Séminaire Lelong.
Analyse

PHILIPPE NOVERRAZ

Extension d'une méthode de séries de Fourier aux fonctions sousharmoniques et plurisousharmoniques

Séminaire Lelong. Analyse, tome 6 (1965-1966), exp. n° 3, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1965-1966__6__A3_0>

Séminaire LELONG
(Analyse)
6e année, 1965/66, n° 3

7 mars 1966

EXTENSION D'UNE MÉTHODE DE SÉRIES DE FOURIER AUX FONCTIONS SOUSHARMONIQUES ET PLURISOUSHARMONIQUES

par Philippe NOVERRAZ

1. Introduction et notations.

Cet exposé se propose de donner la généralisation à n variables d'un théorème de L. A. RUBEL sur la croissance des coefficients de Fourier de $\log |f|$ (où f est une fonction entière).

La démonstration se fera par récurrence sur le nombre de variables, et il sera nécessaire de commencer par étudier des classes de fonctions d'une variable (sousharmonique, différence de fonctions sousharmoniques, etc.) pour lesquelles le théorème est vrai.

On appellera fonction de croissance toute fonction $\lambda(r)$, définie pour $r > 0$, positive, croissante et tendant vers l'infini avec r.

Posons

$$c_k(r , V) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} V(re^{i\theta}) \exp(- ik\theta)\, d\theta \quad .$$

Pour une mesure de Radon σ positive, dont le support ne contient pas l'origine, on notera :

$$\sigma(r) = \int_{|a|\leqslant r} d\sigma(a) \quad ,$$

$$N(r , \sigma) = \int_0^r \sigma(t) \frac{dt}{t} \quad ,$$

$$S(r , k , \sigma) = \frac{1}{k} \int_{|a|\leqslant r} \frac{d\sigma(a)}{a^k} , \qquad S'(r , k , \sigma) = \frac{1}{kr^k} \int_{|a|\leqslant r} \bar{a}^k \, d\sigma(a) \quad ,$$

$$S(r_1 , r_2 , k , \sigma) = S(r_1 , k , \sigma) - S(r_2 , k , \sigma) , \qquad r_1 < r_2 \quad .$$

2. Cas des fonctions sousharmoniques.

Soit $V(z)$ une fonction sousharmonique dans $\underset{\sim}{C}$ tout entier ; pour tout $R > 0$, on a la décomposition de Riesz, à l'aide de la fonction de Green

$$g_R(z , a) = \log \left|\frac{R^2 - \bar{a}z}{R(a - z)}\right| \quad ,$$

$$V(z) = H_R(z) - \int_{|a|<R} g(z\,,\,a)\, d\sigma(a) \qquad |z| < R\ .$$

En développant le noyau, et en calculant les coefficients de Fourier de la décomposition, on obtient le résultat suivant.

PROPOSITION 1. - *Soit* $V(z)$ *une fonction sousharmonique dans* $|z| < R$, *et harmonique au voisinage de l'origine ; alors, si* $2r < R$:

(1) $c_0(r\,,\,V) = V(0) + \int_{|a|\leqslant r} \log \frac{r}{|a|}\, d\sigma(a)$,

(2) $c_k(r\,,\,V) = \frac{1}{2} b_{R,k}\, r^k + \frac{1}{2} \frac{r^k}{R^k} S'(R\,,k\,,\sigma) - \frac{1}{2} S'(r\,,k\,,\sigma) - \frac{1}{2} r^k S(r\,,R\,,k\,,\sigma)$,

(3) $c_{-k} = \overline{c_k}$,

où les $b_{R,k}$ *sont donnés par* $H_R(z) = \mathrm{Re}(\sum b_{R,k}\, z^k)$.

REMARQUE 1. - L'expression (2) peut se simplifier, car $V(z) = \mathrm{Re}(\sum \alpha'_k\, z^k)$ dans un voisinage de l'origine :

(2') $c_k(r\,,\,V) = \frac{1}{2}\alpha'_k\, r^k + \frac{1}{2} r^k S(r\,,\,k\,,\,\sigma) - \frac{1}{2} S'(r\,,\,k\,,\,\sigma)$.

On dira qu'une fonction sousharmonique est de λ-*type fini* s'il existe des constantes A et B telles que :

$$V(z) \leqslant A\lambda(B|z|)\ .$$

Rappelons un lemme bien connu de la théorie des fonctions sousharmoniques où $L(V\,,\,r)$ désigne la moyenne de V sur le cercle de centre à l'origine et de rayon r :

LEMME 1. - Pour toute fonction $V(z)$ sousharmonique telle que $V(0) > -\infty$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) V est de λ-type fini,

(2) $L(V^+\,,\,r) \leqslant A'\,\lambda(B'\,r)$, $V^+ = \sup(V\,,\,0)$,

(3) $L(|V|\,,\,r) \leqslant A''\,\lambda(B''\,r)$.

THÉORÈME 1. - *Une fonction* $V(z)$ *sousharmonique dans* $\mathbb{C}$, *et harmonique au voisinage de l'origine, est de* λ-*type fini, si et seulement si* :

$$|c_k(r\,,\,V)| \leqslant \frac{A\lambda(Br)}{|k| + 1} \qquad k = 0\,,\,\pm 1\,,\,\ldots\ ,$$

où A *et* B *sont des constantes ne dépendant pas de* k .

Démonstration.

(1) ($\Longrightarrow$) D'après l'inégalité $\sigma(r) \leqslant L(V\ ,\ 2r)$,

$$|c_k(r\ ,\ V)| \leqslant \frac{1}{2}\ |b_{R,k}|r^k + \frac{1}{2k}\ (\frac{r}{R})^k\ \sigma(R) + \frac{1}{2k}\ \sigma(r) + \frac{1}{2k}\ \sigma(R) \quad .$$

Pour $R = 2r$, les trois derniers termes sont majorés par $\frac{c\sigma(2r)}{|k| + 1}$.

D'autre part, on sait que

$$H_R(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P(r\ ,\ R\ ,\ \theta - \psi)\ V(R \exp i\psi)\ d\psi \quad ,$$

et que le noyau de Poisson satisfait à :

$$|P(r\ ,\ 2r\ ,\ \varphi + h) - P(r\ ,\ 2r\ ,\ \varphi)| \leqslant 12|h| \quad ,$$

d'où la majoration cherchée de $b_{R,k}\ r^k$ par un théorème classique de séries de Fourier.

(2) ($\Longleftarrow$) L'inégalité de Parseval donne :

$$L(|V|^2\ ,\ r) = \sum\ |c_k(r\ ,\ V)|^2 \leqslant [A'\ \lambda(B'\ r)]^2 \sum \frac{1}{(k+1)^2} \quad ,$$

d'où le résultat par l'inégalité de Schwartz et le lemme 1.

Conséquences du théorème 1 :

THÉORÈME 2. - Si $V(z)$ est une fonction sousharmonique de λ-type fini, on a, pour tout $1 \leqslant p < +\infty$,

$$[L(|V|^p\ ,\ r)]^{1/p} \leqslant A\lambda(Br) \quad .$$

Réciproquement, si l'inégalité précédente a lieu pour un $p \geqslant 1$, $V(z)$ est de λ-type fini.

Dans un sens, la démonstration se fait grâce à l'inégalité de Hölder et, en sens contraire, lorsque $q \geqslant 2$, on applique le théorème de Hausdorff-Young qui dit que la norme L^p de V est majorée par la norme ℓ^q des c_k $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

THÉORÈME 3. - Si $V(z)$ est sousharmonique de λ-type fini, il existe des constantes α et $\beta > 0$ telles que

$$L[\exp\{\alpha\lambda^{-1}(\beta r)V\}\ ,\ r] \leqslant 1 + \varepsilon \quad .$$

Même démonstration que dans [3].

THÉORÈME 4. - La série de Fourier $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(r, V) \exp ik\theta$ d'une fonction sousharmonique converge vers $V(z)$, sauf sur un ensemble E de $\mathbb{R}^2$-mesure nulle qui coupe les cercles centrés à l'origine suivant des ensembles de mesure linéaire nulle.

Il suffit de remarquer que l'ensemble des points où $V \neq \sum c_k \exp ik\theta$ est mesurable, et d'appliquer le théorème de Plessner qui dit qu'une série de Fourier telle que $\sum |c_k|^2 \log(|k| + 1) < +\infty$ converge presque partout.

3. Fonctions δ-sousharmoniques et indicatrice de Nevanlinna.

DÉFINITION 1. - Une fonction à valeur réelle $w(z)$ est dite δ-sousharmonique dans $\mathbb{C}$, s'il existe deux fonctions sousharmoniques u et v telles que :

(1) w est définie sur l'ensemble Δ des points où u et v ne sont pas simultanément égales à $-\infty$.

(2) $w = u - v$ sur Δ.

On dit que le couple (u, v) est une représentation de w.

Toute fonction δ-sousharmonique admet une décomposition de Riesz :

$$w(z) = H(z) - \int g(z, a)\, d\sigma(a) \quad ,$$

avec une mesure σ de signe quelconque.

DÉFINITION 2. - (u, v) est une représentation canonique de w, si les mesures associées à u et v sont les parties positives et négatives de la mesure associée à w.

DÉFINITION 3.(équivalente). - (u, v) est une représentation canonique, si, pour toute représentation (U, V) de w, il existe une fonction sousharmonique s telle que : $s(0) = 0$ et $U = u + s$, $V = v + s$.

Pour une fonction δ-sousharmonique w de représentation canonique (u, v), posons $\lambda' = \sup(u, v)$. On définit avec ARSOVE [1] l'indicatrice de Nevanlinna de w :

$$T(r, w) = L(\lambda', r) \quad .$$

Dans tout ce qui suit, on supposera que w est harmonique au voisinage de l'origine.

Posons :

$$P(r) = \int_{|a|\leqslant r} d\sigma^{-}(a) \ , \qquad \Phi(r) = \int_{|a|\leqslant r} |d\sigma(a)| \ .$$

Pour une représentation canonique :

$$\sup(u \ , \ v) = w^{+} - v \ ,$$

$$2 \sup(u \ , \ v) = |w| + u + v \ ,$$

d'où :

(1) $$T(r \ , \ w) = L(w^{+} \ , \ r) + \int_{0}^{r} P(t) \frac{dt}{t} \ ,$$

(2) $$2T(r \ , \ w) = L(|w| \ , \ r) + \int_{0}^{r} \Phi(t) \frac{dt}{t} \ .$$

DÉFINITION 4. - Une fonction w δ-sousharmonique sera dite de λ-type fini s'il existe des constantes A et B telles que

$$T(r \ , \ w) \leqslant A\lambda(Br) \ .$$

Remarque 2. - Une fonction δ-sousharmonique est donnée, en général, par une représentation $(U \ , \ V)$ dont il est difficile de savoir si elle est canonique ou non. Or

$$\sup(U \ , \ V) = \sup(u \ , \ v) + s \ ,$$

d'où

$$L[\sup(U \ , \ V) \ , \ r] = T(r \ , \ w) + L(s \ , \ r) \geqslant T(r \ , \ w) \ .$$

w sera donc de λ-type fini si, pour une décomposition particulière non nécessairement canonique,

$$L[\sup(U \ , \ V) \ , \ r] \leqslant A\lambda(Br) \ .$$

On dira qu'une fonction w est sousharmonique (resp. δ-sousharmonique) complexe, si $\operatorname{Re} w$ et $\operatorname{Im} w$ sont sousharmoniques (δ-sousharmoniques). De telles fonctions seront dites de λ-type fini, si $\operatorname{Re} w$ et $\operatorname{Im} w$ sont de λ-type fini.

Rappelons le lemme :

LEMME 2. - Si $V(z \ , \ t)$ est sousharmonique en z , sommable en t pour une mesure μ positive à support compact, mesurable pour la mesure produit Lebesgue $\times \mu$, et si $|V(z \ , \ t)| \leqslant M$ uniformément en t sur tout compact,

$$w(z) = \int V(z \ , \ t) \ d\mu(t)$$

est une fonction sousharmonique $\not\equiv -\infty$.

COROLLAIRE. - Si la mesure μ est de signe quelconque (resp. complexe) moyennant les mêmes hypothèses, $w(z)$ est une fonction δ-sousharmonique (resp. δ-sousharmonique complexe).

DÉFINITION 5. - Une mesure σ de signe quelconque sera dite de λ-densité finie s'il existe des constantes A et B telles que

$$\int_0^r \Phi(t) \frac{dt}{t} \leqslant A\lambda(Br) \quad .$$

PROPOSITION 2. - Soit $V(z)$ une fonction δ-sousharmonique dont la mesure associée σ est de λ-type fini, alors

$$|c_k(r , V)| \leqslant A\lambda(Br) \implies |c_k(r , V)| \leqslant \frac{A' \lambda(B' r)}{|k| + 1} \quad .$$

La démonstration se fait suivant un raisonnement de [4].

On peut alors démontrer :

THÉORÈME 5. - Pour toute fonction δ-sousharmonique, telle que $0 \notin \operatorname{supp} \sigma$:

(1) V de λ-type fini entraîne que σ a une λ-densité finie et

$$|c_k(r , V)| \leqslant \frac{A\lambda(Br)}{|k| + 1} \quad ;$$

(2) σ^+ ou σ^- est de λ-densité finie, et $|c_k(r , V)| \leqslant A\lambda(Br)$ entraîne que V est de λ-densité finie.

Les théorèmes 2, 3 et 4 sont encore vrais pour les fonctions δ-sousharmoniques.

Remarque 3. - Le théorème 5 et ses conséquences sont encore valables pour la classe de fonctions satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) f est mesurable et intégrable sur les cercles centrés à l'origine.

(2) Le laplacien Δf (au sens des distributions) est une mesure (de support ne contenant pas l'origine).

La caractéristique de croissance est alors :

$$T(r , f) = L(|f| , r) + \int_0^r \Phi(t) \frac{dt}{t} \qquad \text{où} \quad \Phi(t) = \int_{|a| \leqslant r} |\Delta f| \, d\tau \quad .$$

On pourrait aussi, en considérant les coefficients de Fourier et l'indicatrice de croissance sur les disques centrés à l'origine, obtenir le théorème 5 pour la classe des fonctions localement sommable dont le laplacien Δf est une mesure.

4. Cas des fonctions plurisousharmoniques.

Considérons la classe des fonctions $V(z_1 , \dots , z_n) \not\equiv -\infty$ n-sousharmoniques, c'est-à-dire localement bornées supérieurement, et sousharmoniques séparément par rapport à chaque variable z_j . C'est une classe qui contient celle des fonctions plurisousharmoniques ([2]).

LEMME 3. - Toute fonction n-sousharmonique est sommable sur l'arête des polycercles.

En effet, si on suppose $V \leqslant 0$, la majoration de Poisson donne :

$$V(z_1 , \dots , z_n) \leqslant \left(\frac{1 - \tau}{1 + \tau}\right)^n L(V , 0 , r_k) \qquad \text{pour } |z_j| \leqslant \tau r_j , \quad \tau < 1 ,$$

L désignant la moyenne de V sur l'arête du polycercle, centré à l'origine, de rayon $(r_1 , \dots , r_n)$. Si, pour un polycercle π de rayon $(r_1 , \dots , r_n)$, V n'était pas sommable, on aurait :

$$V(z_1 , \dots , z_n) \equiv -\infty \qquad \text{pour tout } |z_j| \leqslant \tau r_j ,$$

donc aussi dans tout ouvert contenant π , ce qui est impossible.

Si $\lambda(r_1 , \dots , r_n)$ est une fonction de croissance de n variables, on dira que V est de λ-type fini s'il existe des constantes A , B_1 , ... , B_n , telles que

$$V(z_1 , \dots , z_n) \leqslant A\lambda(B_1|z_1| , \dots , B_n|z_n|) .$$

Posons :

$$c_{(k)}[(r) , V] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{+\pi} \dots \int_{-\pi}^{+\pi} V(r_j \exp i\theta_j) \exp(- i \sum k_j \theta_j) \, d\theta_1 \dots d\theta_n$$

ce qui a un sens d'après le lemme 3.

THÉORÈME 6. - Une fonction $V(z_1 , \dots , z_n)$ n-sousharmonique est de λ-type fini si et seulement si

$$|c_{(k)}[(r) , V]| \leqslant A\lambda(B_1 r_1 , \dots , B_n r_n)/ \prod_1^n (|k_j| + 1)$$

$$k_j = 0 , \pm 1 , \dots ; \quad j = 1 , \dots , n .$$

Démonstration.

(1) ($\Longleftarrow$) se fait comme dans le cas $n = 1$, à l'aide de l'égalité de Parseval et du lemme 1 (l'intégrale étant prise alors sur l'arête des polycercles).

(2) ($\Longrightarrow$) Faisons une démonstration par récurrence sur le nombre de variables, et supposons, pour simplifier les notations, que $n = 2$.

Soit z_1 fixé, tel que $V(z_1, z_2)$ soit une fonction de z_2 sousharmonique $\not\equiv -\infty$:

$$w_{k_2,r_2}(z_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} V(z_1, r_2 \exp i\theta_2) \exp(-ik_2\theta_2)\, d\theta_2$$

est alors une fonction δ-sousharmonique de z_1, d'après le corollaire du lemme 2, et satisfait, d'après le théorème 1, pour z_1 fixé à

$$|w_{k_2,r_2}(z_1)| \leqslant \frac{A\lambda(B_1|z_1|, B_2 r_2)}{|k_2| + 1} .$$

Montrons que c'est une fonction de z_1 de λ-type fini pour r_2 fixé.

$$\operatorname{Re} w(z_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} V(z_1, r_2 \exp i\theta_2) \cos k_2\theta_2\, d\theta_2 = u_{k_2,r_2}(z_1) - u'_{k_2,r_2}(z_1) ,$$

en écrivant $\cos = \cos^+ - \cos^-$.

(u, u') est donc une représentation de w_{k_2,r_2} telle que

$$\sup(u, u') \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} V(z_1, r_2 \exp i\theta_2)\, d\theta_2 ,$$

et, d'après la remarque 2 :

$$T(r_1, \operatorname{Re} w_{k_2,r_2}) \leqslant \frac{1}{(2\pi)^2}\iint |V(r_1 \exp i\theta_1, r_2 \exp i\theta_2)|\, d\theta_1\, d\theta_2$$
$$\leqslant A'\lambda(B'_1 r_1, B'_2 r_2) ,$$

Le résultat étant le même pour $\operatorname{Im} w$, w_{k_2,r_2} est alors de λ-type fini en z_1, et satisfait à :

$$|c_{k_1}(r_1, w_{r_2,k_2})| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |w_{k_2,r_2}(r_1 \exp i\theta_1)|\, d\theta_1 \leqslant \frac{A\lambda(B_1 r_1, B_2 r_2)}{|k_2| + 1} ;$$

d'où le résultat en appliquant la proposition 2, et en remarquant que

$$c_{k_1}(r_1, w_{r_2,k_2}) = c_{k_1,k_2}(r_1, r_2, w) .$$

COROLLAIRE. - <u>Si</u> $V(z_1, \ldots, z_n)$ <u>est plurisousharmonique dans</u> $\underset{\sim}{C}^n$:

$$V(z_1, \ldots, z_n) \leqslant A\lambda(B\|z\|) \iff |c_{(k)}(r, V)| \leqslant A'\lambda(B'r)/\prod_1^n (|k_j| + 1) .$$

Comme dans le cas $n = 1$, on peut déduire les résultats suivants :

THÉORÈME 2'. - $V(z_1, \ldots, z_n)$ est plurisousharmonique dans $\underset{\sim}{C}^n$, alors $W(z) \leq A\lambda(B\|z\|)$ entraîne que, pour tout $1 \leq p < +\infty$,

$$\left[\frac{1}{\omega_{2n-1}(1)} \int |V(r\vec{\alpha})|^p \, d\omega_{2n-1}(\vec{\alpha})\right]^{1/p} \leq A' \lambda(B' r) \quad .$$

Réciproquement, si la dernière inégalité a lieu pour un $p \geq 1$, V est de λ-type fini.

THÉORÈME 3'. - Si $V(z_1, \ldots, z_n)$ est plurisousharmonique de λ-type fini, il existe des constantes A et B telles que, pour tout $r \geq 1$,

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}(1)} \int \exp\{A\lambda^{-1}(Br)\, V(r\vec{\alpha})\} \, d\omega_{2n-1}(\vec{\alpha}) \leq 1 + \varepsilon \quad .$$

Dans les deux derniers théorèmes, les intégrales sont prises sur la sphère $\|\vec{\alpha}\| = 1$.

En remarquant que la démonstration du théorème de Plessner se généralise à n variables si l'on suppose que

$$\sum_{(k)} |c_{(k)}|^2 \log(|k_1| + 1) \ldots \log(|k_n| + 1) < +\infty \quad ,$$

on montre :

THÉORÈME 4'. - Pour toute fonction plurisousharmonique $V(z_1, \ldots, z_n)$ (ou plus généralement n-sousharmonique), l'ensemble des points de $\underset{\sim}{C}^n$, où la série de Fourier $\sum c_{(k)}[(r), V] \exp i \sum k_j \theta_j$ ne converge pas vers V, est de $\underset{\sim}{R}^{2n}$-mesure nulle, et coupe l'arête des polycercles centrés à l'origine suivant un ensemble de $\underset{\sim}{R}^n$-mesure nulle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARSOVE (Maynard G.). - Functions representable as differences of subharmonic functions, Trans. Amer. math. Soc., t. 75, 1953, p. 327-365.

[2] LELONG (Pierre). - Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives. - Roma, Istituto matematico dell'Università (Centro internazionale matematico Estivo, Varenna, juillet 1963).

[3] RUBEL (Lee A.). - A Fourier series method for entire functions, Duke math. J., t. 30, 1963, p. 437-442.

[4] RUBEL (Lee A.). - Dualité et fonctions entières. Cours professé à la Faculté des Sciences d'Orsay, 1965/66 (à paraître sous forme multigraphiée).