Séminaire Lelong.
Analyse

André Martineau

Utilisation de la d''-cohomologie à croissance dans la théorie des indicatrices de croissance des fonctions entières

Séminaire Lelong. Analyse, tome 6 (1965-1966), exp. n° 8, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1965-1966__6__A6_0>

Séminaire LELONG
(Analyse)
6e année, 1965/66, n° 8

6 juin 1966
[Rédaction de juin 1967]

UTILISATION DE LA d"-COHOMOLOGIE À CROISSANCE DANS LA THÉORIE DES INDICATRICES DE CROISSANCE DES FONCTIONS ENTIÈRES

par André MARTINEAU

Je caractérise dans cet exposé les régularisées semi-continues supérieurement des indicatrices des fonctions entières d'ordre fini. L'outil essentiel est un théorème d'extension des fonctions entières d'ordre fini définies sur un sous-espace linéaire d'un espace vectoriel complexe de dimension finie.

La question, pour le cas des fonctions entières de type exponentiel, a été résolue par C. O. KISELMAN [3], et selon la méthode, à des détails près, que j'avais décrite au mois de décembre 1965 au séminaire Leray, en réponse à une question de Pierre LELONG. Cette méthode consiste à remarquer que le domaine naturel de convergence de l'intégrale de Laplace projective, que j'ai introduite en [9], est un ouvert d'holomorphie d'un espace projectif.

Si depuis cette période, j'ai recherché une autre méthode, c'est parce que ce procédé ne s'applique pas de façon naturelle au cas des fonctions entières d'ordre fini, et parce que, en réfléchissant à la démonstration du théorème 2.3.8 de HÖRMANDER [1] (réciproque du théorème de Levi), on voit que c'est le problème d'extension (lemme 2.3.10) qui est fondamental dans ces questions.

Malheureusement, ma rédaction, écrite dans la hâte, contenait une erreur qui n'a été que partiellement éliminée en [10]. J'espère que la version ici présentée ne contient plus de faute essentielle. Elle est basée sur les indications données en [11].

Une fonction holomorphe f , définie sur $\underset{\sim}{C}^N$, est dite entière, d'ordre fini $k > 0$, si on a une majoration

$$(1) \qquad \log|f(z)| \leq B + A.|z|^k , \qquad \text{où} \quad |z|^2 = \sum_{j=1}^{N} z_j.\overline{z}_j .$$

On introduit alors la fonction λ_f , définie par

$$(2) \qquad \lambda_f(z) = \overline{\lim_{z\to+\infty}}\ r^{-k} \log|f(r.z)| ,$$

et sa régularisée semi-continue supérieurement, c'est-à-dire la plus petite majorante semi-continue supérieurement de λ_f , que nous noterons Λ_f , et désignerons par <u>indicatrice de croissance régularisée de</u> f .

Il résulte de théorèmes prouvés par P. LELONG [4], et aussi des méthodes de [8], enfin de l'article de KISELMAN [3], que Λ_f est une fonction plurisousharmonique (j'admets $-\infty$). En outre, elle est clairement positivement homogène d'ordre k .

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - <u>Les indicatrices de croissance régularisées de fonctions entières d'ordre fini</u> k , $k > 0$, <u>sont exactement les fonctions plurisousharmoniques positivement homogènes d'ordre</u> k .

Si Φ est une fonction définie sur $\mathbb{C}^N$, à valeurs dans $[-\infty , +\infty[$ (que je supposerai différente de $-\infty$ sur un ouvert), je considère l'espace B_Φ , formé des fonctions entières f telles que,

$$(3) \qquad f(z)\, e^{-\Phi(z)} \to 0 , \quad \text{pour } |z| \to +\infty ,$$

muni de la norme

$$(4) \qquad \sup_{z\in \mathbb{C}^N} |f(z)\, e^{-\Phi(z)}| .$$

Soit Ψ plurisousharmonique. Nous dirons qu'elle est d'ordre k , si elle satisfait à une inégalité

$$(5) \qquad \Psi(z) \leq D + C.|z|^k .$$

On introduit son indicatrice de croissance λ_Ψ :

$$(6) \qquad \lambda_\Psi(z) = \overline{\lim_{r\to+\infty}}\ r^{-k}\, \Psi(r.z) ,$$

et son indicatrice de croissance régularisée Λ_Ψ , qui est la plus petite majorante plurisousharmonique positivement homogène d'ordre k de λ_Ψ .

Soit M une fonction continue positivement homogène d'ordre k , et telle que $M(z) \geq \lambda_\Psi(z)$ pour tout z , donc $M(z) \geq \Lambda_\Psi(z)$ pour tout z .

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K(\varepsilon)$ tel que

$$(7) \qquad \Psi(z) \leq K(\varepsilon) + M(z) + \varepsilon.|z|^k ,$$

d'après les résultats de P. LELONG [4] (Cf. aussi [3]).

Soit $\theta \in \mathcal{D}^{+}(\underset{\sim}{C}^N)$, θ ne dépendant que de r,

$$r^2 = \sum_{j=1}^{N} z_j . \bar{z}_j \ ,$$

et telle enfin que $\int_{\underset{\sim}{C}^N} \theta(z)\ d\lambda(z) = 1$.

Si Ψ est plurisousharmonique, on a

$$\Psi \star \theta = \Psi_\theta \geqslant \Psi \ ,$$

et si on pose

$$\theta_k(z) = k^{2N}\ \theta(k.z) \ ,$$

il est connu que

$$\inf_k \Psi_{\theta_k} = \Psi \ .$$

Nous posons $M_\theta(z) = |z|^k\ \Psi_\theta(\frac{z}{|z|})$. Si la fonction Ψ est positivement homogène d'ordre k , on a donc

$$\inf_k M_{\theta_k} = \Psi \ .$$

Nous notons $\mathcal{M}_\Psi$, l'ensemble des fonctions M_θ construites à partir de Λ_Ψ : ces fonctions ne sont pas plurisousharmoniques, en général.

Nous posons maintenant

(8) $$E_\Psi = \bigcap_{\varepsilon>0} \Big(\bigcap_{\Phi\in\mathcal{M}_\Psi} B_{\Phi+\varepsilon|z|^k} \Big) \ .$$

On vérifie immédiatement que l'espace E_Ψ est un espace de Fréchet. Il est naturel d'introduire cet espace, car il jouit de la propriété suivante :

LEMME 1. - <u>On a</u> $f \in E_\Psi$ <u>si, et seulement si,</u> $\Lambda_f \leqslant \Lambda_\Psi$.

<u>Démonstration</u>. - Si $f \in E_\Psi$, cela entraîne que, pour z assez grand, elle est majorée par $e^{\Phi(z)+\varepsilon|z|^k}$, donc que son indicatrice est majorée par $\Phi(z) + \varepsilon|z|^k$, donc par

$$\inf_{\Phi,\varepsilon} (\Phi(z) + \varepsilon|z|^k) = \Lambda_\Psi(z) \ .$$

Réciproquement, si $\Lambda_f \leqslant \Lambda_\Psi$, et si $\Phi \in \mathcal{M}_\Psi$, on a $\Lambda_f \leqslant \Phi$, donc il existe, d'après (7), pour tout $\varepsilon > 0$, une constante $K(\varepsilon)$ telle que

$$\log|f(z)| \leq K(\varepsilon) + \Phi(z) + \varepsilon|z|^k \tag{9}$$

soit vrai, donc $f \in B_{\Phi+\varepsilon'|z|^k}$ si $\varepsilon' > \varepsilon$, et, Φ et ε étant arbitraires, $f \in E_\Psi$. C. Q. F. D.

Soit Θ une nouvelle fonction plurisousharmonique. Si $\Lambda_\Theta \leq \Lambda_\Psi$, il est clair que E_Θ se plonge dans E_Ψ, et l'injection naturelle est continue. Donc, si la propriété $\Lambda_\Theta < \Lambda_\Psi$ entraîne $E_\Theta \neq E_\Psi$, l'espace E_Θ sera maigre dans E_Ψ, d'après un théorème de Banach. Il est bien connu (lemme de Choquet) que l'ensemble des fonctions Θ semi-continues supérieurement et inférieures à Ψ admet une base **filtrante** croissante dénombrable, donc, a fortiori, l'ensemble des E_Θ tels que $\Lambda_\Theta < \Lambda_\Psi$. En conséquence, si nous avons montré la propriété précédente, il en résultera que l'ensemble des f, appartenant à E_Ψ, et telles que $\Lambda_f = \Lambda_\Psi$, est <u>non maigre</u> dans E_Ψ pourvu que

$$\Lambda_\Psi = \sup_{\Lambda_\Theta < \Lambda_\Psi} \Lambda_\Theta ,$$

point qui est clair.

Notre résultat sera prouvé, si nous avons montré le fait suivant : Pour tout z_0 donné différent de zéro, et tout $\delta > 0$, il existe f entière telle que $\Lambda_f \leq \Lambda_\Psi$, et telle que $\Lambda_f(z_0) = \Lambda_\Psi(z_0)$.

Lorsque la dimension de l'espace $\underset{\sim}{C}^N$ est égale à 1, ce fait est bien connu, et résulte par exemple des résultats de B. Ja. LEVIN [7]. Supposons qu'il ait été démontré jusqu'à $N - 1$; nous pouvons supposer que z_0 est dans la sous-variété de $\underset{\sim}{C}^N$ définie par $z_N = 0$. Il existe donc une fonction

$$(z_1, \dots, z_{N-1}) \longmapsto g(z_1, \dots, z_{N-1}) ,$$

dont l'indicatrice dans $\underset{\sim}{C}^{N-1}$ est majorée par la restriction de

$$\Lambda_\Psi \text{ à } \{z \mid z_N = 0\} ,$$

et telle que $\Lambda_g(z_0) = \Lambda_\Psi(z_0)$. S'il est possible d'étendre cette fonction en une fonction F définie sur $\underset{\sim}{C}^N$ et telle que $\Lambda_F \leq \Lambda_\Psi$, le problème sera résolu.

Soit Ψ plurisousharmonique dans $\underset{\sim}{C}^N$. Nous posons

$$\Psi'_a = \sup_{|\zeta|<a} \Psi(z + a) ,$$

et Ψ'^{*}_a sera la régularisée plurisousharmonique de Ψ'_a.

Soit toujours Ψ plurisousharmonique dans $\underset{\sim}{C}^N$. Nous introduirons la suite Ψ_j de fonctions plurisousharmoniques suivantes : $z \longmapsto \Psi'_j(z)$ est la régularisée semi-continue supérieurement de

$$z \longmapsto \left(\sup_{|\zeta|<2} \Psi_{j-1}(z_1, \ldots, z_j + \zeta, \ldots, z_N)\right),$$

qui, toujours selon P. LELONG [4], est plurisousharmonique. Nous posons alors

(10) $$\Psi_j = \Psi'_j \star \theta ,$$

où θ a été choisie une fois pour toutes. Supposons Ψ d'ordre k.

Il vient le lemme suivant :

LEMME 2. - $\Lambda_{\Psi'^*_a} = \Lambda_\Psi$; $\Lambda_{\Psi_\theta} = \Lambda_\Psi$; $\Lambda_{\Psi_j} = \Lambda_\Psi$ pour tout j.

Démonstration. - Soit M continue positivement homogène, d'ordre k, et majorant Λ_Ψ. Il vient, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\Psi'^*_a \leq K(\varepsilon) + \sup_{|\zeta|<a} M(z+\zeta) + \varepsilon|z+a|^k ,$$

d'après (7). Comme la fonction M est continue, on a

(11) $$\sup_{|\zeta|<a} M(z+\zeta) \leq M(z) + \varepsilon(z)\ |z|^k ,$$

où $\varepsilon(z)$ tend vers zéro lorsque $|z| \to +\infty$. D'où

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\ r^{-k}\, \Psi'^*_a(r.z) \leq M(z) + \varepsilon .$$

Il vient donc

(12) $$\Lambda_{\Psi'^*_a} \leq \inf_{M\in\mathfrak{M}_\Psi} (M+\varepsilon) .$$

En conséquence, on a

$$\Lambda_{\Psi'^*_a} \leq \Lambda_\Psi ,$$

et l'inégalité en sens inverse étant vraie de $\Psi'^*_a \geq \Psi$, on a l'égalité annoncée.

Maintenant, si θ a son support dans une sphère de rayon b, on a

$$\Psi \leq \Psi \star \theta \leq \Psi'^*_b ,$$

d'où

$$\Lambda_\Psi \leqslant \Lambda_{\Psi_\theta} \leqslant \Lambda_{\Psi'^*_b} \leqslant \Lambda_\Psi \; .$$

De même, on a les inégalités

$$\Psi_{j-1} \leqslant \Psi'_j \leqslant \Psi'^*_{j-1,2} \; ,$$

d'où

$$\Lambda_{\Psi_{j-1}} = \Lambda_{\Psi'_j} = \Lambda_{(\Psi'_j)_\theta} = \Lambda_{\Psi_j} \; .$$

Ceci achève la démonstration du lemme.

Voici maintenant un lemme qui compare l'indicatrice d'une fonction au comportement à l'infini d'une intégrale portant sur cette fonction.

LEMME 3. - Soit Ψ plurisousharmonique d'ordre k , définie sur $\mathbb{C}^N$, et soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}^N$ telle que

$$\int_{\mathbb{C}^N} |f(z)|^2 \, e^{-2\Psi(z)} \, d\lambda(z) < +\infty \; .$$

Alors, on a

$$\Lambda_f \leqslant \Lambda_\Psi \; .$$

Démonstration. - La fonction f s'exprime à l'aide de l'intégrale de **Cauchy :**

$$f(z) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \int \cdots \int_{|u_j - z_j| = 1} \frac{f(u_1 , \ldots , u_n)}{(u_1 - z_1) \ldots (u_n - z_n)} \, du_1 \ldots du_n \; .$$

Soit alors $\tau(x)$ un élément de $\mathcal{D}^+(\mathbb{R}^+)$ tel que $\tau(x) \geqslant 0$ pour tout x , $\tau(x) = 0$ si $x < 1$ ou si $x > 2$,

$$\int_0^\infty \tau(x) \, dx = 1 \; ,$$

et posons

$$\varpi(z) = \tau(|z_1|) \ldots \tau(|z_n|) \; .$$

Si on a posé

$$u_j - z_j = \rho_j \, e^{i\theta_j} \qquad (j = 1 , 2 , \ldots , n) \; ,$$

il vient en intégrant en $\rho_1 , \dots , \rho_n$,

$$(13)\quad f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \dots \int f(\dots ,(z_j + \rho_j e^{i\theta_j}) , \dots) \frac{\varpi(u)}{\rho_1 \dots \rho_n} d\lambda(\rho , \theta) .$$

Ceci est un produit scalaire hilbertien, soit :

$$f(z) = \langle f(u + z) , \varphi(u)\rangle_2 ,$$

où

$$\varphi(u) = (\frac{1}{2\pi})^n \frac{\varpi(u)}{\rho_1 \dots \rho_n} .$$

Alors,

$$f(z) = \langle f(u + z) e^{-\Psi(u+z)} , \varphi(u) e^{\Psi(u+z)}\rangle_2 .$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz, en tenant compte de l'hypothèse du lemme, soit

$$\|fe^{-\Psi}\|_2 = M < + \infty .$$

Il vient donc

$$|f(z)| \leqslant M.\|\varphi(u) e^{\Psi(u+z)}\|_2 \leqslant M.\delta^N e^{\Psi_2'(z)} \leqslant M.\delta^N e^{\Psi_2'^*(z)} ,$$

puisque

$$\|\varphi(u) e^{\Psi(u+z)}\|_2 \leqslant \delta^N \sup_{u\in\sigma(\varpi)} e^{\Psi(u+z)} ,$$

où $\sigma(\varpi)$ désigne le support de la fonction ϖ . En appliquant le lemme 2, il vient

$$\Lambda_f \leqslant \Lambda_\Psi .$$

C. Q. F. D.

LEMME 4. - <u>Quelle que soit la fonction</u> $\eta(r)$ <u>positive tendant vers zéro pour</u> $r \to + \infty$, <u>il existe une fonction</u> $\Phi(r)$ <u>plurisousharmonique d'ordre</u> k , <u>de classe</u> C^∞ , <u>telle que</u> $\Phi(r) \geq \eta(r) r^k$, <u>et telle que</u> $\Phi(r)/r^k \to 0$ <u>pour</u> $r \to \infty$.

<u>Démonstration</u>. - Nous allons chercher $\Phi(r)$ sous la forme

$$(14)\quad \Phi(r) = \alpha(r^2) r^k + \ell.\log(1 + r^2) ,$$

la fonction $\alpha(r^2)$ étant de classe C^∞ , et identique à zéro au voisinage de l'origine.

Calculons la forme de Levi de $\alpha(r^2)\, r^k$. Il vient

$$(15) \qquad L(w) = [\alpha'' u^{k/2} + ku^{k/2-1}\alpha' + \frac{k}{2}(\frac{k}{2} - 1)\, u^{k/2-2}\alpha] \times \langle z \, , \, w\rangle^2$$

$$+ (u^{k/2}\alpha' + \frac{k}{2}u^{k/2-1}\alpha)\, |w|^2 \, , \qquad \text{où} \quad u = r^2.$$

Si $k \leq 2$, par l'inégalité de Schwarz, il vient

$$(16) \quad L(w) \geq \alpha'' u^{k/2} \, |\langle z \, , \, w\rangle|^2 + [(k + 1)\, u^{k/2-1}\alpha' + \frac{k^2}{4} u^{k/2-2}\alpha]|z|^2 \, |u|^2 \, .$$

Pour $k > 2$, nous gardons la forme (15).

Nous imposons $\alpha'' \geq 0$ pour r assez grand. Alors, si

$$\begin{cases} u\alpha' + \frac{1}{2}(\frac{k}{2} - 1)\alpha \geq 0 \, , \\ u\alpha' + \frac{k}{2}\alpha \geq 0 \, , \end{cases} \qquad \text{pour} \quad k > 2 \, ,$$

ou si

$$u\alpha' + \frac{k^2}{4(k + 1)}\alpha \geq 0 \, , \qquad \text{lorsque} \quad k \leq 2 \, ,$$

on aura $L(w) \geq 0$ pour r assez grand. Ces conditions signifient que la courbe $(u \, , \, \alpha(u))$ est convexe, surintégrale de la famille des courbes $(u \, , \, M/u^\lambda)$, M variant, où $\lambda > 0$. Il est clair qu'il existe toujours une telle courbe de classe C^∞ , tendant vers zéro à l'infini, et majorant $\eta(\sqrt{u})$. Maintenant, la fonction $z \longmapsto \log(1 + r^2)$ est strictement plurisousharmonique, donc, en prenant ℓ assez grand, la fonction $z \longmapsto \phi(z)$, définie par la formule (14) ainsi déterminée, sera certainement strictement plurisousharmonique et satisfaira à toutes les conditions du lemme.

C. Q. F. D.

Nous identifions $\underset{\sim}{C}^j$ au sous-espace de $\underset{\sim}{C}^N$, défini par $z_{j+1} = \ldots = z_N = 0$, en associant au point $(z_1 \, , \, \ldots \, , \, z_j)$ le point $z^j = (z_1 \, , \, \ldots \, , \, z_j \, , \, 0 \, , \ldots , \, 0)$. Nous noterons néanmoins z à la place de z^N . Nous noterons par dv^j l'élément de volume canonique de $\underset{\sim}{C}^j$.

LEMME 5. - <u>Soit</u> f <u>holomorphe sur</u> $\underset{\sim}{C}^{j-1}$, <u>et telle que</u>

(17) $$\int_{\underset{\sim}{C}^{j-1}} |f|^2 \exp(-\Psi_{j-1}(z^{j-1}))(1+|z^{j-1}|^2)^{-3(j-1)+1}\, dv^{j-1} < +\infty ,$$

où $3(j-1)-1 \geqslant 0$. Elle est la restriction de g holomorphe en z^j , et telle que

(18) $$\int_{\underset{\sim}{C}^{j}} |g|^2 \exp(-\Psi_j(z^j))(1+|z^j|^2)^{-3j+1}\, dv^j < +\infty .$$

Démonstration. – $\underset{\sim}{C}^{j-1}$ est un hyperplan de $\underset{\sim}{C}^{j}$. Nous opérons comme HÖRMANDER dans son théorème 4.4.3 [2]. On a

(19) $$\int_{|z_j|<1} |f(z^{j-1})|^2\, e^{-\Psi_j(z^j)} (1+|z^{j-1}|^2)^{-3(j-1)+1}\, dv^j$$

$$\leqslant \int_{|z_j|<1} dv_j \Big[\int_{\underset{\sim}{C}^{j-1}} |f(z^{j-1})|^2\, e^{-\Psi_{j-1}(z^{j-1})} (1+|z^{j-1}|^2)^{-3(j-1)+1}\, dv^{j-1}\Big] \leqslant \pi M ,$$

où M désigne la valeur de l'intégrale entre crochets. Car, en effet,

$$|f(z^{j-1})|^2\, e^{-\Psi_j(z^j)} \leqslant |f(z^{j-1})|^2\, e^{-\Psi_{j-1}(z^{j-1})} ,$$

pourvu que $|z_j| < 1$, d'après la définition précédant le lemme 2.

Soit $\omega(|z_j|)$ continue de la variable z_j , égale à 1 si $|z_j| < \frac{1}{2}$, égale à zéro si $|z_j| > 1$, et linéaire entre ces deux valeurs. On a donc

(20) $$\left|\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}_j}\right| \leqslant 1 .$$

On écrit

(21) $$g(z^j) = \omega(z_j)\, f(z^{j-1}) - z_j\, X(z^j) ,$$

et on cherche à déterminer X de sorte que g soit holomorphe. Ceci donne l'équation

(22) $$d''X = z_j^{-1}\, f(z^{j-1})\, d''\omega = z_j^{-1}\, f(z^{j-1})\, \frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}_j}\, d\bar{z}_j = Y .$$

Donc, on a

$$\int_{\underset{\sim}{C}^{j}} |Y|^2\, e^{-\Psi_j(z^j)} (1+|z^j|^2)^{-3(j-1)+1}\, dv^j \leqslant 4\pi M ,$$

en tenant compte de (19) et de (20).

D'après le théorème 4.4.2 de HÖRMANDER [2], il s'ensuit qu'il existe X ,

$$X \in L^2(\underset{\sim}{C}^j \,;\ \Psi_j + (3j)\log(1+|z^j|^2)), \qquad \text{tel que} \quad d''X = Y .$$

On a même

$$(23) \quad 2\int_{\underset{\sim}{C}^j} |X|^2 e^{-\Psi_j(z^j)} (1+|z^j|^2)^{-3j}\, dv^j \leq 4\pi \int_{\underset{\sim}{C}^{j-1}} |f|^2 e^{-\Psi_{j-1}(z^{j-1})} (1+|z^{j-1}|^2)^{-3j}\, dv^j .$$

Donc, la solution g satisfait à

$$(24) \quad \int_{\underset{\sim}{C}^j} |g|^2 e^{-\Psi_j(z^j)} (1+|z^j|^2)^{-3j+1}\, dv^j \leq 3\pi \int_{\underset{\sim}{C}^{j-1}} |f|^2 e^{-\Psi_{j-1}(z^{j-1})} (1+|z^{j-1}|^2)^{-3j+1}\, dv^{j-1} ,$$

à cause de la présence du facteur z_j devant X .

C. Q. F. D.

Nous pouvons, avec ces lemmes, achever la démonstration du théorème 1.

Soit Ψ pluri-sousharmonique d'ordre k , C^∞ , d'indicatrice de croissance régularisée $\Lambda_\Psi = \Lambda$. D'après des résultats classiques de V. BERNSTEIN, il existe (Cf. B. Ja. LEVIN [7]) une fonction $f(z^1)$ telle que $\Lambda_f(z^1) = \Lambda_\Psi(z^1)$ pour tout $z^1 \in \underset{\sim}{C}^1$. Posons

$$(25) \qquad \eta(r) = \sup_{|z^1|=1} (\sup[(r^{-k}\log|f(r.z^1)| - \Lambda(r.z^1)) , 0]) .$$

Soit Φ associé à η comme indiqué dans le lemme 4. Nous prenons la fonction plurisousharmonique

$$(26) \qquad \Theta = 2(\Psi_\theta + \Phi + \log(1+|z|^2)) .$$

Alors, elle est de classe C^∞ , $\Lambda_\Theta = \Lambda_\Psi$, et on a

$$(27) \qquad \int_{\underset{\sim}{C}^1} |f(z^1)|^2 e^{-\Theta(z^1)} dv^1 < +\infty .$$

Nous appliquons $(N-1)$ fois le lemme 5, et nous obtenons une fonction g holomorphe, définie sur $\underset{\sim}{C}^N$, ayant pour restriction à la droite $z_2 = \dots = z_N = 0$

la fonction f , et telle que

$$\int |g|^2 e^{-2\Theta_N(z)} (1+|z|^2)^{3N} dv^N < +\infty .$$

D'après le lemme 3, on a

$$\Lambda_g \leqslant \Lambda_{\Theta_N} ,$$

et comme par le lemme 2

$$\Lambda_{\Theta_N} = \Lambda_\Theta = \Lambda ,$$

le théorème 1 est complètement démontré.

Pour terminer, je note quelques propriétés.

PROPOSITION 1. - <u>L'indicatrice régularisée d'une fonction plurisousharmonique d'ordre</u> k , <u>non nulle, est finie en tout point</u>.

<u>Démonstration</u>. - Nous désignons par n la dimension de l'espace. Pour $n = 1$, le fait est connu ; on peut, par exemple, le montrer comme suit ; si en $z_0 \neq 0$, $\Lambda_\Psi(z_0) = -\infty$, alors on a

$$\Lambda_\Psi(t , z_0) = -\infty , \qquad \text{pour tout } t > 0 ,$$

mais un segment est non polaire, d'où

$$\Lambda_\Psi = 0 .$$

Maintenant, pour tout n , si $\Lambda_\Psi(0) = -\infty$, la fonction Λ_Ψ est continue à l'origine, et on a, en conséquence, $\Lambda_\Psi < 0$ dans un voisinage de zéro, ce qui entraîne $\Lambda_\Psi < 0$ partout, d'où, par le module maximum, $\Psi \equiv 0$. On achève pour $n > 1$ en remarquant que, si $\Lambda_\Psi(z_0) = -\infty$ pour un $z_0 \neq 0$, d'après le cas de $n = 1$ appliqué à la droite complexe $(0 , z_0)$, on a $\Lambda_\Psi(0) = -\infty$, d'où

$$\Psi \equiv 0 .$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2. - <u>L'indicatrice régularisée d'une fonction plurisousharmonique d'ordre</u> k , <u>non nulle, est continue à l'origine</u>.

<u>Démonstration</u>. - Il revient au même de dire qu'elle est bornée inférieurement sur la boule unité de $\underset{\sim}{C}^N$ puisque, par semi-continuité supérieure, elle est déjà bornée supérieurement.

Si A est un ensemble de la boucle unité $\{z \mid |z| = 1\}$ de $\mathbb{C}^N$, nous noterons par A_k l'ensemble des z' de la forme $z' = e^{i(\pi/k)} z$, où $z \in A$. Prenons, pour A, l'ensemble des points de la boule où $\Lambda_\Psi(z) \geq 0$. Alors, je dis que $A \cup A_k$ est égal à toute la boule. En effet, si $u \in A_k$ par une propriété bien connue de la fonction de croissance quand $n = 1$, on a

$$\Lambda_\Psi(e^{-i(\pi/k)} u) + \Lambda_\Psi(u) \geq 0 .$$

Donc $u \notin A$ entraîne $e^{-i(\pi/k)} u \in A$.

Dans ces conditions,

$$- \inf_{z' \in A_k} \Lambda_\Psi(z') \leq \sup_{z \in A} \Lambda_\Psi(z) < + \infty .$$

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (Lars). - L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, Acta Math., Uppsala, t. 113, 1965, p. 89-152.

[2] HÖRMANDER (Lars). - An introduction to complex analysis in several variables. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1966 (The University Series in higher Mathematics).

[3] KISELMAN (C. O.). - On entire functions of exponential type and indicators of analytic functionals, Acta Math., Uppsala, t. 117, 1967, p. 1-35.

[4] LELONG (Pierre). - Fonctions pluri-sousharmoniques et formes différentielles positives, Centro internazionale matematico estivo : Funzioni e varietà complesse [1963. Varenna], 136 p. - Roma, Cremonese, 1963.

[5] LELONG (Pierre). - Fonctions entières (n-variables) et fonctions pluri-sousharmoniques de type exponentiel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 1063-1066.

[6] LELONG (Pierre). - Fonctions entières de type exponentiel dans $\mathbb{C}^n$, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, Fasc. 2, p. 269-318.

[7] LEVIN (B. Ja.). - Distribution of zeros of entire functions. - Providence, American mathematical Society, 1964 (American mathematical Society. Translations of mathematical Monographs, 5).

[8] MARTINEAU (André). - Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, J. Anal. math., Jérusalem, t. 11, 1963, p. 1-164 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[9] MARTINEAU (André). - Equations différentielles d'ordre infini, Séminaire Leray : Equations aux dérivées partielles, 5e année : 1965/66, p. 49-112 (multigr.).

[10] MARTINEAU (André). - Indicatrices de croissance des fonctions entières de N-variables, Invent. Math., Berlin, t. 2, 1966, p. 81-86.

[11] MARTINEAU (André). - Indicatrices de croissance des fonctions entières de N-variables (corrections et compléments), Invent. Math., Berlin, t. 3, 1967, p. 16-19.