Séminaire Lelong.
Analyse

Jean-Pierre Ramis

Les théorèmes de Weierstrass pour les anneaux de séries formelles et de séries convergentes sur un espace vectoriel normé

Séminaire Lelong. Analyse, tome 7 (1966-1967), exp. n° 2, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1966-1967__7__A2_0>

Séminaire LELONG
(Analyse)
7e année, 1966/67, n° 2

1er mars 1967

LES THÉORÈMES DE WEIERSTRASS POUR LES ANNEAUX DE SÉRIES FORMELLES ET DE SÉRIES CONVERGENTES SUR UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ

par Jean-Pierre RAMIS

Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif de caractéristique nulle, topologique, séparé. On désignera par (e. v. t. $\mathbf{K}$) la catégorie des espaces vectoriels topologiques sur $\mathbf{K}$.

I. Polynômes et séries formelles

1. Généralités.

Rappelons d'abord quelques résultats :

(a) Applications polynomiales (cf. [1] ou [2]). - Soient

$$E \text{ et } F \in \mathrm{Ob}(\text{e. v. t. } \mathbf{K}) .$$

Définition. - Une application f (non nécessairement continue) de E dans F est dite polynomiale homogène de degré n , s'il existe une application n-linéaire symétrique $\tilde{f}$ de E^n dans F telle que $f(x) = \tilde{f}(x , \ldots , x)$.

Autrement dit, f se factorise :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & F \\ & E^n \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

(Δ étant l'application diagonale) .

Dans ces conditions, $\tilde{f}$ est unique et se calcule par :

$$\tilde{f}(x_1 , \ldots , x_n) = \frac{1}{n!} \Delta_{x_n} \ldots \Delta_{x_1} f(x) ,$$

où l'on a posé

$$\Delta_x h(y) = \frac{1}{2} [h(y + x) - h(y - x)] .$$

PROPOSITION 1. - Pour une application polynomiale homogène (de degré n) de E dans F , les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f <u>est continue</u> ; (i') $\tilde{f}$ <u>est continue</u> ;

(ii) f <u>est continue en</u> 0 . (ii') $\tilde{f}$ <u>est continue en</u> $(0 , \ldots , 0)$.

<u>Quelques notations</u>. - L'ensemble des applications polynomiales homogènes continues de degré n de E dans F sera noté $\mathcal{L}^n(E , F)$, il est canoniquement muni (en tant que sous-espace de $\mathcal{C}(E , F)$) d'une structure d'e. v. t. sur $\underset{\sim}{K}$. Nous poserons $\mathcal{L}^0(E , F) = F$. L'ensemble des applications polynomiales homogènes de degré n de E dans F sera noté $L^n(E , F)$.

(b) <u>Polynômes et séries formelles à "variable" dans un e. v. t. sur</u> $\underset{\sim}{K}$. - Soit $E \in \mathrm{Ob}(\text{e. v. t. } \underset{\sim}{K})$ (ici $F = \underset{\sim}{K}$).

<u>Définitions</u>.

1° Nous appellerons ensemble des séries formelles à "variable" dans E ,

$$\underset{\sim}{K}[[E]] = \prod_{n\geqslant 0} \mathcal{L}^n(E , \underset{\sim}{K}) \quad ;$$

on munit de manière évidente cet ensemble d'une structure d'algèbre sur $\underset{\sim}{K}$.

2° On définit de même l'ensemble des polynômes,

$$\underset{\sim}{K}[E] = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathcal{L}^n(E , \underset{\sim}{K}) \quad ;$$

on le munit d'une structure de sous-algèbre de $\underset{\sim}{K}[[E]]$.

Soit $F \in \mathrm{Ob}(\text{e. v. t. } \underset{\sim}{K})$, les définitions ci-dessus se généralisent : on définit

$$F[[E]] = \prod_{n\geqslant 0} \mathcal{L}^n(E , F) \qquad \text{et} \qquad F[E] = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathcal{L}^n(E , F)$$

(ces ensembles étant munis de leur structure naturelle d'espace vectoriel sur $\underset{\sim}{K}$).

<u>Notation</u>. - Soit $f \in \underset{\sim}{K}[[E]]$, nous noterons $f = \sum_{n\geqslant 0} f_n$, avec $f_n \in \mathcal{L}^n(E , \underset{\sim}{K})$.

<u>Définition</u>. - Soit f une série formelle non nulle ; nous appellerons ordre de f (noté $\omega(f)$), le plus petit entier p tel que f_p ne soit pas l'élément nul de $\mathcal{L}^p(E , \underset{\sim}{K})$.

(c) <u>Formule de Taylor</u>. - Désignons par $f^{(n)}(x_0)$ la dérivée n-ième (algébrique), au point $x_0 \in E$, du polynôme f de $\underset{\sim}{K}[E]$. Soit $\mathcal{L}_n(E , F)$ l'ensemble des applications n-linéaires continues de E^n dans F , soit $L_n(E , F)$ l'ensemble des applications n-linéaires de E^n dans F .

Moyennant l'injection canonique (de la catégorie (e. v. t. $\underset{\sim}{K}$)),

$$\mathcal{L}_1(E , \mathcal{L}_1(E , \ldots , \mathcal{L}_1(E , \underset{\sim}{K}) , \ldots)) \to L_n(E , \underset{\sim}{K}) ,$$

$f^{(n)}(x_0)$ peut être considéré comme un élément de $L_n(E , \underset{\sim}{K})$. Introduisons la notation $x^{(n)} = (x , \ldots , x)$, n fois. On a alors la formule de Taylor (si f est de degré p) :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0).h + \ldots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(x_0).h^{(p)} ,$$

qui donne la décomposition de f en ses composantes homogènes. En effet,

$$f_n^{(p)}(x_0).h^{(p)} = p!\ C_n^p\ \tilde{f}_n(x_0 , \ldots , x_0 , \underbrace{h , \ldots , h}_{p \text{ fois}}) , \qquad \text{si} \quad p \leqslant 0 ,$$

$$= 0 , \qquad \text{sinon} ,$$

ce qui montre que $f^{(p)}(x_0)$ est en fait dans $\mathcal{L}_n(E , \underset{\sim}{K})$, et qu'on peut lui associer un élément de $\mathcal{L}^n(E , \underset{\sim}{K})$.

(d) <u>Catégorie des algèbres de séries formelles sur</u> $\underset{\sim}{K}$ ($\underset{\sim}{K}$ <u>muni de sa topologie</u>). - Substitution d'une série formelle dans une autre $(E , F , G \in \mathrm{Ob}(\text{e. v. t. } \underset{\sim}{K}))$: On définit d'abord la substitution d'une application polynomiale homogène dans une autre, soit $f \in F[E]$, homogène de degré p , soit $g \in G(F)$, homogène de degré q :

$$f : E \to F , \qquad g : F \to G ,$$

$g \circ f : E \to G$ est évidemment polynomiale homogène de degré pq , si f et g sont continues, $g \circ f$ l'est aussi. Nous sommes alors en mesure de définir la substitution d'une série formelle d'ordre supérieur ou égal à 1 de $F[E]$ dans une série formelle de $G(F)$, le résultat est un élément de $G[E]$.

Soit $\varphi \in F[[E]]$, $\omega(\varphi) \geqslant 1$, on définit le morphisme

$$\begin{cases} \varphi^* : \underset{\sim}{K}[[F]] \to \underset{\sim}{K}[[E]] & \text{(homomorphisme d'algèbres)} , \\ \varphi^* : f \longmapsto f \circ \varphi & \text{(substitué de } \varphi \text{ dans } f \text{)} . \end{cases}$$

On vérifie facilement que l'on a une catégorie.

<u>Morphismes de restriction</u>. - Soit F un sous-espace (topologique) de E ; l'injection canonique

$$i : F \xrightarrow{\subset} E$$

est linéaire continue, elle peut donc être considérée comme un élément de $E[[F]]$, d'ordre $\geqslant 1$, et elle permet de définir le morphisme de restriction

$$i^* : \underset{\sim}{K}[[E]] \to \underset{\sim}{K}[[F]] \quad ,$$

qui est surjectif si F est facteur direct.

2. Propriétés de $\underset{\sim}{K}[[E]]$.

(a) PROPOSITION 2. - L'anneau $\underset{\sim}{K}[[E]]$ est intègre.

Démonstration. - Soient f et $g \in \underset{\sim}{K}[[E]]$, $f \neq 0$, $g \neq 0$. On pose $\omega(f) = p$, $\omega(g) = q$, soit $h = fg$. On a évidemment $h_n = 0$ pour $n < p + q$, montrons que $h_{p+q} = 0$ (d'où $\omega(fg) = \omega(f) + \omega(g)$) :

$$\text{soit } x_1 \in E \quad \text{tel que } f_p(x_1) \neq 0 \quad ,$$
$$\text{soit } x_2 \in E \quad \text{tel que } g_q(x_2) \neq 0 \quad ;$$

soit F le sous-espace de E engendré par x_1 et x_2 (F , de dimension 1 ou 2 , est muni de la topologie induite), soient $i^*(f_p)$ et $i^*(g_q)$ les restrictions de f_p et de g_q à F , $i^*(f_p)$ et $i^*(g_q)$ sont polynomiales homogènes, non identiquement nulles (d'après le choix de F), ce sont des éléments de $\underset{\sim}{K}[F]$ qui est intègre (en tant que sous-anneau de $\underset{\sim}{K}[X]$ ou $\underset{\sim}{K}[X , Y]$). On a donc

$$i^*(h_{p+q}) = i^*(f_p).i^*(g_q) \neq 0 \quad ,$$

et a fortiori

$$h_{p+q} = f_p.g_q \neq 0 \quad .$$

PROPOSITION 3. - $\underset{\sim}{K}[[E]]$ est un anneau local. Son idéal maximal est

$$\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E]]) = \{f \mid f \in \underset{\sim}{K}[[E]] \text{ , avec } \omega(f) \geqslant 1\} \quad .$$

Démonstration. - Soit f tel que $\omega(f) = 0$, f s'écrit : $f = f_0 - g$, avec $f_0 \in \underset{\sim}{K}$, on peut supposer $f_0 = 1$, soit $f = 1 - g$, on substitue g dans les deux séries (de $\underset{\sim}{K}[X] = \underset{\sim}{K}[\underset{\sim}{K}]$), $1 - X$ et $1 + X + X^2 + \ldots$, ce qui montre que f est inversible.

Remarque : Quand E est de dimension infinie, $\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E]])$ n'est plus engendré en tant qu'idéal par les éléments de $\mathcal{L}^1(E , \underset{\sim}{K})$, comme c'est le cas en dimension finie. Notons

$$\mathfrak{M}_n(\underset{\sim}{K}[[E]]) = \{f \mid f \in \underset{\sim}{K}[[E]] \text{ , avec } \omega(f) \geqslant n\} \quad ,$$

il en résulte que l'inclusion $[\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E]])]^n \subset \mathfrak{M}_n(\underset{\sim}{K}[[E]])$ peut être stricte.

(b) Topologies sur $\underset{\sim}{K}[[E]]$.

(1) On a la topologie définie par les $\{\mathfrak{M}_n(\underset{\sim}{K}[[E]])\}_{n\in\underset{\sim}{N}}$, qui est métrisable, par exemple par

$$d(f\ ,\ g) = \begin{cases} e^{-\omega(f-g)} , & \text{si } f \neq g , \\ 0 , & \text{si } f = g . \end{cases}$$

(2) On a également la topologie $\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E]])$-adique.

Remarquons que la topologie $\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E]])$-adique est plus fine que la topologie d'espace métrique (d'après les inclusions ci-dessus), donc séparée (c'est-à-dire $\bigcap_{n\geqslant 0} [\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E]])]^n = 0$). La "bonne" topologie semble être la topologie (1).

II. Séries convergentes

$\underset{\sim}{K}$ est, dans toute cette partie, un corps commutatif de caractéristique nulle, valué non discret. Nous ne ferons pas d'hypothèse de complétion, soit $\hat{\underset{\sim}{K}}$ le complété de $\underset{\sim}{K}$ auquel on prolonge la valeur absolue de $\underset{\sim}{K}$. Nous noterons $\mathfrak{N}_{\underset{\sim}{K}}$ la catégorie des espaces normés sur $\underset{\sim}{K}$.

1. Généralités (cf. [2]).

(a) Soit $E \in \text{Ob}\ \mathfrak{N}_{\underset{\sim}{K}}$, soit $f \in \underset{\sim}{K}[[E]]$. On pose

$$\|f_n\| = \sup_{x\in B_E} |f_n(x)| \qquad \text{et} \qquad \|\tilde{f}_n\| = \sup_{\substack{x_i\in B_E \\ i=1,\dots,n}} |\tilde{f}_n(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n)|$$

(B_E étant la boule unité de E), on a $\|f_n\| \leqslant \|\tilde{f}_n\|$.

A la série $f = \sum_{n\geqslant 0} f_n$, on associe les séries numériques (de $\underset{\sim}{R}[[X]]$)

$$|f|(r) = \sum_{n\geqslant 0} \|f_n\| r^n \qquad \text{et} \qquad |\tilde{f}|(r) = \sum_{n\geqslant 0} \|\tilde{f}_n\| r^n ,$$

nous appellerons série majorante (resp. majorante stricte) de f , toute série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n r^n$ telle que $\alpha_n \geqslant \|f_n\|$ (resp. $\alpha_n \geqslant \|\tilde{f}_n\|$).

Définitions. - Si $|f|$ a un rayon de convergence R non nul, on dit que f est convergente et admet R pour rayon de convergence. On définit de la même manière le rayon de convergence strict $\tilde{R}$ (c'est celui de $|\tilde{f}|$). On a (cf. [2])

$$R \neq 0 \iff \tilde{R} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad R \geqslant \tilde{R} .$$

La boule ouverte de E , $B(0\ ,\ R)$, est dite boule de convergence de f , $B(0\ ,\ \widetilde{R})$ est dite boule de convergence stricte, $B(0\ ,\ \widetilde{R}) \subset B(0\ ,\ R)$.

La série convergente f définit une application de $B(0\ ,\ R)$ dans $\hat{\underset{\sim}{K}}$ (qui est complet), dont la valeur en $x \in B(0\ ,\ R)$ est notée $f(x)$.

Remarquons que l'on peut à partir de là définir la notion d'application analytique d'un ouvert U de E dans $\hat{\underset{\sim}{K}}$ (la définition est donnée pour $\underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$ dans [2]).

Notation. - L'ensemble des séries convergentes de $\underset{\sim}{K}[[E]]$ muni de la structure de $\underset{\sim}{K}$-algèbre induite par celle de $\underset{\sim}{K}[[E]]$ sera noté $\underset{\sim}{K}\{E\}$.

On a les inclusions triviales :

$$\underset{\sim}{K}[E] \subset \underset{\sim}{K}\{E\} \subset \underset{\sim}{K}[[E]] \ .$$

On peut montrer qu'il existe un isomorphisme canonique entre $\underset{\sim}{K}\{E\}$ et l'anneau des germes de fonctions analytiques en $0 \in E$.

(b) Propriétés de $\underset{\sim}{K}\{E\}$. - On définit comme précédemment les séries convergentes $F\{E\}$ de $F[[E]]$ $(E\ ,\ F \in \mathfrak{N}_{\underset{\sim}{K}})$.

LEMME 1. - Soient $f \in F\{E\}$, $g \in G\{F\}$, avec $\omega(f) \geqslant 1$; soit $g \circ f$ obtenue par substitution de f dans g , alors $g \circ f$ est convergente $(g \circ f \in G\{E\})$.

Démonstration. - $|g| \circ |f|$ (obtenue par substitution de $|f|$ dans $|g|$) est évidemment une série majorante de $g \circ f$, elle a un rayon de convergence non nul ($|f|(r) \to 0$ avec $r \neq 0$), il en est donc de même de $|g \circ f|$, et $g \circ f$ est bien convergente.

PROPOSITION 1.

(i) $\underset{\sim}{K}\{E\}$ est un anneau d'intégrité ;

(ii) $\underset{\sim}{K}\{E\}$ est un anneau local d'idéal maximal défini par

$$\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}\{E\}) = \mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E]]) \cap \underset{\sim}{K}\{E\} = \{f \mid f \in \underset{\sim}{K}\{E\}\ ,\ \omega(f) \geqslant 1\} \ ;$$

(iii) $\underset{\sim}{K}[[E]]$ et $\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E]])$ sont respectivement les complétés de $\underset{\sim}{K}\{E\}$ et $\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}\{E\})$ pour la topologie induite par la topologie (1).

Démonstration.

(i) se déduit de l'inclusion $\underset{\sim}{K}\{E\} \subset \underset{\sim}{K}[[E]]$.

(ii) résulte du lemme 1 (cf. I, § 2, proposition 3).

(iii) se déduit de l'inclusion $\underset{\sim}{K}[E] \subset \underset{\sim}{K}\{E\}$ et du fait que $\underset{\sim}{K}[[E]]$ est le complété de $\underset{\sim}{K}[E]$.

Restriction à un sous-espace.

PROPOSITION 2. - Soit $E \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{N}_{\underset{\sim}{K}}$; soit F un sous-espace de E ; soit i^* l'homomorphisme de restriction,

$$i^* : \underset{\sim}{K}[[E]] \to \underset{\sim}{K}[[F]] \quad ,$$

alors i^* induit un homomorphisme $\underset{\sim}{K}\{E\} \to \underset{\sim}{K}\{F\}$. De plus, si F est facteur direct, ce dernier homomorphisme est surjectif.

Démonstration. - Soit $f \in \underset{\sim}{K}\{E\}$, $f = \sum_{n \geqslant 0} f_n$, par définition :

$$i^*(f) = \sum_{n \geqslant 0} i^*(f_n) \quad , \qquad \text{et} \qquad i^*(f_n) = f_n \circ i \quad ,$$

puisque f est convergente, $|f|$ est convergente, or $|f|$ est majorante de $|i^*(f)|$, donc cette dernière série est convergente, et il en est de même pour $i^*(f)$.

(c) Séries dérivées. - Soit $f_n \in \underset{\sim}{K}[E]$, homogène de degré n ; sa dérivée p-ième en $x_0 \in E$ est un élément de $\mathcal{L}_p(E , \underset{\sim}{K})$ auquel on peut associer un élément de $\mathcal{L}^p(E , \underset{\sim}{K})$, cet élément est polynomial homogène de degré $n - p$ ou nul, et continu.

Soit $f \in \underset{\sim}{K}[[E]]$, on définit la dérivée p-ième de f par

$$f^{(p)} = \sum_{n \geqslant 0} f_n^{(p)} \quad , \qquad f^{(p)} \in (\mathcal{L}^p(E , \underset{\sim}{K}))[[E]] \quad .$$

Remarquons que

$$f^{(p)}(0) = n!\ f_n \quad .$$

PROPOSITION 3. - Soit $f \in \underset{\sim}{K}\{E\}$, soit $\widetilde{R}$ son rayon de convergence strict. Alors f' admet le même rayon de convergence strict $\widetilde{R}$.

Démonstration.

$$\|\widetilde{f}_n'\| = \sup_{\substack{x_i \in B_E \\ i=1,\dots,n-1}} \|\widetilde{f}_n'(x_1 , \dots , x_{n-1})\| = \sup_{\substack{x_i \in B_E \\ h \in B_E \\ i=1,\dots,n-1}} |\widetilde{f}_n'(x_1 , \dots , x_{n-1}).h| \quad ,$$

Or

$$\widetilde{f}'_n(x_1 , \ldots , x_{n-1}).h = C^1_n \widetilde{f}_n(x_1 , \ldots , x_{n-1} , h) = n \widetilde{f}_n(x_1 , \ldots , x_{n-1} , h) ,$$

d'où

$$\|\widetilde{f}'_n\| = n\|\widetilde{f}_n\| ,$$

et le résultat.

On montrerait de même

$$\|f'_n\| \leqslant n\|f_n\| .$$

III. Les théorèmes de Weierstrass

1. Remarques préliminaires.

Soit $E_0 \in Ob(e.\ v.\ t.\ \underset{\approx}{K})$; soit E_0^* son dual topologique, on pose

$$\mathrm{Ann}\ E_0^* = \{x \mid x \in E_0 ,\ \text{avec}\ f(x) = 0 ,\ \forall f \in E_0^*\} ,$$

c'est évidemment un sous-espace fermé de E_0 (qui peut être E_0 tout entier). Considérons l'e. v. t. sur $\underset{\approx}{K}$ défini par $E = E_0/\mathrm{Ann}\ E_0^*$. Il possède la propriété suivante :

Tout sous-espace de dimension 1 dans E admet un supplémentaire topologique dans E. En effet, soit $F \subset E$ de dimension 1, soit $a_0 \in E_0$ tel que sa classe soit $a \neq 0$, $a \in F$; il existe une forme linéaire continue sur E_0 qui ne s'annule pas en a_0 (sinon a_0 appartiendrait à $\mathrm{Ann}\ E_0^*$) ; par passage au quotient, on obtient une forme linéaire f continue sur E qui ne s'annule pas en a. Considérons les applications :

$$\underset{\approx}{K} \to F \to \underset{\approx}{K} ,$$

$$x \longmapsto ax \longmapsto f^{-1}(a)\ f(x) ,$$

elles sont continues, ce qui montre que $\underset{\approx}{K}$ et F sont homéomorphes et

$$E = \underset{\approx}{K}a \oplus \mathrm{Ker}\ f = F \oplus \mathrm{Ker}\ f .$$

Soit $\mathcal{C}_{\underset{\approx}{K}}$ la classe des $\underset{\approx}{K}$-e. v. t. E tels que $\mathrm{Ann}\ E^* = 0$, on a un isomorphisme $\underset{\approx}{p}^* : \underset{\approx}{K}[[E]] \to \underset{\approx}{K}[[E_0]]$ (si $E = E_0/\mathrm{Ann}\ E_0^*$), déduit de la projection $p : E_0 \to E$ ($p \in E[E_0]$) (il est facile de vérifier que toute application polynomiale homogène de degré n, continue de E_0 dans $\underset{\approx}{K}$, s'annule sur les points de $\mathrm{Ann}\ E_0^*$). Ceci permet de restreindre notre étude aux objets de $\mathcal{C}_{\underset{\approx}{K}}$.

L'étude que nous allons faire sera valable pour trois cas particuliers ; pour mettre en évidence l'analogie entre ces trois cas, nous adopterons autant que possible une notation commune. Les trois cas sont les suivants :

(a) Anneau des polynômes : $A = \underset{\sim}{K}[E]$, les hypothèses sur $\underset{\sim}{K}$ sont celles du début ;

(b) Anneau des séries formelles : $A = \underset{\sim}{K}[[E]]$, mêmes hypothèses sur $\underset{\sim}{K}$;

(c) Anneau des séries convergentes : $A = \underset{\sim}{K}\{E\}$, les hypothèses sur $\underset{\sim}{K}$ sont celles de la partie II.

Nous noterons (cas (b) et (c)) $A[[T]]$, l'algèbre des séries formelles d'éléments de A , où A est un anneau topologique ; on a, sur $A[[T]]$, la topologie produit déduite de $A[[T]] = A^{\underset{\sim}{N}}$, nous l'appellerons topologie de la convergence simple des coefficients. Nous noterons (cas (a)) $A[T]$, l'anneau des polynômes sur A .

LEMME 1. - Soit $E \in \mathcal{C}_{\underset{\sim}{K}}$. Une décomposition de l'espace $E = F \oplus E'$ (somme de (e. v. t. $\underset{\sim}{K}$)), telle que F soit de dimension 1 , étant choisie ainsi qu'une base de F $(F \approx \underset{\sim}{K}a)$, on a un homomorphisme canonique de $\underset{\sim}{K}$-algèbres

$$(A' = \underset{\sim}{K}[[E']] , \underset{\sim}{K}[E'] , \underset{\sim}{K}\{E'\}) \quad ,$$

$$\alpha : A \to A'[[T]] \qquad \text{(cas (b) et (c))} ,$$

$$\alpha : A \to A'[T] \qquad \text{(cas (a))} ;$$

on peut de plus préciser, dans les cas (a) et (b), α est bijectif, dans le cas (c), α est injectif.

Démonstration. - Traitons d'abord le cas d'un polynôme f , on écrit la formule de Taylor (on note $x = ta + x'$, avec $t \in \underset{\sim}{K}$, $x' \in E'$) :

$$f(ta + x') = f(x') + t\, f'(x').a + \dots + t^p\, f^{(p)}(x').a^{(p)} \quad ,$$

qui donne immédiatement α .

Soit maintenant f une série formelle, $f = \sum_{n\geqslant 0} f_n$, f_n est un polynôme, on pose

$$\alpha f = \sum_{n\geqslant 0} f_n(x') + t\Big(\sum_{n\geqslant 0} f'_n(x').a\Big) + \dots + t^p\Big(\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(p)}(x').a^{(p)}\Big) + \dots \quad .$$

Enfin, si f est convergente, les séries

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n(x') \ , \quad \sum_{n\geqslant 0} f'_n(x').a \ , \quad \dots$$

sont convergentes (leur rayon de convergence strict est au moins $\frac{\widetilde{R}}{\|a\|}$; cf. II, proposition 3).

La surjectivité, dans les cas (a) et (b), se démontre en remarquant que $x \longmapsto t$ et $x \longmapsto x'$ sont continues.

On a, de plus, un critère de convergence pour une série de $\underset{\approx}{K}[[E]]$:

LEMME 2. - Posons $h_{ij}(f) = C^j_{i+j}\|\tilde{f}_{i+j}\|$, et

$$\bar{f}(\tau , r') = \sum_{i\geqslant 0} \sum_{j\geqslant 0} h_{ij}(f)\ \tau^i\ r'^j \quad .$$

Pour que f soit convergente, il faut et il suffit que la série double $\bar{f}(\tau , r')$ soit convergente.

Démonstration. - On pose $r = \tau + r'$; $|\tilde{f}|(r)$ est obtenue en regroupant les termes de $\bar{f}(\tau , r')$, d'où le résultat.

2. Les théorèmes de Weierstrass.

Passons maintenant à la démonstration proprement dite. Soit $E \in \mathcal{C}_{\underset{\approx}{K}}$.

THÉORÈME 1 (a). - Soit B un polynôme de $\underset{\approx}{K}[E]$ non nul, soit n son degré.

(i) On peut trouver une décomposition, $E = F \oplus E'$ (somme de (e. v. t. $\underset{\approx}{K}$) , avec $\dim F = 1$), telle que, si l'on identifie $\underset{\approx}{K}[E]$ à $(\underset{\approx}{K}[E'])[T]$, le polynôme $B(t)$ à coefficients dans $\underset{\approx}{K}[E']$ soit de degré n ; le coefficient de t^n est alors dans $\underset{\approx}{K}$.

(ii) S'il en est ainsi, pour tout $A \in \underset{\approx}{K}[E]$, il existe des polynômes Q et R de $\underset{\approx}{K}[E]$, tels que $A = BQ + R$, avec $\deg R(t) < n$ $(R(t) \in (\underset{\approx}{K}[E'])[T])$. De plus, Q et R sont déterminés de manière unique par ces conditions.

THÉORÈME 1 (b). - Soit B une série de $\mathfrak{M}(\underset{\approx}{K}[[E]])$ non nulle.

(i) On peut trouver une décomposition, $E = F \oplus E'$, telle que la restriction $i^*(B)$ (déduite de $i : F \overset{\subset}{\longrightarrow} E$) de B à F ne soit pas nulle (soit, dans ces conditions, p l'ordre de $i^*(B)$).

(ii) S'il en est ainsi, pour toute série $A \in \underset{\approx}{K}[[E]]$, il existe des séries Q et R de $\underset{\approx}{K}[[E]]$, telles que $A = BQ + R$, avec $R \in (\underset{\approx}{K}[[E']])[T]$ de degré $< p$. De plus, Q et R sont déterminés de manière unique par ces conditions.

THÉORÈME 1 (c). - Même énoncé que pour le théorème 1 (b), en remplaçant

$\underset{\approx}{K}[[E]]$ par $\underset{\approx}{K}\{E\}$, $\underset{\approx}{K}[[E']]$ par $\underset{\approx}{K}\{E'\}$.

Démonstration du théorème 1 (a).

(i) $B = B_1 + \dots + B_n$, les B_i étant homogènes, on choisit $a \in E$ tel que $B_n(a) \neq 0$, on pose alors $F = \underset{\sim}{K}a$.

(ii) On fait la division de A par B dans l'anneau $(\underset{\sim}{K}[E'])[T]$, ce qui est possible (d'après (i)), l'unicité est évidente.

Démonstration du théorème 1 (b).

(i) $B = \sum_{n\geq 1} B_n$, on chosit un sous-espace F sur lequel au moins l'un des B_n ne s'annule pas, ce qui est toujours possible puisque $B \neq 0$.

(ii) Nous avons vu (lemme 1) que $\underset{\sim}{K}[[E]]$ s'identifie à $(\underset{\sim}{K}[[E']])[[T]]$; nous considérerons que nous sommes dans ce dernier ensemble.

Nous allons d'abord montrer l'existence de la "division" :

$$B = b_0 + tb_1 + \dots + t^n b_n + \dots ,$$

avec $b_0 , \dots , b_{p-1} \in \mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E']])$ et $b_p \notin \mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E']])$ (on fait $t = 0$).

$$B = b_0 + tb_1 + \dots + t^{p-1} b_{p-1} + t^p(b_p + tb_{p+1} + \dots) .$$

Puisque $b_p \notin \mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E']])$, $b_p + \dots \notin \mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E]])$, et $b_p + tb_{p+1} + \dots$ est un élément inversible de $\underset{\sim}{K}[[E]]$, que nous noterons S .

D'où $B = S(t^p - T)$, avec S inversible et $T \in (\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E']]))[[T]]$. On voit immédiatement $(t^p - T = S^{-1} B)$ qu'il suffit de faire la division pour $B = t^p - T$, avec $T \in (\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E']]))[[T]]$.

Soit $A \in (\underset{\sim}{K}[[E']])[[T]]$, $A = a_0 + \dots + t^{p-1} a_{p-1} + t^p(a_p + ta_{p+1} + \dots)$, posons

$$R_1 = a_0 + \dots + t^{p-1} a_{p-1} \qquad \text{et} \qquad Q_1 = a_p + ta_{p+1} + \dots .$$

On a

$$A = (t^p - T)Q_1 + R_1 + A_1 , \qquad \text{avec } A_1 = Q_1 T , \quad A_1 \in (\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E']]))[[T]] .$$

De même, A_1 s'écrit :

$$A_1 = (t^p - T)Q_2 + R_2 + A_2 ,$$

avec

$$A_2 = Q_2 T , \quad A_2 \in (\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E']]))^2 [[T]] ,$$

$$Q_2 , R_2 \in (\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E']]))[[T]] .$$

On obtient ainsi par récurrence trois suites $\{A_n\}$, $\{Q_n\}$, $\{R_n\}$, vérifiant

$$A_n = (t^p - T)Q_{n+1} + R_{n+1} + A_{n+1} , \qquad \text{avec } A_{n+1} = Q_{n+1} T ,$$

$$A_{n+1} \in (\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E']]))^{n+1} [[T]] , \quad Q_{n+1} \in (\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E']]))^{n} [[T]] , \quad R_{n+1} \in (\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E']]))^{n} [T] .$$

Considérons la suite $\{A_1 + A_2 + \dots + A_n\}_{n\in\underset{\sim}{N}}$ d'éléments de $(\underset{\sim}{K}[[E']])[[T]]$, cette suite est convergente (pour la convergence simple des coefficients) ; il suffit de montrer que, quel que soit $\mathfrak{m}$, le coefficient de t^m converge, ce qui est évident (il est de la forme $c_1 + \dots + c_n$, avec $c_n \in (\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E']]))^n$, et $\underset{\sim}{K}[[E']]$ est complet). On a donc

$$A' = A_1 + A_2 + \dots \in (\underset{\sim}{K}[[E']])[[T]] ,$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots \in (\underset{\sim}{K}[[E']])[[T]] ,$$

et

$$R = R_1 + R_2 + \dots \in (\underset{\sim}{K}[[E']])[T] , \text{ de degré } < p .$$

Montrons

$$A = (t^p - T)Q + R .$$

En passant à la limite, on obtient $A + A' = (t^p - T)Q + R + A'$ (la topologie est séparée) et $A = (t^p - T)Q + R$.

L'existence étant montrée, démontrons maintenant l'unicité. Supposons que l'on ait $0 = (t^p - T)Q + R$, montrons que

$$Q \in (\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E']]))^n [[T]] , \qquad \forall\, n \geqslant 1 \qquad \text{(ce qui entraîne bien } Q = 0 \text{)} ;$$

$t^p Q$ est d'ordre $\geqslant p$ en t , R est de degré p en t , par suite $t^p Q$ est égal à un terme provenant de TQ , ce qui montre que les coefficients de Q sont dans $\mathfrak{M}(\underset{\sim}{K}[[E']])$ (ceux de T y sont). On raisonne alors par récurrence. On est ainsi ramené à $R = 0$, $Q = 0$, et il y a bien unicité.

Passons maintenant au cas des séries convergentes.

<u>Démonstration du théorème</u> 1 (c).

(i) est identique à 1 (b) (i).

(ii) Il faut montrer que, lorsque les séries A et B sont convergentes, les séries Q et R sont convergentes. Pour cela, nous allons faire un calcul de majorations $(|t| = \tau , \ \|x'\| = r)$.

Pour $\tau \leqslant \tau_0$ et $r' \leqslant r'_0$ $(\tau_0 , r'_0 > 0)$, les séries doubles $\overline{A}(\tau , r')$ et

$\overline{T}(\tau , r')$ sont convergentes. Nous supposerons donc, dans la suite, que τ et r' vérifient ces conditions (qui entraînent que toutes les séries écrites sont convergentes).

$$\overline{A}(\tau , r') = (\tau^p - \overline{T}(\tau , r'))\ \overline{Q_1}(\tau , r') + \overline{R_1}(\tau , r') + \alpha_1(\tau , r') \quad ,$$

avec $\alpha_1(\tau , r') = \overline{Q_1}(\tau , r')\ \overline{T}(\tau , r')$. On a évidemment

$$\overline{A_1}(\tau , r') \leqslant \overline{T}(\tau , r')\ \overline{Q_1}(\tau , r') \quad ,$$

c'est-à-dire $\overline{A_1}(\tau , r') \leqslant \alpha_1(\tau , r')$ (tous les coefficients de l'une sont inférieurs ou égaux à ceux de l'autre). De même,

$$\overline{\alpha_1}(\tau , r') = (\tau^p - \overline{T}(\tau , r'))\ \beta_2(\tau , r') + \gamma_2(\tau , r') + \alpha_2(\tau , r') \quad ,$$

avec $\alpha_2(\tau , r') = \beta_2(\tau , r')\ \overline{T}(\tau , r')$; de plus,

$$\overline{Q_2}(\tau , r') \leqslant \beta_2(\tau , r') \ , \qquad \overline{R_2}(\tau , r') \leqslant \gamma_2(\tau , r') \ , \qquad \overline{A_2}(\tau , r') \leqslant \alpha_2(\tau , r')$$

(les inégalités étant vérifiées par les coefficients correspondants).

On obtient par récurrence trois suites $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, vérifiant

$$\alpha_n(\tau , r') = (\tau^p - \overline{T}(\tau , r'))\ \beta_{n+1}(\tau , r') + \gamma_{n+1}(\tau , r') + \alpha_{n+1}(\tau , r') \quad ,$$

avec

$$\alpha_{n+1}(\tau , r') = \beta_{n+1}(\tau , r')\ \overline{T}(\tau , r') \quad ,$$

$$\overline{Q_{n+1}}(\tau , r') \leqslant \beta_{n+1}(\tau , r') \qquad \text{(terme à terme)} \quad ,$$

$$\overline{R_{n+1}}(\tau , r') \leqslant \gamma_{n+1}(\tau , r') \qquad \text{(terme à terme)} \quad ,$$

$$\overline{A_{n+1}}(\tau , r') \leqslant \alpha_{n+1}(\tau , r') \qquad \text{(terme à terme)} \quad .$$

On a

$$\overline{Q_1}(\tau , r') \leqslant \frac{\overline{A}(\tau , r')}{\tau^p} \quad ,$$

d'où

$$\alpha_1(\tau , r') \leqslant \frac{\overline{T}(\tau , r')}{\tau^p}\ \overline{A}(\tau , r') \quad ,$$

et, par récurrence,

$$\alpha_n(\tau , r') \leqslant \left(\frac{\overline{T}(\tau , r')}{\tau^p}\right)^n \overline{A}(\tau , r') \quad .$$

Dans $\overline{T}(\tau , r')$, on peut mettre r' en facteur $(T \in (\mathfrak{M}(\underset{\approx}{K}[[E']]))[[T]])$, et par suite obtenir une majoration de la forme $\overline{T}(\tau , r') \leqslant \lambda r'$ (λ constant), il existe $r'_1 > 0$ tel que

$$\frac{\overline{T}(\tau_0 , r')}{\tau_0^p} \leqslant \frac{1}{2} , \qquad \text{pour} \quad r' \leqslant r'_1 .$$

On en déduit que

$$\alpha_n(\tau , r') \leqslant \alpha_n(\tau_0 , r') \leqslant \frac{1}{2^n} \overline{A}(\tau_0 , r'_1) , \qquad \text{pour} \quad \tau \leqslant \tau_0 , \quad r' \leqslant r'_1 .$$

Par suite, les trois séries

$$\alpha_1(\tau , r') + \alpha_2(\tau , r') + \dots ,$$

$$\overline{Q_1}(\tau , r') + \beta_2(\tau , r') + \dots ,$$

$$\overline{R_1}(\tau , r') + \gamma_2(\tau , r') + \dots ,$$

sont convergentes pour $\tau \leqslant \tau_0$, $r' \leqslant r'_1$. Pour des raisons évidentes de majoration, les deux séries

$$\overline{Q_1}(\tau , r') + \overline{Q_2}(\tau , r') + \dots ,$$

$$\overline{R_1}(\tau , r') + \overline{R_2}(\tau , r') + \dots ,$$

sont convergentes dans les mêmes conditions. On a

$$\overline{Q}(\tau , r') \leqslant \overline{Q_1}(\tau , r') + \dots ,$$

$$\overline{R}(\tau , r') \leqslant \overline{R_1}(\tau , r') + \dots ,$$

et, d'après le lemme 2, Q et R sont convergentes.

<u>Définitions</u>.

(a) On appellera polynôme distingué de $(\underset{\approx}{K}[E'])[T]$, un polynôme unitaire de cet anneau.

(b) On appellera polynôme distingué de $(\underset{\approx}{K}[[E']])[T]$, un polynôme unitaire dont les coefficients non dominants sont dans $\mathfrak{M}(\underset{\approx}{K}[[E']])$.

(c) On appellera polynôme distingué de $(\underset{\approx}{K}\{E'\})[T]$, un polynôme unitaire dont les coefficients non dominants sont dans $\mathfrak{M}(\underset{\approx}{K}\{E'\})$.

COROLLAIRE du théorème 1 (*théorème de préparation de Weierstrass*).

(a) *Soit* $B \in \mathbf{K}[E]$, *non nul*.

(i) *Comme dans le théorème* 1 (a).

(ii) *S'il en est ainsi,* B *s'écrit de manière unique,* $B = HP$, *avec* $H \in \mathbf{K}$ *(inversible) et* P *distingué de degré* n .

(b) *Soit* $B \in \mathbf{K}[[E]]$, *non nulle*.

(i) *Comme dans le théorème* 1 (b).

(ii) *S'il en est ainsi,* B *s'écrit de manière unique,* $B = HP$, *avec* H *inversible dans* $\mathbf{K}[[E]]$ *et* P *distingué de degré* P *dans* $(\mathbf{K}[[E']])[T]$.

(c) *Même énoncé que* (b), *en remplaçant* $\mathbf{K}[[E]]$ *par* $\mathbf{K}\{E\}$, *et* $\mathbf{K}[[E']]$ *par* $\mathbf{K}\{E'\}$.

Démonstration.

(a) est évident.

(b) et (c) résultent du théorème 1, en faisant $A = t^p$.

Remarques.

1° E' étant facteur direct de E , la projection $p : E \to E'$ est continue, ce qui permet de définir les homomorphismes d'algèbres :

$$\begin{cases} p^* : \mathbf{K}[[E']] \to \mathbf{K}[[E]] \ , \\ \hat{p}^* : \mathbf{K}\{E'\} \to \mathbf{K}\{E\} \ ; \end{cases}$$

soient alors $B.\mathbf{K}[[E]]$ et $B.\mathbf{K}\{E\}$ les idéaux engendrés par B dans $\mathbf{K}[[E]]$ et $\mathbf{K}\{E'\}$, par passage au quotient on obtient des homomorphismes d'algèbres :

$$\begin{cases} \beta : \mathbf{K}[[E']] \to \mathbf{K}[[E]]/B.\mathbf{K}[[E]] \ , \\ \hat{\beta} : \mathbf{K}\{E'\} \to \mathbf{K}\{E\}/B.\mathbf{K}\{E\} \ ; \end{cases}$$

β fait de $\mathbf{K}[[E]]/B.\mathbf{K}[[E]]$ un $\mathbf{K}[[E']]$-module, d'après le théorème 1, il est de type fini engendré par les images dans le quotient de $1 , \dots , t^{p-1}$; de même, $\mathbf{K}\{E\}/B.\mathbf{K}\{E\}$ est un $\mathbf{K}\{E'\}$-module de type fini engendré par les images de

$$1 , \dots , t^{p-1} .$$

2° Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, la démonstration classique des théorèmes de Weierstrass se transpose sans difficulté, on se ramène à écrire la formule de Cauchy pour un cercle de F .

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Polynômes, dans le cours de Mathématiques 2, professé en 1965/66 à la Faculté des Sciences de Paris.

[2] DOUADY (Adrien). - Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques complets d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, p. 1-98 (Thèse Sc. math. Paris, 1966).

[3] RAMIS (Jean-Pierre). - Factorialité des anneaux de séries formelles et de séries convergentes sur les espaces vectoriels normés, C. R. Acad. Sciences, Paris, t. 262, 1966, Série A, p. 904-906.