in D(B_{(i_0,\dots,i_k)})$, puis i_{k+1} tel que $y \in D(B_{(i_0,\dots,i_{k+1})})$, etc.

Soit i la suite ainsi définie. On a

$$y \in \bigcap_N D(B_{i_{(N)}}) ,$$

donc, puisque $D(B_{i_{(N)}}) \subset \overline{B_{i_{(N)}}}$, on a

$$y \in \bigcap_N \overline{B_{i_{(N)}}} ,$$

d'où $y \in \Phi(i)$.

En conséquence, $(D(Y) - Z) \subset Y \cap D(Y)$. Et comme on a vu au § 1 que $Y - D(Y) \cap Y$ est maigre, le résultat est démontré.

Dans la suite, on dira qu'un ensemble satisfaisant aux conclusions du théorème 2 jouit de la <u>propriété de Baire</u>.

<u>Remarque</u>. - Posons

$$C_{i_{(N)}} = \overline{B_{i_{(N)}}} .$$

Alors il résulte de ce que nous avons dit plus haut que Y est le résultat de l'opération $\mathfrak{A}$ sur le système des $C_{i_{(N)}}$. Donc Y jouit de la propriété de Baire, puisque tout fermé de X jouit de la propriété de Baire, en vertu de l'invariance de la propriété de Baire relativement à l'opération $\mathfrak{A}$ (cf. KURATOWSKI [7] pour l'étude de l'opération $\mathfrak{A}$ et l'invariance de la propriété de Baire relativement à cette opération).

3. La somme de deux ensembles satisfaisant à la condition de Baire.

On a la propriété suivante bien connue (cf. par exemple BOURBAKI [3], exercice 27, p. 119).

PROPOSITION 1. - Soient G un groupe topologique, A une partie de G non maigre qui satisfait à la propriété de Baire. Alors G est un espace de Baire, et $A.A^{-1}$ est un voisinage de l'élément neutre.

Démonstration. - L'ouvert $O(A)$ est non maigre, et tel que tout ouvert inclus rencontre A suivant un ensemble non maigre, donc est non maigre. Alors, si V est un voisinage ouvert arbitraire de l'élément neutre de G et si $y \in O(A)$, $V.y \cap O(A)$ est non maigre, donc aussi V. En conséquence, tout ouvert de G est non maigre, ce qui démontre la première partie de la proposition.

Soit $y_0 \in O(A) \cap A$;

$$O(A.y_0^{-1}) = O(A).y_0^{-1} \ .$$

Si $z \in O(A).y_0^{-1}$, $z.O(A).y_0^{-1} \cap O(A).y_0^{-1}$ est non maigre. Mais $z.O(A).y_0^{-1}$ diffère de $z.A.y_0^{-1}$ par un ensemble maigre, et de même pour $O(A).y_0^{-1}$, donc

$$z.A.y_0^{-1} \cap A.y_0^{-1} \neq \emptyset \ .$$

C'est-à-dire qu'il existe $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ tels que

$$z.x_1.y_0^{-1} = x_2.y_0^{-1} \ ,$$

d'où $z = x_2.x_1^{-1}$. Ceci montre que $O(A).y_0^{-1} \subset A.A^{-1}$.

C. Q. F. D.

4. Application à des théorèmes du type du graphe fermé.

Dans la suite, nous considérons les catégories suivantes :

- La catégorie [GT] des groupes topologiques, avec comme morphismes les homomorphismes algébriques et continus ;
- La catégorie [EVTk] des espaces vectoriels topologiques sur un corps topologique k, avec comme morphismes les applications linéaires continues ;
- La catégorie [EVTNk] des espaces vectoriels topologiques sur un corps topologique k, dont la topologie peut être définie par une famille de semi-normes (ce qui impose des conditions à k). Un élément de cette dernière catégorie sera dit abusivement espace localement convexe.

Nous dirons qu'un groupe G est de <u>type</u> $K.\beta$, s'il est limite inductive dans [GT] de groupes K-sousliniens et de Baire, c'est-à-dire que si G_α est la famille de définition, u_α le morphisme de G_α dans G , une application u de G dans F , autre groupe topologique, est un morphisme si, et seulement si, $u \circ u_\alpha$ est un morphisme pour tout α .

Nous dirons que G est de <u>type</u> β , si les G_α sont <u>sousliniens</u> et de Baire.

Nous dirons qu'un espace vectoriel topologique E est K-ultrabornologique, s'il existe une topologie de type $K.\beta$ sur E , et si la topologie de E est la plus fine des topologies du type [EVTNk] moins fines que cette topologie. Une limite inductive dans [EVTNk] d'espaces E_α K-sousliniens et de Baire est, en particulier, K-ultrabornologique.

L'espace E est <u>ultrabornologique</u>, si chacun des E_α est <u>souslinien</u>.

Pour travailler sur un corps quelconque ou dans le cas de [GT] , j'ai besoin d'une information supplémentaire sur les espaces K-sousliniens, information inutile dans le cas de [EVTk] si k est valué non discret.

On dit qu'un espace X est un <u>espace de Lindelöf</u>, si de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable. Un espace polonais est un espace de Lindelöf.

PROPOSITION 2. - <u>Tout espace K-souslinien X est un espace de Lindelöf</u> [12].

<u>Démonstration</u>. - L'espace X est défini par $\Phi : P \to K(X)$, P étant un espace polonais convenable. Soit ω_α , $\alpha \in A$, un recouvrement <u>quelconque</u> de X . Pour chaque $p \in P$, $\Phi(p)$ est compact. Donc, il existe une partie finie $F(p)$ de A telle que $\Phi(p) \subset \Omega_p$, où

$$\Omega_p = \bigcup_{\alpha \in F(p)} \omega_\alpha \quad .$$

Il existe un voisinage $\mathcal{V}(p)$ de p dans P , tel que

$$q \in \mathcal{V}(p) \quad \text{entraîne} \quad \Phi(q) \subset \Omega_p \quad .$$

Du recouvrement de P par les $\mathcal{V}(p)$ on extraira un recouvrement dénombrable $\mathcal{V}(p_1)$, ... , $\mathcal{V}(p_n)$, ... , et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F(p_n)$ est une partie dénombrable de A qui répond à la question.

C. Q. F. D.

On peut alors étendre un théorème de Banach [1] (page 230).

THÉORÈME 3. - Soient G_1 et G_2 deux groupes topologiques G_1 de type K.β , G_2 K-souslinien.

(a) Si u est un homomorphisme algébrique de G_1 dans G_2, de graphe F-borélien, alors u est continu ;

(b) Soit v un homomorphisme algébrique continu de G_2 sur G_1, alors v est un homomorphisme topologique.

Démonstration.

Preuve de (a) : Soit V un voisinage de l'élément neutre de G_2. On peut supposer V fermé, et $V = V^{-1}$.

Nos hypothèses entraînent que, si G_α , $\alpha \in A$, est une famille de définition de G_1 , pour tout α , $(u \circ u_\alpha)^{-1}(V)$ est K-souslinien dans G_α. En effet, l'application u_α étant continue, l'image par $(u_\alpha$, identité$)^{-1}$ d'un fermé de $G_1 \times G_2$ dans $(G_\alpha \times G_2)$ est fermée, donc l'image d'un F-borélien est un F-borélien dans $G_\alpha \times G_2$ (ne pas oublier que les opérations d'intersection et de réunion commutent aux images réciproques).

En conséquence, le graphe Γ_α de $u \circ u_\alpha$ dans $G_\alpha \times G_2$ est F-borélien. Soit $Y = (u \circ u_\alpha)^{-1}(V)$. Cet ensemble est la projection sur G_α de $X = (E_\alpha \times V) \cap \Gamma_\alpha$. Par hypothèse, G_α est K-souslinien, donc $G_\alpha \times G_2$ aussi, donc aussi le sous-ensemble F-borélien X de $G_\alpha \times G_2$, donc aussi, enfin, la projection Y de X sur G_α.

Maintenant, soit W symétrique $(W = W^{-1})$ fermé tel que $W.W \subset V$.

L'image Z_α de G_α dans G_2 par $u \circ u_\alpha$ est la projection sur G_2 de Γ_α, donc est un ensemble K-souslinien. Donc Z_α est un espace de Lindelöf. Les ensembles $g.(\mathring{W} \cap Z_\alpha)$, g parcourant Z_α , forment un recouvrement ouvert de Z_α. Donc on peut en extraire un sous-recouvrement dénombrable, soit

$$(g_n.(\mathring{W} \cap Z_\alpha))_{n=1,2,\ldots} .$$

Si $T_n = (u \circ u_\alpha)^{-1}(g_n.(W \cap Z_\alpha))$,

$$\bigcup_n T_n = G_\alpha ,$$

donc l'un des T_n est non maigre. Mais ils sont tous égaux, donc

$$T = (u \circ u_\alpha)^{-1}(W)$$

est non maigre souslinien. $T.T^{-1}$ est donc un voisinage de l'élément neutre, et Y aussi.

C. Q. F. D.

Preuve de (b) : Soit N le noyau de v . L'application v^{-1} de G_1 dans G_2/N a un graphe fermé. L'espace G_2/N est K-souslinien comme quotient d'un K-souslinien, donc v est continue.

C. Q. F. D.

En exemple des hypothèses, le théorème s'applique à G_1 localement compact, G_2 localement compact et dénombrable à l'infini. Pour voir que G_1 est dans la classe $K.\beta$, on remarquera que le sous-groupe N_W , engendré par un voisinage compact W de l'élément neutre de G_1 , est dénombrable à l'infini, et ouvert, et fermé. Alors G_1/N_W est un espace discret.

Si F est une partie finie de G_1/N_W , le sous-groupe engendré par N_W et des représentants de F dans G_1 est un sous-groupe G_F de G_1 , localement compact et dénombrable à l'infini. On a alors

$$G_1 = \varinjlim_F G_F \quad .$$

On remarquera en outre que, dans ce cas, les hypothèses sont les meilleures possibles.

THÉORÈME 4 (variante). - G_1 est de type β , G_2 souslinien ; alors, si $u : G_1 \to G_2$ a un graphe borélien, u est continue.

Démonstration. - Comme précédemment, on voit que Γ_α est borélien dans $G_\alpha \times G_2$, mais nos espaces sont sousliniens, donc Γ_α est souslinien. On achève comme dans le théorème 3.

Le théorème 3 s'applique en particulier de façon non triviale au cas des espaces vectoriels topologiques sur tout corps valué complet de type dénombrable, en particulier au cas où le corps est localement compact.

THÉORÈME 5 (graphe borélien de SCHWARTZ [13]). - E_1 et E_2 sont deux espaces localement convexes sur k , E_1 est ultrabornologique, E_2 est souslinien, alors:

(a) Si u est linéaire de E_1 dans E_2 et de graphe borélien, elle est continue ;

(b) Si v est linéaire surjective de E_2 sur E_1 , c'est un homomorphisme.

Démonstration. - Je tiens à souligner que cet énoncé est responsable de tout ce travail.

Vu la définition de la topologie de E_1 , il suffit de vérifier que u est continue de E_1 muni de sa topologie β dans E_2 , et cela résulte du théorème 4. Le point (b) résulte de (a), comme dans le théorème 3, car le quotient de E_2 par le noyau N de v est un élément de la catégorie [EVTNk] .

C. Q. F. D.

On remarquera que ce théorème, lorsqu'il n'est pas vide, impose des conditions à k .

Maintenant, nous supposons que $k = \underset{\sim}{R}$ ou $k = \underset{\sim}{C}$. Dans un vrai espace vectoriel topologique, localement convexe, H , nous disons qu'un ensemble X est C-borélien, s'il appartient à la plus petite tribu d'ensembles stables par réunion dénombrable, intersection dénombrable, engendrée par les convexes fermés. Par exemple, si H est un espace de Banach séparable, on a

$$\text{boréliens} = \text{F-boréliens} = \text{C-boréliens} \quad .$$

Pour vérifier cela, il me suffit de confronter les deux extrêmes, or tout ouvert est réunion dénombrable de boules fermées.

Soit $H_1 \times H_2$ un produit de deux espaces localement convexes sur $k = \underset{\sim}{R}$ ou $k = \underset{\sim}{C}$. Notons par $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ les topologies de H_1 et de H_2 . Les C-boréliens pour $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ sont aussi les C-boréliens pour $\mathcal{T}_1 \times \sigma(H_2 , H_2')$, car toute forme linéaire continue sur $H_1 \times H_2$ pour $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ est continue sur $H_1 \times H_2$ pour $\mathcal{T}_1 \times \sigma(H_2 , H_2')$.

Si u_3 est une application linéaire continue de H_3 dans H_1 , où H_3 est un troisième espace localement convexe, l'image réciproque d'un ensemble C-borélien de $H_1 \times H_2$ par $(u_3 , \text{identité})^{-1}$ dans $H_3 \times H_2$ est clairement C-borélienne dans $H_3 \times H_2$, donc C-borélienne pour $(\mathcal{T}_3 , \sigma(H_2 , H_2'))$.

THÉORÈME 6. - E_1 <u>et</u> E_2 <u>sont définis sur</u> $k = \underset{\sim}{R}$ <u>ou</u> $k = \underset{\sim}{C}$ <u>localement convexes</u> : E_1 <u>est</u> K-<u>ultrabornologique, et</u> E_2 <u>est</u> K-<u>souslinien pour sa topologie affaiblie ; alors</u> :

(a) <u>Si</u> u <u>est linéaire de</u> E_1 <u>dans</u> E_2 <u>et de graphe</u> C-<u>borélien,</u> u <u>est continue</u> ;

(b) <u>Toute application linéaire continue</u> v <u>surjective de</u> E_2 <u>sur</u> E_1 <u>est un homomorphisme</u>.

<u>Démonstration</u>. - Elle est complètement analogue. On peut prendre V convexe fermé. Le graphe Γ_α est C-borélien dans chaque $E_\alpha \times E_2$, donc $(E_\alpha \times V) \cap \Gamma_\alpha$ est C-borélien dans $E_\alpha \times E_2$, donc C-borélien dans $E_\alpha \times E_2$ pour la topologie $(\mathcal{T}_\alpha , \sigma(E_2 , E_2'))$, donc F-borélien pour cette topologie, en conséquence K-souslinien, donc $(u \circ u_\alpha)^{-1} (V)$ est K-souslinien convexe, et on achève comme précédemment.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BANACH (S.). - Théorie des opérations linéaires. - Warszawa, Polskie Towarzystwo Matematyczne, 1932 (Monografie matematyczne, 1).

[2] BOURBAKI (N.). - Topologie générale. Chap. 3 : Groupes topologiques ; Chap. 4: Nombres réels, 3e éd. - Paris, Hermann, 1960 (Act. scient. et ind., 1143 ; Bourbaki, 3).

[3] BOURBAKI (N.). - Topologie générale. Chap. 9 : Utilisation des nombres réels en topologie générale. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1045 ; Bourbaki, 8).

[4] CHOQUET (G.). - Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 5, 1953, p. 131-295.

[5] FROLIK (Z.). - On the descriptive theory of sets, Czech. math. J., t. 13, 1953, p. 335-359.

[6] GROTHENDIECK (A.). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Memoirs of the American mathematical Society, 16).

[7] KURATOWSKI (C.). - Topologie. Vol. 1, 3e éd. - Warszawa, Polskie Towarzystwo Matematyczne, 1952 (Monografie matematyczne, 20).

[8] LUSIN (N.). - Leçons sur les ensembles analytiques. - Paris, Gauthier-Villars, 1930 (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions).

[9] MARTINEAU (A.). - Sur le théorème du graphe fermé, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, 1966, Série A, p. 870-871.

[10] NIKODYM (O.). - Sur une propriété de l'opération A, Fund. Math., Warszawa, t. 7, 1925, p. 149-154.

[11] RAIKOV (D. A.). - Dvustoronnjaja teorema o zamknutom grafike dlja topologičeskikh linejnykh prostranstv, Sibirsk. Mat. Z., t. 7, 1966, p. 353-372.

[12] ROGERS (C. A.). - Analytic sets in Hausdorff spaces, Mathematika, London, t. 11, 1964, p. 1-8.

[13] SCHWARTZ (L.). - Sur le théorème du graphe fermé, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, 1966, Série A, p. 602-603.