Séminaire Lelong.
Analyse

Jean-Marie Arnaudies

Partitions de l'unité dans certains espaces de Banach

Séminaire Lelong. Analyse, tome 7 (1966-1967), exp. n° 1, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1966-1967__7__A1_0>

Séminaire LELONG
(Analyse)
7e année, 1966/67, n° 1

22 février 1967

PARTITIONS DE L'UNITÉ DANS CERTAINS ESPACES DE BANACH

par Jean-Marie ARNAUDIÈS

1. Introduction.

On ne sait toujours pas s'il existe, dans un espace de Banach quelconque, des partitions de l'unité de classe C^∞ . Dans LANG [3], il est prouvé que de telles partitions existent toujours dans un espace de Hilbert. La démonstration vaut, en fait, pour n'importe quel espace "lissable".

Dans $\underset{\sim}{R}^n$, la démonstration de l'existence de partitions de l'unité de classe C^∞ se fait, soit à l'aide de la convolution des fonctions (qui permet, étant donnés un compact K et un ouvert $U \supset K$, de construire une fonction de classe C^∞ , à support dans U , valant 1 sur K), soit à l'aide du lemme suivant :

LEMME. - Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$; il existe un recouvrement ouvert $(V_j)_{j\in J}$, plus fin que (U_i) , localement fini, tel que, pour tout $j \in J$, V_j soit une boule ouverte.

En effet, si $U \supset B$, B étant une boule et U un ouvert, l'existence d'une fonction de classe C^∞ , qui vaut 1 sur B , et à support dans U , est immédiate (ne nécessite plus la convolution).

Pour avoir une partition de 1 subordonnée à $(U_i)_{i\in I}$, on utilise le lemme ci-dessus, et la paracompacité de $\underset{\sim}{R}^n$.

Mais la preuve de ce lemme utilise la locale compacité de $\underset{\sim}{R}^n$. On ne peut donc espérer généraliser cette méthode à un espace de Banach de dimension infinie.

2. Introduisons une définition.

DÉFINITION 2.1.

(a) Soit E un espace de Banach ; E est lissable, s'il existe une norme, équivalente à la norme donnée sur E , et qui est une fonction de classe C^∞ dans $E - \{0\}$.

(b) E est lissé, si sa norme est une fonction de classe C^∞ dans $E - \{0\}$.

Un espace de Hilbert H est lissé ; on verra aisément que, par exemple,

$$D(\|x\|).h = \frac{(x|h)}{\|x\|^2} ,$$

etc.

Soit $C_0(N)$ l'espace des suites de réels qui tendent vers 0, muni de la norme uniforme ; KUIPER a prouvé que $C_0(N)$ est lissable, mais $C_0(N)$ n'est pas lissé.

Si p est un entier impair, $\ell^p(N)$ n'est pas lissable ; toute fonction de classe C^2 et à support borné est identiquement nulle (KUIPER).

Tout sous-espace d'un espace lissé est lissé.

Tout quotient d'un lissable par un facteur direct est lissable.

Tout produit d'un nombre fini d'espaces de Banach lissables est lissable. Par contre, le dual d'un Banach lissable n'est pas lissable, en général ; par exemple, $C_0(N)' = \ell^1(N)$, et $\ell^1(N)$ n'est pas lissable.

Il existe sûrement des Banach non lissables dont le dual est lissable.

Enfin, il semble intéressant de chercher la question suivante :

Soient E un espace de Banach lissable, et $F \subset E$ un sous-espace fermé : le quotient E/F est-il lissable ?

THÉORÈME 2.1. - *Soit E un espace de Banach lissable et séparable. Pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de E, il existe une partition de l'unité de classe C^∞, subordonnée à ce recouvrement.*

Pour la démonstration, nous introduisons une définition et nous utiliserons trois lemmes.

DÉFINITION 2.2. - *Soient E un espace métrique, et U un ouvert de E ; U est dit* ouvert s. c., *s'il existe des boules ouvertes B, B_1, ..., B_n de E telles que*

$$U = B \cap [\complement(\overline{B_1} \cup \dots \cup \overline{B_n})] ,$$

$\overline{B_i}$ désignant l'adhérence de B_i.

LEMME 2.1. - *Soient E un espace métrique, et U_1, ..., U_n, ... un recouvrement de E par des boules ouvertes, dénombrable. Alors il existe un recouvrement ouvert V_1, ..., V_n de E tel que :*

(a) *$(V_n)_{n\in N}$ est localement fini ;*

(b) $\forall\, n \in N$, $V_n \subset U_n$;

(c) $\forall\, n \in N$, V_n <u>est un ouvert s. c.</u>

<u>Preuve.</u> - Si $r > 0$ et $x \in E$, $B(x\,,\,r)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r , $\overline{B(x\,,\,r)}$ son adhérence.

Posons

$$U_i = B(x_i\,,\,\alpha_i)\ , \qquad V_1 = U_1\ .$$

Si on a construit V_{i-1} , on pose

$$r_{1,i} = \alpha_1 - \frac{1}{i}\ ,\ \ldots\ ,\ r_{i-1,i} = \alpha_{i-1} - \frac{1}{i}\ ,$$

et

$$V_i = U_i \cap [(\overline{B(x_1\,,\,r_{1,i})} \cup \ldots \cup \overline{B(x_{i-1}\,,\,r_{i-1,i})})]\ ,$$

avec la convention que $B(.\,,\,r_{\lambda\mu}) = \emptyset$ si $r_{\lambda\mu} < 0$, i. e. que

$$r_{\lambda,i} = \max(\alpha_\lambda - \frac{1}{i}\,,\,0)\ .$$

V_i est s. c. par construction, et $V_i \subset U_i$, d'où (b) et (c).

Démontrons (a).

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n = E\ ;$$

en effet, soient $x \in E$, et j le plus petit entier tel que $x \in U_j$; si $x \notin V_j$, on a

$$x \in [U_j \cup \overline{B(x_1\,,\,r_{1,j})} \cup \ldots \cup \overline{B(x_{j-1}\,,\,r_{j-1,j})}]\ ,$$

donc, il existe λ , $1 \leqslant \lambda \leqslant j-1$, tel que $x \in \overline{B(x_\lambda\,,\,r_{\lambda,j})}$, mais

$$\overline{B(x_\lambda\,,\,r_{\lambda,j})} \subset U_\lambda$$

et $\lambda < j$, et ceci contredit la définition de j .

Le recouvrement (V_i) est localement fini : soient $x \in E$, n tel que $x \in U_n$, et $\delta > 0$ tel que $B(x\,,\,\delta) \subset U_n$. Pour i assez grand et $i > n$, on a

$$B(x\,,\,\delta/2) \subset B(x_n\,,\,\alpha_n - \frac{1}{i})\ ,$$

puisque $U_n = B(x_n\,,\,\alpha_n)$; pour ces indices i , il est clair que

$$B(x\,,\,\delta/2) \cap V_i = \emptyset\ .$$

LEMME 2.2. - Soit U une boule ouverte dans un Banach lissable E . Alors il existe

$$\varphi : E \to \mathbb{R}^+ ,$$

de classe C^∞ , qui vaut 1 sur $\overline{U}$, et qui est < 1 hors de $\overline{U}$, et

$$\psi : E \to \mathbb{R}^+ ,$$

de classe C^∞ , qui est > 0 sur U , et $= 0$ hors de U .

Preuve. - On peut supposer que U est la boule unité.

Pour construire φ , on considère $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, qui vaut 1 sur $[-1 , +1]$ qui est de classe C^∞ , et < 1 hors de $[-1 , +1]$, et on pose

$$\varphi(x) = \varphi_0(\|x\|) .$$

Pour construire ψ , on considère $\psi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, qui est > 0 sur $]-1 , +1[$, $= 0$ hors de $]-1 , +1[$, et de classe C^∞ , et on pose

$$\psi(x) = \psi_0(\|x\|) .$$

LEMME 2.3. - Soit $V = B \cap [\complement(\overline{B_1} \cup \dots \cup \overline{B_n})]$ un ouvert s. c. dans un Banach lissable. Alors il existe

$$\varphi : E \to \mathbb{R}^+ ,$$

de classe C^∞ , qui est > 0 sur V , et $= 0$ hors de V .

Preuve. - Soient, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\psi_i : E \to \mathbb{R}^+$, de classe C^∞ , < 1 hors de $\overline{B_i}$, $= 1$ sur $\overline{B_i}$, et $\psi : E \to \mathbb{R}^+$, de classe C^∞ , > 0 sur B , $= 0$ hors de B . On pose alors

$$\varphi(x) = \psi(x) \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (1 - \psi_i(x)) .$$

Preuve du théorème 2.1.

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E .

Soit $(W_j)_{j \in J}$ un recouvrement localement fini de E , plus fin que (U_i) (paracompacité de E). Nous appellerons $\lambda : J \to I$ une application telle que $W_j \subset U_{\lambda(j)}$.

Soit $(T_j)_{j \in J}$ un recouvrement ouvert de E , tel que $\overline{T_j} \subset W_j$ ((W_j) localement fini, et E est un espace normal).

Soit $(S_k)_{k \in K}$ un recouvrement dénombrable de E , tel que, $\forall k$, S_k est une boule, et plus fin que (T_j) (ceci est possible parce que E est séparable). Nous appellerons $\mu : K \to J$ une application telle que $S_k \subset T_{\mu(k)}$.

Enfin, soit $(V_k)_{k\in K}$ un recouvrement localement fini de E par des ouverts s.c., $V_k \subset S_k$ (lemme 2.1).

Si $\mu_k : E \to \underset{\sim}{R}^+$ est C^∞, > 0 sur V_k, et $= 0$ hors de V_k, on a, en posant

$$\varphi_k = \frac{u_k}{\sum_{k\in K} u_k} ,$$

$$\varphi_k \text{ est } C^\infty , \qquad \sum_{k\in K} \varphi_k = 1 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Supp} \varphi_k \subset \overline{V_k} \ ;$$

le fait que φ_k est C^∞ provient du fait que, dans un voisinage de $x \in E$, il n'y a qu'un nombre fini des u_k à additionner.

Soit

$$\theta_j = \sum_{\mu(k)=j} \varphi_k \ ;$$

pour la même raison,

$$\theta_j \text{ est } C^\infty , \qquad \sum_{j\in J} \theta_j = 1 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Supp} \theta_j \subset \overline{\bigcup_{\mu(k)=j} \overline{S_k}} \subset \overline{T_j} \ .$$

Enfin, soit

$$\gamma_i = \sum_{\lambda(j)=i} \theta_j ,$$

γ_i est C^∞, et $\operatorname{supp} \gamma_i \subset \overline{\bigcup_{\lambda(j)=i} \overline{T_j}}$, mais ceci est égal à $\bigcup_{\lambda(j)=i} \overline{T_j}$, puisqu'une réunion localement finie de fermés est un fermé ; comme $\bigcup_{\lambda(j)=i} \overline{T_j} \subset U_i$, on conclut que

$$\operatorname{Supp} \gamma_i \subset U_i ,$$

et comme $\sum_{i\in I} \gamma_i = 1$,

$(\gamma_i)_{i\in I}$ est une partition de l'unité subordonnée à $(U_i)_{i\in I}$.

C. Q. F. D.

3. Utilisation des partitions de l'unité de classe C^∞.

De façon générale, elles permettent de recoller certaines opérations que l'on sait faire localement ; par exemple, si V est une variété banachique ayant pour modèle un espace de Banach E qui admet des partitions de l'unité de classe C^∞, alors il en est de même de V : la démonstration est identique à celle de la fin du théorème 2.1. Ainsi, sur une telle variété banachique, on peut construire une métrique riemannienne.

Enfin, signalons le théorème d'Emile Borel :

THÉORÈME 3.1. - Soit E un espace de Banach lissable, et soit (f_n) une suite de polynômes homogènes sur E, à valeurs dans le Banach F, f_n étant de degré n. Alors il existe $f : E \to F$, de classe C^∞, telle que pour tout n, on ait

$$\frac{d^n f}{dx^n}(0) = n!\, f_n \quad .$$

(Pour la définition des polynômes homogènes à variable dans un espace de Banach, cf. [1] ou [2].)

Preuve. - Posons

$$f_n^{(p)} = \frac{d^p}{dx^p} f_n \,, \qquad \text{pour } p \leqslant n \quad ,$$

$f_n^{(p)} : E \to \mathcal{L}_p(E\,,\,F)$ est un polynôme homogène de degré $n-p$, $\mathcal{L}_p(E\,,\,F)$ étant l'espace des applications p-linéaires continues de E dans F.

Si P est un polynôme homogène, nous notons $\widetilde{P}$ l'application multilinéaire symétrique telle que $P(x) = \widetilde{P}(x\,,\,x\,,\,\ldots)$. On a

$$\|\widetilde{f}_n'\| \leqslant n\|\widetilde{f}_n\| \quad ,$$

d'où

$$\|\widetilde{f}_n^{(p)}\| \leqslant \frac{n!}{(n-p)!}\|\widetilde{f}_n\| \quad , \tag{3}$$

donc

$$\forall\, x \in E\,, \qquad \frac{1}{p!}\|f_n^{(p)}(x)\| \leqslant \binom{n}{p}\, \|\widetilde{f}_n\|\, \|x\|^{n-p} \quad .$$

On va construire une suite de nombres (r_n), $0 < r_n \leqslant 1$, tels que, $\forall\, p \geqslant 0$, la série

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{d^p}{dx^p}\left[u\left(\frac{x}{r_n}\right) f_n(x)\right]$$

converge uniformément sur E, u étant une fonction à valeurs réelles, de classe C^∞, telle que

$$\begin{cases} u = 1 \text{ au voisinage de } 0 , \\ u(x) = 0 \text{ pour } \|x\| > 1 \quad \text{(ceci est possible, parce que } E \text{ est lissable)} . \end{cases}$$

Supposons construite cette suite (r_n) , et soit $f^{(p)}$ la somme de la série ci-dessus. On a

$$\forall\, n , \qquad f^{(n)}(0) = \frac{d^n}{dx^n} f^{(0)}(0) = n!\, f_n ,$$

donc $f^{(0)} : E \to F$ répondra aux conditions demandées.

Voici comment on peut construire la suite (r_n) : Posons

$$g_n(x) = u(\frac{x}{r_n})\, f_n(x) ,$$

soit $p \leqslant n$; (r_n) étant une suite quelconque, $0 < r_n \leqslant 1$, la formule de Leibnitz donne

$$\frac{1}{p!} \left\|\frac{d^p}{dx^p} g_n(x)\right\| \leqslant \sum_{i+j=p} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} \left\|\frac{d^i}{dx^i} u(\frac{x}{r_n})\right\| \, \|f_n^{(j)}(x)\| .$$

Il existe une constante k_i telle que, pour toute suite r_n , $0 < r_n \leqslant 1$,

$$\left\|\frac{d^i}{dx^i} u(\frac{x}{r_n})\right\| = r_n^{-i}\|u^{(i)}(x/r_n)\| \leqslant k_i\, r_n^{-i} .$$

Appliquons (3) :

$$\frac{1}{p!} \left\|\frac{d^p}{dx^p} g_n(x)\right\| \leqslant \sum_{i+j=p} \frac{k_i}{i!} r_n^{-i} \frac{n!}{j!\,(n-j)!} r_n^{n-j}\|\tilde{f}_n\| ,$$

car $g_n(x) = 0$ pour $\|x\| > r_n$. En remplaçant $n - j$ par $n - p$, ce qui est loisible, on obtient

$$\frac{1}{p!} \left\|\frac{d^p}{dx^p} g_n(x)\right\| \leqslant \binom{n}{p} \|\tilde{f}_n\|\, r_n^{n-p} \sum_{i+j=p} (\frac{p!}{i!\,j!} k_i) .$$

Posons

$$h_p = \sum_{i+j=p} \frac{p!}{i!\,j!} k_i ,$$

on a

$$\left\|\frac{d^p}{dx^p} g_n(x)\right\| \leqslant h_p \frac{n!}{(n-p)!} r_n^{n-p}\|\tilde{f}_n\| .$$

Si $n \geqslant 2p$,

$$\left\|\frac{d^p}{dx^p} g_n(x)\right\| \leqslant h_p \frac{n!}{(n-p)!} r_n^{n/2}\|\tilde{f}_n\| .$$

Soit ρ_n une suite, $0 < \rho_n \leqslant 1$, telle que

$$\sum_{n\geqslant 0} \|\widetilde{f}_n\| \rho_n^{n/2} < +\infty \qquad \text{et} \qquad r_n = \frac{1}{2}\rho_n \quad ,$$

alors

$$\sum_{n\geqslant 2p} \left\|\frac{d^p}{dx^p} g_n(x)\right\| \leqslant h_p \sum_{n\geqslant 0} \|\widetilde{f}_n\| \frac{n!}{(n-p)!} \frac{1}{2^{n/2}} \rho_n^{n/2} \quad .$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-p)!\ 2^{n/2}} = 0 \quad ,$$

donc le membre de droite est $< +\infty$, et la suite $(r_n) = (\frac{1}{2}\rho_n)$ convient.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Cours de Mathématiques 2, professé en 1965/66 à la Faculté des Sciences de Paris.

[2] DOUADY (Adrien). - Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques complets d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, p. 1-98 (Thèse Sc. math. Paris, 1966).

[3] LANG (Serge). - Introduction to differentiable manifolds. - New York, Interscience Publishers, 1962.