

SÉMINAIRE LELONG.

ANALYSE

PIERRE LELONG

Exemples d'indicatrices régularisées non continues

Séminaire Lelong. Analyse, tome 6 (1965-1966), exp. n° 9, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SL_1965-1966__6__A7_0

© Séminaire Lelong. Analyse

(Secrétariat mathématique, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXEMPLES D'INDICATRICES RÉGULARISÉES NON CONTINUES (*)

par Pierre LELONG

Je vais établir que l'indicatrice radiale régularisée, ainsi que l'indicatrice cerclée régularisée, des fonctions entières $f(z_1, \dots, z_n)$ de type exponentiel ne sont pas, en général, des fonctions continues pour $n > 1$.

L'indicatrice radiale est celle qui a été étudiée dans l'exposé précédent de A. MARTINEAU ; elle est définie par

$$\lambda_f(z) = \limsup t^{-1} \log |f(tz)|, \quad t > 0, \quad t \rightarrow +\infty, \quad z = (z_1, \dots, z_n);$$

sa régularisée $\lambda_f^*(z)$ est une fonction plurisousharmonique. Pour montrer qu'elle n'est pas nécessairement continue, je me servirai de l'indicatrice cerclée, étudiée conjointement avec la précédente, dans le mémoire [3]. On va établir que l'indicatrice cerclée régularisée n'est pas nécessairement une fonction continue. La même assertion en résultera concernant l'indicatrice radiale régularisée $\lambda_f^*(z)$, et ceci résoudra par la négative une conjecture faite à la fin de l'exposé précédent.

1. A une demi-droite définie par

$$z'_k = tz_k, \quad t > 0, \quad [z = (z_k) \neq 0],$$

associons canoniquement le plan complexe $L^1(z)$, défini par

$$z'_k = uz_k, \quad u \text{ complexe.}$$

Considérons, pour une fonction entière $f(z_1, \dots, z_n) = f(z)$ de type exponentiel, l'indicatrice cerclée

$$L_c(z) = \limsup |u|^{-1} \log |f(z_1 u, \dots, z_n u)|, \quad |u| \rightarrow +\infty,$$

et sa régularisée supérieure, dite indicatrice cerclée régularisée

$$L_c^*(z) = \limsup L_c(z + z'), \quad \|z'\| \rightarrow 0.$$

(*) Note, rédigée en septembre 1966, en complément à l'exposé d'André MARTINEAU (cf. n° 8 de ce Séminaire).

$L_C^*(z)$ est la plus petite majorante semi-continue supérieurement de $L_C(z)$. Les indicatrices L_C^* ont été caractérisées dans notre mémoire [3] (cf. aussi [2]). Pour qu'une fonction $V(z)$ soit l'indicatrice cerclée régularisée d'une fonction entière de type exponentiel, il faut et il suffit qu'elle soit plurisousharmonique dans C^n et homogène d'ordre 1, c'est-à-dire vérifie

$$(1) \quad V(uz) = |u| V(z) \quad .$$

On a établi (loc. cit.) que (1) entraîne $V(z) \geq 0$, et que $U(z) = \log V(z)$ est une fonction plurisousharmonique; elle vérifie

$$(2) \quad U(uz) = U(z) + \log|u| \quad .$$

Réciproquement, si on se donne une fonction plurisousharmonique vérifiant (2), $V(z) = \exp U(z)$ est l'indicatrice cerclée régularisée d'une fonction entière de type exponentiel.

2. Etant donné un polynôme $P(z_1, \dots, z_n)$, on peut lui faire correspondre canoniquement un polynôme homogène de $n+1$ variables $\bar{P}(z_0, z_1, \dots, z_n)$, en posant

$$\bar{P}(z_0, z_1, \dots, z_n) = P(z_1 z_0^{-1}, \dots, z_n z_0^{-1}) z_0^m$$

où $m = \text{degré } P$.

Nous allons nous inspirer de ce procédé comme dans [3] pour faire correspondre à une fonction plurisousharmonique donnée dans C^n , soit

$$U(z_1, \dots, z_n) \quad ,$$

appartenant à la classe de croissance minimale (cf. [3]), une fonction plurisousharmonique dans C^{n+1} ,

$$\bar{U}(z_0, z_1, \dots, z_n) \quad ,$$

vérifiant (2).

PROPOSITION. - Soit $U(z_1, \dots, z_n)$ une fonction plurisousharmonique dans C^n vérifiant

$$(3) \quad \limsup (\log\|z\|)^{-1} U(z) = a < \infty, \quad \|z\| \rightarrow +\infty ;$$

alors la fonction définie, pour $z_0 \neq 0$, par

$$(4) \quad U_1(z_0, z_1, \dots, z_n) = a^{-1} U(z_1 z_0^{-1}, \dots, z_n z_0^{-1}) + \log|z_0|$$

se prolonge d'une manière unique en une fonction $\bar{U}(z_0, \dots, z_n)$ plurisous-
harmonique dans C^{n+1} et vérifiant (2).

La démonstration (cf. [3]) se résume en ceci : $\bar{U}(z_0, z_1, \dots, z_n)$ est définie par (4) et plurisousharmonique au voisinage de tout point

$$z' = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in C^{n+1}$$

pour lequel $z_0 \neq 0$. D'après un énoncé établi dans [1], une fonction plurisousharmonique dans $D - E$, bornée supérieurement sur $D - E$ au voisinage de tout point de E , où $E \subset D$ est un sous-ensemble analytique d'une variété analytique complexe D , se prolonge "par continuité" de $D - E$ à D ; le prolongement est obtenu, d'une manière unique, en définissant sa valeur en $x \in E$ comme la limite supérieure des valeurs prises en des points $x^{(i)} \rightarrow x$, $x^{(i)} \in D - E$ (en fait, l'énoncé est vrai sous l'hypothèse plus générale que E est localement de capacité nulle pour la structure réelle sous-jacente). Il suffit donc ici d'établir que U_1 , défini par (4), est borné supérieurement au voisinage d'un point quelconque du sous-ensemble analytique $z_0 = 0$. Soit

$$M(r) = \sup U(z) \quad \text{pour } \|z\| = r .$$

$M(r)$ est une fonction convexe de $\log r$; alors (3) entraîne, par des arguments de convexité,

$$M(r) \leq a \log r + M(1) ,$$

c'est-à-dire l'existence d'une constante finie b telle que

$$U(z_1, \dots, z_n) \leq a \log \|z\| + b .$$

Considérons alors $U_1(z_0, z_1, \dots, z_n)$; en notant encore

$$\|z\| = r, \quad z = (z_1, \dots, z_n) ,$$

on a, d'après (4),

$$U_1(z_0, z_1, \dots, z_n) \leq a^{-1} [a \log \frac{r}{|z_0|} + b] + \log |z_0| = \log r + ba^{-1}$$

qui montre que U_1 , définie sur $\Omega = C^{n+1} - \{z_0 = 0\}$, est bornée supérieurement sur $K \cap \Omega$, K étant un compact quelconque de C^{n+1} ; l'énoncé précédent est alors établi.

3. Une conséquence de la construction précédente est le théorème suivant.

THÉOREME. - Il existe une correspondance canonique biunivoque entre la classe des fonctions plurisousharmoniques de C^n qui vérifient la majoration (3) et l'ensemble des indicatrices cerclées régularisées des fonctions entières de type exponentiel dans C^{n+1} .

En effet, la construction précédente définit

$$U(z_1, \dots, z_n) \rightarrow \bar{U}(z_0, z_1, \dots, z_n),$$

et $V = e^{\bar{U}}$ est alors l'indicatrice cerclée régularisée d'une fonction entière f d'après le résultat rappelé plus haut.

4. Il est facile de former pour $n = 1$ une fonction plurisousharmonique $U(z)$, vérifiant (3), qui ne soit pas continue. En effet, il suffit de considérer un potentiel $U^\mu(z) = \mu_a \star \log|a - z|$, μ étant une mesure positive à support dans $|a| \leq 1$; il est bien connu que cette construction peut être faite de manière que $U^\mu(z)$ ait une discontinuité à l'origine. Alors $U(z) = U^\mu(z)$ vérifie

$$U(z) \leq \|\mu\| \log[|z| + 1] \leq \|\mu\| \log\|z\| + \|\mu\| \log 2,$$

et la fonction

$$U_2(z_0, z_1) = \|\mu\|^{-1} U(z_1 z_0^{-1})$$

se prolonge en conséquence dans C^2 en une fonction plurisousharmonique

$$\bar{U}(z_1, z_2);$$

la fonction

$$V(z_0, z_1) = \exp \bar{U}(z_0, z_1)$$

est alors l'indicatrice cerclée régularisée d'une fonction entière $f(z_0, z_1)$ de type exponentiel. Par construction, elle est discontinue en tout point de la variété W définie par $z_1 = 0$, $z_0 \neq 0$.

L'indicatrice radiale régularisée $\lambda_f^*(z_0, z_1)$ n'est pas une fonction continue. En effet, s'il en était ainsi, la fonction

$$V(z_0, z_1) = \sup_{\theta} \lambda_f^*(z_0 e^{i\theta}, z_1 e^{i\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

serait continue, ce qui n'est pas.

Le contre-exemple vaut évidemment pour n quelconque, f pouvant être considéré comme une fonction entière de type exponentiel d'un nombre quelconque de variables z_0, z_1, \dots, z_n , qui ne dépend que des deux premières d'entre elles.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LELONG (Pierre). - Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisous-harmoniques, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 36, 1957, p. 263-303.
 - [2] LELONG (Pierre). - Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisous-harmoniques de type exponentiel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 1063-1066.
 - [3] LELONG (Pierre). - Fonctions entières de type exponentiel dans \mathbb{C}^n , Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, n° 2.
-