Charles Goulaouic

Interpolation entre espaces vectoriels topologiques

Séminaire Lelong. Analyse, tome 7 (1966-1967), exp. n° 4, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1966-1967__7__A4_0>

Séminaire LELONG (Analyse)
7e année, 1966/67, n° 4
15 et 22 mars 1967

INTERPOLATION ENTRE ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

par Charles GOULAOUIC

Il s'agit d'obtenir des résultats d'interpolation pour des espaces vectoriels topologiques "assez généraux" en "prolongeant" des procédés d'interpolation explicités, par exemple, dans le cadre des espaces de Banach. On donne d'abord les définitions nécessaires.

1. Définitions.

DÉFINITION 1. - Un couple compatible $(E_0 , E_1 , E , i_0 , i_1)$ d'espaces vectoriels topologiques est constitué par :

(a) Trois espaces vectoriels topologiques : E_0 , E_1 , E que l'on supposera toujours localement convexes séparés ;

(b) Deux injections : i_0 de E dans E_0 , et i_1 de E dans E_1 , telles que:

- La topologie de E est la topologie la moins fine rendant i_0 et i_1 continues,
- $Z = \{(i_0(\alpha) , - i_1(\alpha)) \; ; \; \alpha \in E\}$ est un sous-espace fermé de $E_0 \times E_1$.

E est noté en général $E_0 \cap E_1$, et le couple compatible est noté (E_0 , E_1) , lorsqu'aucune confusion n'est possible.

On vérifie que l'on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & E_0 \arrow[dr, "j_0"] & \\ E_0 \cap E_1 \arrow[ur, hook, "i_0"] \arrow[dr, hook, "i_1"'] & & E_0 + E_1 = \dfrac{E_0 \times E_1}{Z} \\ & E_1 \arrow[ur, hook, "j_1"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{(avec la topologie quotient) ,}$$

où $\hookrightarrow$ signifie : injection continue ; j_0 et j_1 étant définies par

$$\begin{cases} j_0(x_0) = \overline{(x_0 , 0)} & \text{(classe de } (x_0 , 0)\text{) .} \\ j_1(x_1) = \overline{(0 , x_1)} & . \end{cases}$$

On identifie E_0 , E_1 , $E_0 \cap E_1$ avec leurs images dans $E_0 + E_1$, et on considère les restrictions à E_0 et E_1 d'un opérateur dans $E_0 + E_1$; d'où la définition suivante.

DÉFINITION 2. - <u>Soient</u> (E_0 , E_1) <u>et</u> (F_0 , F_1) <u>deux couples compatibles d'espaces vectoriels topologiques</u>. L'ensemble des morphismes de (E_0 , E_1) dans (F_0 , F_1) , <u>noté</u> $\mathrm{Hom}((E_0 , E_1) , (F_0 , F_1))$, <u>est l'ensemble des applications linéaires de</u> $E_0 + E_1$ <u>dans</u> $F_0 + F_1$, <u>dont les restrictions à</u> E_0 <u>et</u> E_1 <u>sont continues respectivement de</u> E_0 <u>dans</u> F_0 <u>et de</u> E_1 <u>dans</u> F_1 .

On a donc la notion de <u>catégorie de couples compatibles</u> d'espaces vectoriels topologiques, les vérifications étant immédiates. On a de même les catégories de couples compatibles d'espaces banachisables (resp. de Fréchet ...), dont les objets sont les couples compatibles (E_0 , E_1) , où E_0 et E_1 sont des espaces banachisables (resp. de Fréchet ...).

<u>Remarque</u> (<u>cas des espaces normés</u>). - Lorsque (E_0 , E_1) est un couple compatible d'espaces normés, on prend comme normes sur $E_0 \cap E_1$ et $E_0 + E_1$:

$$\|a\|_{E_0\cap E_1} = \|a\|_{E_0} + \|a\|_{E_1} \qquad \text{et} \qquad \|a\|_{E_0+E_1} = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{E_0} + \|a_1\|_{E_1}) \ .$$

(E_0 , E_1) et (F_0 , F_1) étant deux couples compatibles d'espaces normés, on appelle $\mathrm{Hom}((E_0 , E_1) , (F_0 , F_1))$ l'ensemble des applications linéaires de $E_0 + E_1$ dans $F_0 + F_1$, dont la restriction à E_0 (resp. E_1) est continue et de norme $\leqslant 1$, de E_0 dans F_0 (resp. E_1 dans F_1). On a ainsi la notion de catégorie de couples compatibles d'espaces de Banach, notée $\underset{\sim}{C}(B)$.

On peut maintenant définir un foncteur d'interpolation :

DÉFINITION 3. - <u>Soit</u> $\underset{\sim}{C}'$ <u>la catégorie dont les objets sont les espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés, et les morphismes les applications linéaires continues</u>.

$\underset{\sim}{C}$ <u>étant une catégorie de couples compatibles, on appelle</u> foncteur d'interpolation défini sur $\underset{\sim}{C}$, <u>un foncteur covariant</u> $\Phi[\ ]$ <u>de</u> $\underset{\sim}{C}$ <u>dans</u> $\underset{\sim}{C}'$ <u>tel que</u> :

1° <u>Si</u> (E_0 , E_1) <u>est un objet de</u> $\underset{\sim}{C}$,

$$E_0 \cap E_1 \subset \Phi(E_0 , E_1) \subset E_0 + E_1 \quad ;$$

2° <u>Quels que soient</u> (E_0 , E_1) <u>et</u> (F_0 , F_1) , <u>objets de</u> $\underset{\sim}{C}$, <u>et</u>

$$u \in \mathrm{Hom}((E_0 , E_1) , (F_0 , F_1)) \quad ,$$

$$\Phi[u] = u_{|\Phi(E_0,E_1)} \qquad (\underline{\text{restriction de}}\ u\ \underline{\text{à}}\ \Phi(E_0 , E_1)) \ .$$

Il en résulte que, pour décrire un foncteur d'interpolation, il suffit de se donner la correspondance sur les objets. Par exemple,

$$(E_0 , E_1) \longmapsto E_0 \cap E_1 \quad \text{et} \quad (E_0 , E_1) \longmapsto E_0 + E_1$$

définissent des foncteurs d'interpolation (les vérifications sont immédiates).

On connait des foncteurs d'interpolation moins triviaux, définis en général sur des catégories de couples compatibles d'espaces de Banach. A titre d'exemple (et d'outil pour la suite), on va considérer une méthode de construction de foncteurs d'interpolation.

2. Méthode réelle (normes fonctionnelles).

(A). - Soit (E_0 , E_1) un couple compatible d'espaces normés. Soient

$$a \in E_0 + E_1 \quad \text{et} \quad t \in \,]0 , \infty[\;;$$

on pose

$$K(t , a) = K(t , a , E_0 , E_1) = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{E_0} + t\|a_1\|_{E_1}) \; .$$

On démontre immédiatement les propositions suivantes :

PROPOSITION 1. - *Pour tout* a *de* $E_0 + E_1$, *la fonction* $t \to K(t , a)$ *est croissante et continue sur* $]0 , \infty[$; *la fonction* $t \to t^{-1} K(t , a)$ *est décroissante*.

$$\forall t , \ \forall s \in \,]0 , \infty[, \qquad K(t , a) \leq \max(1 , \frac{t}{s}) K(s , a) \; .$$

PROPOSITION 2. - *Pour tout* t *de* $]0 , \infty[$, *la fonction* $a \to K(t , a)$ *est une norme sur* $E_0 + E_1$.

Remarque. - Il sera parfois plus agréable d'utiliser

$$K_p(t , a) = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|^p_{E_0} + t^p\|a_1\|^p_{E_1})^{1/p} , \qquad 1 \leq p < \infty \; .$$

On a

$$K_p(t , a) \leq K(t , a) \leq 2^{1-1/p} K_p(t , a) \; .$$

(B) *Norme fonctionnelle*. - Soit $\underset{\sim}{C}(]0 , \infty[, \underset{\sim}{R}_+)$ l'espace des fonctions continues de $]0 , \infty[$ dans $\underset{\sim}{R}_+ = \{x \in \underset{\sim}{R} \; ; \; x \geq 0\}$.

DÉFINITION 4. - <u>On appelle</u> norme fonctionnelle, <u>une application</u>

$$\Phi : \varphi \to \Phi(\varphi)$$

<u>de</u> $\underset{\sim}{C}(]0\ ,\infty[\ ,\underset{\sim}{R}_+)$ <u>dans</u> $\overline{\underset{\sim}{R}_+} = \{x \in \overline{\underset{\sim}{R}}\ ;\ x \geqslant 0\}$, <u>vérifiant</u> :

(N_1) $\Phi(\lambda\varphi) = \lambda\Phi(\varphi)$, $\forall\ \lambda \in \underset{\sim}{R}_+$;

(N_2) $\Phi(\varphi) = 0 \implies \varphi(t) = 0$, pour une valeur au moins de t dans $]0\ ,\infty[$;

(N_3) $\Phi(\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu) \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi(\varphi_\nu)$, lorsque $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu \in \underset{\sim}{C}(]0\ ,\infty[\ ,\underset{\sim}{R}_+)$;

(N_4) $\varphi \leqslant \psi \implies \Phi(\varphi) \leqslant \Phi(\psi)$;

(N_5) $\Phi(\min(1\ ,t)) < \infty$.

Voici quelques exemples de normes fonctionnelles :

EXEMPLE 1 : Soit $a \in]0\ ,\infty[$;

$$\delta_a : \varphi \to \varphi(a)$$

est une norme fonctionnelle.

EXEMPLE 2 : Soient $1 \leqslant p < \infty$, et μ une mesure non nulle, positive sur $]0\ ,\infty[$, et vérifiant $\int_0^\infty \min(1\ ,t)\ d\mu < \infty$.

$$\Phi_{\mu,p} : \varphi \to (\int_0^\infty \varphi^p\ d\mu)^{1/p}$$

est une norme fonctionnelle.

Soit $(E_0\ ,E_1)$ un couple compatible d'espaces normés. Φ étant une norme fonctionnelle, on désigne par $\Phi(E_0\ ,E_1)$ l'ensemble

$$\{a \in E_0 + E_1\ ;\ \Phi(K(t\ ,a\ ,E_0\ ,E_1)) < \infty\} .$$

On a la proposition suivante.

PROPOSITION 3. - $\Phi(E_0\ ,E_1)$, <u>muni de la norme</u> $\|a\|_\Phi = \Phi(K(t\ ,a))$, <u>est un espace normé</u>,

$$E_0 \cap E_1 \hookrightarrow \Phi(E_0\ ,E_1) \hookrightarrow E_0 + E_1 .$$

<u>Lorsque</u> E_0 <u>et</u> E_1 <u>sont complets</u>, $\Phi(E_0\ ,E_1)$ <u>est aussi un espace de Banach</u>.

La seule difficulté est de montrer que $\Phi(E_0\ ,E_1)$ est complet lorsque $E_0\ ,E_1$ sont complets : d'abord $E_0 + E_1$ est complet, comme quotient de $E_0 \times E_1$ par un sous-espace fermé. Soit donc $(a_\nu)_{\nu\in\underset{\sim}{N}}$ une série absolument convergente dans $\Phi(E_0\ ,E_1)$; elle est a fortiori absolument convergente dans $E_0 + E_1$, donc convergente dans $E_0 + E_1$; soit

$$a = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \quad \text{dans} \quad E_0 + E_1 \quad .$$

Montrons que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} K(t\ ,\ a_\nu) \in \underset{\sim}{C}(]0\ ,\ \infty[\ ,\ \underset{\sim}{R}_+) \quad .$$

On sait déjà que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} K(1\ ,\ a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \|a_\nu\|_{E_0+E_1} < \infty \quad .$$

Pour $t \in [\alpha\ ,\ \beta]$, avec $0 < \alpha \leqslant 1 \leqslant \beta < \infty$, on a

$$K(\alpha\ ,\ a_\nu) \leqslant K(t\ ,\ a_\nu) \leqslant K(\beta\ ,\ a_\nu) \quad ,$$

soit

$$\alpha K(1\ ,\ a_\nu) \leqslant K(t\ ,\ a_\nu) \leqslant \beta K(1\ ,\ a_\nu) \quad ,$$

donc

$$\alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} K(1\ ,\ a_\nu) \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} K(t\ ,\ a_\nu) \leqslant \beta \sum_{\nu=0}^{\infty} K(1\ ,\ a_\nu) \quad .$$

Donc la série $(K(t\ ,\ a_\nu))_{\nu\in\underset{\sim}{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $]0\ ,\ \infty[$, donc sa somme est une fonction continue de t .

On peut alors écrire

$$\Phi(K(t\ ,\ a)) = \Phi(K(t\ ,\ \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu)) \leqslant \Phi(\sum_{\nu=0}^{\infty} K(t\ ,\ a_\nu)) \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi(K(t\ ,\ a_\nu)) < \infty \quad .$$

Donc

$$a \in \Phi[E_0\ ,\ E_1] \qquad \text{et} \qquad \|a\|_\Phi \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \|a_\nu\|_\Phi \quad ,$$

donc aussi

$$\|a - \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\|_\Phi \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \|a_\nu\|_\Phi \quad .$$

Ce qui montre aussi que

$$a = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \quad \text{dans} \quad \Phi[E_0\ ,\ E_1] \quad ,$$

et donc que cet espace est complet.

(C) Foncteur d'interpolation associé à une norme fonctionnelle. - On a le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Soit Φ une norme fonctionnelle ; il lui correspond un foncteur d'interpolation $\Phi[\ ]$, défini sur la catégorie des couples compatibles d'espaces de Banach par

$$(E_0\ ,\ E_1)\ \text{objet de}\ \underset{\sim}{C}(B) \longmapsto \Phi(E_0\ ,\ E_1)\ .$$

Démonstration. - Etant donnée la proposition 3, il suffit de vérifier que, si $u \in \mathrm{Hom}((E_0\ ,\ E_1)\ ,\ (F_0\ ,\ F_1))$, $(E_0\ ,\ E_1)$ et $(F_0\ ,\ F_1)$ objets de $\underset{\sim}{C}(B)$, la restriction de u à $\Phi(E_0\ ,\ E_1)$ envoie continuement $\Phi(E_0\ ,\ E_1)$ dans $\Phi(F_0\ ,\ F_1)$.

Soit

$$\begin{cases} w_0 = \|u\|_{E_0 \to F_0} \leqslant 1\ , \\ w_1 = \|u\|_{E_1 \to F_1} \leqslant 1\ . \end{cases}$$

$\forall\ t \in]0\ ,\ \infty[\ ,\ \forall\ a \in \Phi(E_0\ ,\ E_1)$, on a

$$\begin{aligned} K(t\ ,\ ua\ ,\ F_0\ ,\ F_1) &\leqslant \inf_{a=a_0+a_1} (\|ua_0\|_{F_0} + t\|ua_1\|_{F_1}) \\ &\leqslant \max(w_0\ ,\ w_1)\ K(t\ ,\ a\ ,\ E_0\ ,\ E_1)\ , \end{aligned}$$

d'où

$$\|ua\|_{\Phi(F_0,F_1)} \leqslant \max(w_0\ ,\ w_1)\ \|a\|_{\Phi(E_0,E_1)}\ .$$

(D) Remarques. - On peut évidemment de même associer à une norme fonctionnelle un foncteur d'interpolation défini sur une catégorie de couples compatibles d'espaces normés, ou sur la catégorie des couples compatibles d'espaces normables, car on peut vérifier que si, dans $(E_0\ ,\ E_1)$, on remplace les normes de E_0 et E_1 par des normes équivalentes, on obtient aussi pour $\Phi(E_0\ ,\ E_1)$ une nouvelle norme équivalente à la précédente.

3. Application à l'interpolation entre les espaces " L^p avec poids".

Soient X un espace localement compact, μ une mesure positive sur X, M une fonction mesurable sur X vérifiant $M(x) > 0$ presque partout, E un espace de Banach, $1 \leqslant p < \infty$ (on peut aussi, moyennant quelques modifications, considérer le cas $p = \infty$).

On note $L_M^p(X, \mu, E)$ l'espace des (classes de) fonctions a définies sur X à valeurs dans E, fortement μ-mesurables, et telles que $\|a\|_E^p M$ soit μ-intégrable. Lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre, on notera cet espace $L_M^p(E)$ ou L_M^p. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|a\|_{L_M^p} = \left(\int_X \|a(x)\|_E^p \, M(x) \, d\mu\right)^{1/p} .$$

M_0, M_1, R étant données (mesurables sur X, et > 0 p. p.), on se propose de chercher un foncteur d'interpolation défini sur $\underset{\sim}{C}(B)$, tel que $\Phi(L_{M_0}^p, L_{M_1}^p) = L_R^p$.

Posons

$$\begin{cases} E_0 = L_{M_0}^p = L_{M_0}^p(X, \mu, E) , \\ E_1 = L_{M_1}^p = L_{M_1}^p(X, \mu, E) . \end{cases}$$

D'après les hypothèses sur M_0 et M_1, on a

$$M_0 f = 0 \text{ p. p.} \iff M_1 f = 0 \text{ p. p.} \iff \min(M_0, M_1) f = 0 \text{ p. p.} .$$

Cela permet de plonger $L_{M_0}^p$ et $L_{M_1}^p$ dans $L_{\min(M_0,M_1)}^p$; alors

$$L_{M_0}^p \cap L_{M_1}^p = L_{\max(M_0,M_1)}^p ,$$

avec équivalence des normes. On définit ainsi le couple compatible (E_0, E_1) d'espaces de Banach.

On pose, pour $t \in]0, \infty[$ et $a \in E_0 + E_1$,

$$\begin{aligned} K_p(t, a) &= \inf_{a=a_0+a_1} \left(\|a_0\|_{E_0}^p + t^p \|a_1\|_{E_1}^p\right) \\ &= \inf_{a=a_0+a_1} \left(\int_X \left(\|a_0(x)\|_E^p \, M_0(x) + \|a_1(x)\|_E^p \, t^p \, M_1(x)\right) d\mu\right)^{1/p} . \end{aligned}$$

Soit

$$X_t = \{x \in X ; \; M_0(x) \leqslant t^p M_1(x)\}$$

(défini à un ensemble μ-négligeable près) ; posons

$$\tilde{a}_0(x) = \begin{cases} a(x) , & \text{si } x \in X_t , \\ 0 , & \text{si } x \notin X_t , \end{cases}$$

$$\tilde{a}_1(x) = \begin{cases} 0 , & \text{si } x \in X_t , \\ a(x) , & \text{si } x \notin X_t . \end{cases}$$

Les fonctions $\tilde{a}_0$ et $\tilde{a}_1$ sont mesurables, et on vérifie que :

1° $\tilde{a}_0 \in E_0$ et $\tilde{a}_1 \in E_1$ (on note de la même manière une fonction et sa classe dans $L^p_{\min(M_0,M_1)}$). $a = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1$.

2° $K_p(t\ ,\ a) \leqslant \tilde{K}_p(t\ ,\ a) \leqslant 2^{1-1/p}\, K_p(t\ ,\ a)$, où

$$\tilde{K}_p(t\ ,\ a) = (\|\tilde{a}_0\|^p_{E_0} + t^p\|\tilde{a}_1\|^p_{E_1})^{1/p} = \|a\|_{L^p_M} , \qquad \text{avec } M = \mathrm{Min}(M_0\ ,\ t^p\, M_1) \ .$$

Considérons une norme fonctionnelle $\Phi_{\gamma,p}$ (cf. exemple 2). On obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - Soit γ une mesure sur $]0\ ,\ \infty[$, non nulle, positive, et vérifiant

$$\int_0^\infty \min(1\ ,\ t^p)\ d\gamma < \infty \ .$$

Le foncteur d'interpolation $\Phi_{\gamma,p}[\ ]$, défini sur $\underset{\sim}{C}(B)$, vérifie

$$\Phi_{\gamma,p}(L^p_{M_0}\ ,\ L^p_{M_1}) = L^p_R \ ,$$

$$\|a\|_{\Phi_{\gamma,p}} \leqslant \|a\|_{L^p_R} \leqslant 2^{1-1/p}\|a\|_{\Phi_{\gamma,p}} \ ,$$

avec $R(x) = \int_0^\infty \min(M_0(x)\ ,\ t^p\, M_1(x))\ d\gamma$.

Explicitement : Si $(E_0\ ,\ E_1)$ est un objet de $\underset{\sim}{C}(B)$, l'espace

$$\Phi_{\gamma,p}(E_0\ ,\ E_1) = \{e \in E_0 + E_1\ ;\ \|e\|_{\Phi_{\gamma,p}} = (\int_0^\infty K^p_p(t\ ,\ e)\ d\gamma)^{1/p} < \infty\} \ .$$

Remarque. - Cette expression de R permet, sous certaines hypothèses, de construire effectivement γ , donc le foncteur $\Phi_{\gamma,p}[\ ]$, tel que

$$\Phi_{\gamma,p}(L^p_{M_0}\ ,\ L^p_{M_1}) = L^p_R \ .$$

(On sait, par exemple, trouver γ , tel que

$$\Phi_{\gamma,p}(L^p_{e^{|x|^{s_0}}}(X\ ,\ \mu\ ,\ E)\ ,\ L^p_{e^{|x|^{s_1}}}(X\ ,\ \mu\ ,\ E)) = L^p_{e^{|x|^{s}}}(X\ ,\ \mu\ ,\ E) \ ,$$

où $s_0\ ,\ s\ ,\ s_1$ sont données : $0 \leqslant s_0 < s < s_1 < \infty$, et X est un ouvert de $\underset{\sim}{R}$.)

4. Prolongements de foncteurs d'interpolation.

Supposons que $\Phi[\ ]$ est un foncteur d'interpolation défini sur une catégorie $\underset{\sim}{C}$, et que l'on considère des limites projectives ou des limites inductives dans $\underset{\sim}{C}$; en général, $\Phi[\ ]$ ne "commute" pas aux limites projectives ou inductives, et on a des contre-exemples, même dans des cas très simples.

En particularisant $\underset{\sim}{C}$ et $\Phi[\ ]$, on peut obtenir cependant des résultats dans cette direction.

(A) Limites projectives strictes.

DÉFINITION 5. - Un espace localement convexe séparé E est dit limite projective stricte d'une famille $(E_i)_{i\in I}$ d'espaces de Banach, si :

(1) $E = \bigcap_{i\in I} E_i$;

(2) E est muni de la topologie limite projective de celles des E_i ;

(3) $\forall\ i \in I$, E est dense dans E_i ;

(4) La famille $(E_i)_{i\in I}$ est filtrante décroissante.

On note

$$E = \varprojlim_{i\in I} E_i \quad .$$

De même, on introduit la définition suivante.

DÉFINITION 6. - Un couple compatible $(E_0\ ,\ E_1)$ d'espaces localement convexes séparés est dit limite projective stricte de la famille $(E_0^i\ ,\ E_1^j)_{(i,j)\in I\times J}$ de couples compatibles d'espaces de Banach, si :

(1) $E_0 = \varprojlim_{i\in I} E_0^i$, $E_1 = \varprojlim_{j\in J} E_1^j$;

(2) Les espaces E_0^i , E_1^j sont des sous-espaces d'un même espace $\mathcal{E}$;

(3) $\forall\ (i\ ,\ j) \in I \times J$, $E_0 \cap E_1$ est dense dans $E_0^i \cap E_1^j$.

On notera alors

$$(E_0\ ,\ E_1) = \varprojlim_{i,j} (E_0^i\ ,\ E_1^j) \quad .$$

Soient $\Phi[\ ]$ un foncteur d'interpolation défini sur $\underset{\sim}{C}(B)$, et

$$(E_0\ ,\ E_1) = \varprojlim_{i,j} (E_0^i\ ,\ E_1^j) \quad ;$$

posons $E^{ij} = \Phi(E_0^i , E_1^j)$. On définit

$$E = \varprojlim_{i,j} E^{ij}$$

comme l'ensemble $\bigcap_{i,j} E^{ij}$ muni de la topologie limite projective ; E est un espace localement convexe séparé.

Soient

$$(E_0 , E_1) = \varprojlim_{i,j} (E_0^i , E_1^j) \qquad \text{et} \qquad (F_0 , F_1) = \varprojlim_{k,\ell} (F_0^k , F_1^\ell) ,$$

$$u \in \mathrm{Hom}((E_0 , E_1) , (F_0 , F_1)) .$$

D'après la définition 6, $\forall (k , \ell)$, $\exists (i , j)$ tel que u se prolonge en

$$\begin{cases} u_0 : E_0^i \to F_0^k , \\ u_1 : E_1^j \to F_1^\ell ; \end{cases}$$

u_0 et u_1 coïncident sur $E_0 \cap E_1$, donc aussi sur $E_0^i \cap E_1^j$, d'où

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{Hom}((E_0^i , E_1^j) , (F_0^k , F_1^\ell)) &\Longrightarrow u \in \mathcal{L}(\Phi(E_0^i , E_1^j) , \Phi(F_0^k , F_1^\ell)) = \mathcal{L}(E^{ij} , F^{k\ell}) \\ &\Longrightarrow u \in \mathcal{L}(E , F^{k\ell}) \qquad \text{pour tout } (k , \ell) \\ &\Longrightarrow u \in \mathcal{L}(E , F) . \end{aligned}$$

Cela montre, en particulier, que E <u>ne dépend que de</u> (E_0 , E_1) , <u>et pas de la famille particulière</u> $(E_0^i , E_1^j)_{(i,j)\in I\times J}$ <u>choisie</u> ; on notera

$$E = \tilde{\Phi}(E_0 , E_1) ;$$

on remarque que, si (E_0 , E_1) est un couple compatible d'espaces de Banach,

$$\tilde{\Phi}(E_0 , E_1) = \Phi(E_0 , E_1) .$$

On a donc démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - <u>Soit $\underset{\sim}{C}$ une catégorie de couples compatibles, limites projectives strictes de couples compatibles d'espaces de Banach ; soit</u> $\Phi[\ ]$ <u>un foncteur d'interpolation défini sur</u> $\underset{\sim}{C}(B)$.

<u>On en déduit un foncteur d'interpolation</u> $\tilde{\Phi}[\ ]$, <u>défini sur $\underset{\sim}{C}$ par</u>

$$(E_0 , E_1) = \varprojlim_{i,j} (E_0^i , E_1^j) \longmapsto \tilde{\Phi}(E_0 , E_1) = \varprojlim_{i,j} \Phi(E_0^i , E_1^j) .$$

<u>La restriction de</u> $\tilde{\Phi}[\ ]$ <u>à</u> $\underset{\sim}{C}(B)$ <u>est</u> $\Phi[\ ]$.

<u>Remarque</u>. - Le théorème 3 reste évidemment valable si on y remplace "espace de Banach" par "espace banachisable".

(B) <u>Limites inductives</u>. - Rappelons que l'on appelle espace $(\mathcal{LF})$, tout espace localement convexe séparé E qui est limite inductive d'une <u>suite</u> $(E_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ d'espaces $(\mathcal{F})$ par des applications linéaires u_n, telles que les $u_n(E_n)$ engendrent E.

Nous supposerons que les E_n forment une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E, munies de topologies propres qui en font des espaces $(\mathcal{F})$, l'application identique de E_n dans E_{n+1} étant continue, et E étant la réunion des E_n. Une telle suite $(E_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ est appelée une <u>suite de définition</u> de l'espace $(\mathcal{LF})E$, et on note

$$E = \lim_{\overrightarrow{n}} E_n \quad .$$

On a immédiatement (cf. [3]) le lemme suivant.

LEMME 1. - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces</u> $(\mathcal{LF})$, (E_n) <u>et</u> (F_n) <u>des suites de définition de</u> E <u>et</u> F <u>respectivement. Pour qu'un opérateur linéaire</u> u <u>de</u> E <u>dans</u> F <u>soit continu, il faut et il suffit que, pour tout</u> n <u>de</u> $\underset{\sim}{N}$, <u>il existe</u> $p \in \underset{\sim}{N}$ <u>tel que la restriction de</u> u <u>à</u> E_n <u>soit continue de</u> E_n <u>dans</u> F_p.

On introduit la définition suivante.

DÉFINITION 7. - <u>Un couple compatible</u> (E_0, E_1) <u>d'espaces localement convexes séparés est dit de type</u> $(\mathcal{LF})$ <u>et admettant pour suite de définition</u>

$$(E_0^m, E_1^n)_{(m,n)\in\underset{\sim}{N}\times\underset{\sim}{N}} ,$$

<u>si</u> :

1° E_0 <u>et</u> E_1 <u>sont de type</u> $(\mathcal{LF})$ <u>et admettent pour suites de définition respectives</u> $(E_0^m)_{m\in\underset{\sim}{N}}$ <u>et</u> $(E_1^n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$;

2° $\forall\ (m, n) \in \underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}$, <u>la compatibilité du couple</u> (E_0^m, E_1^n) <u>est définie par le plongement de</u> E_0^m <u>et</u> E_1^n <u>dans</u> $E_0 + E_1$.

On note alors

$$(E_0, E_1) = \lim_{\overrightarrow{m,n}} (E_0^m, E_1^n) \quad .$$

Soit $\Phi[\ ]$ un foncteur d'interpolation défini sur la catégorie $\underset{\sim}{C}(\mathfrak{F})$ des couples compatibles d'espaces de Fréchet ; soit $(E_0\ ,\ E_1) = \varinjlim_{m,n} (E_0^m\ ,\ E_1^n)$. Posons

$$E^{mn} = \Phi(E_0^m\ ,\ E_1^n)\quad ;$$

on définit

$$E = \varinjlim_{m,n} E^{mn}$$

comme le sous-espace de $E_0 + E_1$ engendré par les E^{mn} , muni de la topologie limite inductive. E est un espace localement convexe.

Soient

$$(E_0\ ,\ E_1) = \varinjlim_{m,n} (E_0^m\ ,\ E_1^n) \qquad \text{et} \qquad (F_0\ ,\ F_1) = \varinjlim_{p,q} (F_0^p\ ,\ F_1^q)\quad ,$$

$$u \in \mathrm{Hom}((E_0\ ,\ E_1)\ ,\ (F_0\ ,\ F_1))\quad .$$

Par définition, u est une application linéaire de $E_0 + E_1$ dans $F_0 + F_1$, dont la restriction à E_0 (respectivement E_1) est continue de E_0 dans F_0 (resp. de E_1 dans F_1) ; donc, $\forall\ (m\ ,\ n) \in \underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}$, $\exists\ (p\ ,\ q) \in \underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}$ tel que u soit continue de E_0^m dans F_0^p et de E_1^n dans F_1^q .

De la compatibilité de $(E_0^m\ ,\ E_1^n)$ et $(F_0^p\ ,\ F_1^q)$, on déduit donc que

$$u \in \mathrm{Hom}((E_0^m\ ,\ E_1^n)\ ,\ (F_0^p\ ,\ F_1^q))\quad .$$

Donc

$$u \in \mathfrak{L}(\Phi(E_0^m\ ,\ E_1^n)\ ,\ \Phi(F_0^p\ ,\ F_1^q)) = \mathfrak{L}(E^{mn}\ ,\ F^{pq})\quad ,$$

donc

$$u \in \mathfrak{L}(E^{mn}\ ,\ \varinjlim_{p,q} F^{pq}) = \mathfrak{L}(E^{mn}\ ,\ F)\quad ,$$

et cela $\forall\ (m\ ,\ n) \in \underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}$, donc

$$u \in \mathfrak{L}(E\ ,\ F)\quad .$$

Cela montre, en particulier, que E ne dépend que de $(E_0\ ,\ E_1)$, et pas de la suite de définition choisie ; on notera

$$E = \tilde{\Phi}(E_0\ ,\ E_1)\quad .$$

On remarque que, si $(E_0\ ,\ E_1)$ est un couple compatible d'espaces de Fréchet, on a

$$\tilde{\Phi}(E_0\ ,\ E_1) = \Phi(E_0\ ,\ E_1)\quad .$$

On a donc démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - Soit $\underset{\sim}{C}$ une catégorie de couples compatibles de type $(\mathcal{L}\mathfrak{F})$; soit $\Phi[\ ]$ un foncteur d'interpolation défini sur $\underset{\sim}{C}(\mathfrak{F})$.

On en déduit un foncteur d'interpolation $\widetilde{\Phi}[\ ]$, défini sur $\underset{\sim}{C}$ par

$$(E_0\ ,\ E_1) = \varinjlim_{m,n} (E_0^m\ ,\ E_1^n) \longmapsto \widetilde{\Phi}(E_0\ ,\ E_1) = \varinjlim_{m,n} \Phi(E_0^m\ ,\ E_1^n)\ .$$

La restriction de $\widetilde{\Phi}[\ ]$ à $\underset{\sim}{C}(\mathfrak{F})$ est $\Phi[\ ]$.

On va montrer l'utilisation de ces théorèmes sur quelques exemples, sans entrer dans le détail des démonstrations.

5. Applications.

On commence par un cas très simple :

(A) Fonctions holomorphes dans des disques concentriques. - Soit E un espace de Banach. Notons $\mathcal{H}_R(E)$ l'espace des fonctions holomorphes dans le disque $|z| < R$ à valeurs dans E , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Soit p fixé dans $[1\ ,\ \infty[$; on peut définir la topologie de $\mathcal{H}_R(E)$ par les normes

$$\|a\|_r = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_E^p\ r^{np}\Big)^{1/p}\ , \qquad \forall\ a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ z^n \in \mathcal{H}_R(E)\ , \quad 0 < r < R\ .$$

Soient $(E_0\ ,\ E_1)$ un couple compatible d'espaces de Banach, avec $E_0 \cap E_1$ dense dans E_0 et E_1 , $0 < R_0 \leqslant R_1 < \infty$; $(\mathcal{H}_{R_0}(E_0)\ ,\ \mathcal{H}_{R_1}(E_1))$ est un couple compatible (par l'injection de $\mathcal{H}_{R_0}(E_0)$ et $\mathcal{H}_{R_1}(E_1)$ dans $\mathcal{H}_{R_0}(E_0 + E_1)$), et on montre que $(\mathcal{H}_{R_0}(E_0)\ ,\ \mathcal{H}_{R_1}(E_1))$ est isomorphe, dans $\underset{\sim}{C}(\mathfrak{F})$, à

$$\varprojlim_{t<1} (\ell^p_{tR_0}(E_0)\ ,\ \ell^p_{tR_1}(E_1))\ ,$$

où

$$\ell^p_\alpha(E) = \{a = (a_n) \in E^{\mathbb{N}}\ ;\ \|a\|_{\ell^p_\alpha} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_E^p\ \alpha^{np}\Big)^{1/p} < \infty\}\ .$$

On sait (cf. [2]) construire un foncteur $\Phi_\theta[\ ]$ tel que

$$\Phi_\theta(\ell^p_{tR_0}(E_0)\ ,\ \ell^p_{tR_1}(E_1)) = \ell^p_{tR}(E)\ , \qquad \text{avec } E = \Phi_\theta(E_0\ ,\ E_1) \quad \text{et} \quad R = R_0^{1-\theta}\ R_1^\theta\ ,$$

pour $0 < \theta < 1$.

Par application du théorème 3, on trouve le théorème suivant.

THÉORÈME 5. - Soient $(E_0\ ,\ E_1)$ un couple compatible d'espaces de Banach, $0 < \theta < 1$, $0 < R_0 \leqslant R_1 < \infty$; on a

$$\widetilde{\Phi}_\theta(\mathcal{H}_{R_0}(E_0)\ ,\ \mathcal{H}_{R_1}(E_1)) = \mathcal{H}_R(E)\ , \qquad \underline{\text{avec}}\ E = \Phi_\theta(E_0\ ,\ E_1) \quad \underline{\text{et}} \quad R = R_0^{1-\theta}\ R_1^\theta\ .$$

(B) Espaces de fonctions C^∞ . - On considère un espace de Hilbert E , Λ un opérateur auto-adjoint non borné dans E , $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs ; on pose

$$E_{M_k} = \{x \in \bigcap_k D(\Lambda^k)\ ;\ \exists\ L > 0 \ \text{ avec } \ \sup \frac{\|\Lambda^k\ x\|_E}{L^k\ M_k} < \infty\}\ .$$

E_{M_k} est de type $(\mathcal{LF})$, et admet pour suite de définition la suite

$$(E^L_{M_k}) = \{x \in \bigcap_k D(\Lambda^k)\ ;\ \|x\|_{E^L_{M_k}} = (\sum_{k=0}^\infty \frac{\|\Lambda^k\ x\|^2_E}{L^{2k}\ M_k^2})^{1/2} < \infty\}\ , \qquad L \in \mathbb{N}\ .$$

$(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant deux suites de réels strictement positifs, pour "interpoler" entre les espaces E_{M_k} et E_{N_k} , il suffit de savoir le faire entre les espaces $E^L_{M_k}$ et $E^{L'}_{N_k}$ pour tout $(L\ ,\ L')$ de $\mathbb{N}^2$ (en effet,

$$(E_{M_k}\ ,\ E_{N_k}) = \varinjlim_{L,L'}\ (E^L_{M_k}\ ,\ E^{L'}_{N_k})\ ).$$

Alors, par représentation spectrale (cf. [1]), on est ramené au cas des espaces L^2 avec poids.

Un cas particulier intéressant est celui des classes de Gevrey sur une "bonne variété" Γ ; alors $E = L^2(\Gamma)$; Λ est un opérateur de dérivation convenable, M_k est du type $(k!)^s$ avec $s \in \mathbb{R}_+$. On se ramène alors au cas des espaces

$$L^2_{e^{|x|^s}}(\mathbb{R}\ ,\ \mu\ ,\ E)$$

(cf. § 3).

On obtient ainsi des résultats du genre suivant :

Γ étant par exemple une variété analytique compacte, $\mathcal{E}(\Gamma)$, $\mathfrak{A}(\Gamma)$, $\mathfrak{G}_s(\Gamma)$ désignant respectivement l'espace des fonctions C^∞ sur Γ , l'espace des fonctions analytiques sur Γ , l'espace de Gevrey d'ordre s sur Γ , on sait construire un foncteur d'interpolation $\Phi_s[\ ]$ tel que $\Phi_s[\mathcal{E}(\Gamma) , \mathfrak{A}(\Gamma)] = \mathfrak{G}_s(\Gamma)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUNFORS (N.) and SCHWARTZ (J. T.). - Linear operators, II : Spectral theory, self adjoint operators in Hilbert space. - New York, Interscience Publishers, 1963 (Pure and applied Mathematics, 7).

[2] GRISVARD (Pierre). - Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 45, 1966, p. 143-290 (Thèse Sc. math., Paris, 1965).

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Espaces vectoriels topologiques. 3a edição. - São Paulo, Sociedade de Matematica de São Paulo, 1964.

Pour des énoncés plus précis et pour les nombreuses démonstrations qui manquent ici, voir :

[4] GOULAOUIC (Charles). - Interpolation entre espaces vectoriels topologiques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble (Thèse Sc. math., Paris, 1967) (à paraître).