CHARLES-FRANÇOIS DUCATEAU

Fonctions plurisousharmoniques et convexité complexe dans les espaces de Banach

Séminaire Lelong. Analyse, tome 4 (1962), exp. nº 2, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1962__4__A2_0>

FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES ET CONVEXITÉ COMPLEXE DANS LES ESPACES DE BANACH

par Charles-François DUCATEAU

Cet exposé reprend un article de BREMERMANN [2] sur la convexité complexe dans les espaces de Banach. Nous aurons besoin de généraliser un certain nombre de notions classiques dans le cas de l'espace C^n, telles que fonctions holomorphes, fonctions plurisousharmoniques, domaine d'holomorphie, domaine pseudo-convexe. Nous serons amenés à utiliser des espaces de Banach sur le corps des nombres réels ou complexes, nous noterons B_R ou B_C de tels espaces.

1. Définition des fonctions holomorphes sur un espace de Banach.

DÉFINITION 1. - Une fonction à valeur complexe définie sur un domaine D d'un espace de Banach complexe B_C est dite holomorphe ; si, pour tout $z_0 \in D$ et tout $a \in B_C$ $(a \neq 0)$, la fonction de λ $f(z_0 + \lambda a)$ est une fonction holomorphe de la variable complexe λ, au point $\lambda = 0$.

Cette définition revient à dire que la restriction de la fonction $f(z)$ à toute droite complexe est une fonction holomorphe. Cette propriété est une propriété caractéristique des fonctions holomorphes dans le cas de l'espace C^n, de n variables complexes.

Nous pouvons alors nous demander si une fonction holomorphe, définie comme ci-dessus, est continue en chaque point du domaine D, ou tout au moins bornée localement en tout point du domaine D.

Nous allons maintenant donner un exemple de fonction holomorphe sur un espace de Banach, dont la dimension n'est pas finie, qui n'est bornée au voisinage d'aucun point du domaine D sur lequel la fonction est définie.

Soit la série entière d'une variable

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \quad ,$$

dont le rayon de convergence dans le plan complexe est 1. Soit maintenant un espace de Banach B_C sur les nombres complexes, dont la dimensione st infinie. Donnons-nous une base algébrique de B_C, $(e_i)_{i\in I}$ avec $\|e_i\| = 1$ et un sous-ensemble dénombrable J de I. Pour chaque $n \in J$, soit

$$f_n(z) = 2^n f(z) \quad .$$

Un point $z \in B_C$ s'écrit

$$z = \sum_{i\in I} z_i e_i$$

où z_i sont des nombres complexes égaux à 0 sauf un nombre fini. Si $z_i \notin J$, posons

$$f_i(z) = 0 \quad ,$$

et si $i \in J$,

$$f_i(z) = f_i(z_i) = if(z_i) \quad .$$

L'expression

$$\varphi(z) = \sum_{i\in I} f_i(z)$$

a un sens comme une somme finie en chaque z. D'autre part, soit Δ une droite complexe de B_C. Il existe alors un ensemble fini A tel que si $j \notin A$, tout point de Δ a sa composante sur e_j qui est nulle ; ainsi en tout point de $\Delta \cap \|z\| < 1 = \Delta_1$, la fonction $\varphi(z)$ est une somme finie de fonctions holomorphes sur Δ, en conséquence $\varphi(z)$ est holomorphe sur Δ.

Il est facile de vérifier que $\varphi(z)$ n'est bornée au voisinage d'aucun point de norme inférieure à 1 ; voyons-le au voisinage de l'origine. Soit η un nombre positif compris entre 0 et 1. Soit z le point dont les composantes z_i sur e_i sont :

$$\text{si } i \leq n \;, \quad |z_i| = 2^{-i}\eta \quad ,$$

et

$$\text{si } i > n \;, \quad z_i = 0 \quad .$$

Nous avons alors

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{n} f_i(z) = f(\eta) \sum_{i=1}^{n} \frac{2^r}{2^i} = nf(\eta) \quad ;$$

d'autre part, d'après l'inégalité triangulaire

$$\|z\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \eta = 2\eta \quad ;$$

ainsi dans chaque voisinage de 0, on pourra, quitte à prendre n assez grand, trouver des points où $|\varphi(z)|$ est aussi grand que l'on voudra.

Remarque. - Nous aurions pu ajouter dans la définition 1 l'hypothèse d'être continu ou celle d'être localement borné, et nous aurions défini une classe de fonctions continues ; mais dans ce qui suit nous n'aurons pas besoin de l'hypothèse de continuité.

Nous allons, comme dans le cas de n variables, définir le prolongement analytique d'une fonction holomorphe.

DÉFINITION 2. - Le couple (D, φ_D) formé d'un espace topologique D et d'une application continue de D dans un espace de Banach B_C est dit un domaine étalé dans B_C si tout $z \in D$ possède un voisinage U tel que φ_D induise un homéomorphisme de U sur $\varphi_D(U)$ ouvert de B_C.

DÉFINITION 3. - (D, φ_D) est un prolongement du domaine étalé (D_0, φ_{D_0}) dans B_C, si (D, φ_D) est un domaine étalé dans B_C, et s'il existe un sous-ensemble D_0 de D et un homéomorphisme h de D_0 sur $\hat{D}_0$ tel que

$$\varphi_{D_0} = \varphi_D \circ h \quad .$$

DÉFINITION 4. - Une fonction f, définie sur un domaine (D, φ_D) étalé dans B_C, est dite holomorphe, si tout $z \in D$ possède un voisinage ouvert U sur lequel φ_D induit un homéomorphisme sur l'ouvert $\varphi_D(U)$ de C^n et tel que la fonction $f \circ \varphi_D^{-1}(U)$ [définie sur $\varphi_D(U)$] soit une fonction holomorphe.

Remarquons que $\varphi_D^{-1}(U)$ a un sens, et désigne l'homéomorphisme inverse de φ_D restreint à U.

DÉFINITION 5. - Une fonction f', holomorphe sur un domaine $(D', \varphi_{D'})$ étalé dans B_C, est dite un prolongement analytique de la fonction f, holomorphe sur le domaine (D, φ_D) étalé dans B_C, si $(D', \varphi_{D'})$ est un prolongement de (D, φ_D), et si $f = f' \circ h$ où h est l'injection de D dans D'.

Cette définition est valable pour les fonctions définies sur des domaines de B_C. En considérant ces domaines étalés dans B_C par l'injection, on a ainsi défini ce que nous appelons un prolongement analytique d'une fonction holomorphe définie sur un domaine d'un espace de Banach.

PROPOSITION 1 (Unicité du prolongement analytique). - Si f et g sont deux fonctions holomorphes sur un domaine D étalé dans B_C, et si f et g coïncident sur un sous-domaine non vide D^* de D, alors f et g sont identiques sur D.

Démonstration. - Soit S l'ensemble des points de D où f et g coïncident. On a $D^* \subset S$. Si $S \neq D$, il existe un point z_0 sur la frontière de S par rapport à D. Soit $U(z_0)$ un voisinage de z_0 sur lequel φ_D induit un homéomorphisme sur un ouvert de B_C. Prenons $z_1 \in U(z_0)$ tel que $f(z) = g(z)$ sur un voisinage assez petit de z_1 ; puis $z_2 \in U(z_0)$ avec $f(z_2) \neq g(z_2)$. Considérons la droite joignant $\varphi_D(z_1)$ et $\varphi_D(z_2)$, et les restrictions à cette droite des fonctions $f \circ \varphi_D^{-1}$ et $g \circ \varphi_D^{-1}$; elles coïncident sur un voisinage de $\varphi_D(z_1)$ et diffèrent en $\varphi_D(z_2)$; on aura une contradiction avec une propriété classique des fonctions holomorphes définies sur un domaine de C^1, si nous avons choisi $U(z_0)$ tel que l'intersection de la droite $[\varphi_D(z_1), \varphi_D(z_2)]$ avec $\varphi_D(U)$ soit convexe (ceci sera vérifié si nous prenons pour $\varphi_D(U)$ une boule).

De cette proposition nous déduisons immédiatement la propriété de l'unicité du prolongement analytique. Si f est une fonction holomorphe sur un domaine (D, φ_D) étalé dans B_C, et si $(f_1, D_1, \varphi_{D_1})$ et $(f_2, D_2, \varphi_{D_2})$ sont deux prolongements analytiques, tels qu'il y ait un homéomorphisme $h : D_1$ sur D_2

avec $\varphi_{D_2} \circ h = \varphi_{D_1}$, alors

$$f_1 = f_2 \circ h \quad \text{et} \quad f_2 = f_1 \circ h^{-1} \quad .$$

DÉFINITION 6. - Un domaine (D , φ_D) étalé sur B_C est dit un domaine d'holomorphie s'il existe une fonction f holomorphe sur D qui ne possède pas de prolongement analytique propre.

On entend par prolongement analytique propre d'une fonction f un prolongement $(f' , D' , \varphi_{D'})$ tel que l'homéomorphisme h de D sur une partie de D' ne soit pas une application sur D .

En particulier on a la notion de domaine d'holomorphie, lorsque D est un domaine contenu dans B_C .

2. Fonctions distances associées à un domaine d'un espace de Banach B .

Les notions introduites dans ce paragraphe s'appliquent indifféremment avec C ou R comme corps de base ; aussi nous écrirons un espace de Banach réel ou complexe pour B sans indice, et nous désignerons par K le corps des scalaires R ou C .

DÉFINITION 7. - Soit D un domaine d'un espace de Banach B sur le corps K .

a. Soit $x \in D$; on désigne par $[D](x)$ la fonction qui associe à x la borne supérieure des nombres r tels que la boule de centre x et de rayon r soit contenue dans D .

b. Soit $a \in B$ avec $\|a\| = 1$; on désigne par $[D]_a (x)$ la fonction qui, à tout $x \in D$, associe la borne supérieure des nombres r tels que l'ensemble des points $x + \lambda a$ (où $\lambda \in K$ et $|\lambda| \leq r$) soit contenu dans D .

On remarque que si $D \neq B$ alors la fonction $[D](x)$ est toujours finie quel que soit x ; par contre, il est possible d'avoir des $x \in D$ tels que $[D]_a (x) = + \infty$ même si $D \neq B$.

PROPOSITION 2. - La fonction $[D](x)$ est continue en x . La fonction $[D]_a (x)$ est semi-continue inférieurement en x .

Nous ne démontrerons que la deuxième assertion, la démonstration de la première étant analogue. Nous pourrions supposer $D \neq B$, car si $D = B$, alors

$$[D]_a\ (x) \equiv +\infty \qquad ,$$

donc continue.

Supposons d'abord

$$[D]_a\ (x) = c \neq +\infty \qquad ,$$

soit ε, avec $0 < \varepsilon < c$

$$H = \{z \mid z = x + \lambda a\ ,\ |\lambda| \leqslant c - \varepsilon\}$$

est compact, et il existe un δ tel que toute boule centrée sur K et de rayon $\leqslant \delta$, soit contenue dans D ; prenons y' avec $\|y' - x\| \leqslant \delta$, on a

$$\|y + \lambda a - (x + \lambda a)\| \leqslant \delta \qquad ;$$

on en déduit, si $|\lambda| \leqslant c - \varepsilon$, qu'on a : $y + \lambda a \in D$, c'est-à-dire

$$[D]_a\ (y) \geqslant [D]_a\ (x) - \varepsilon \qquad ;$$

ainsi $[D]_a\ (x)$ est semi-continue inférieurement en x.

Si

$$[D]_a\ (x) = +\infty$$

on a le même raisonnement en remplaçant $c - \varepsilon$ par M où $M > 0$.

3. Fonctions plurisousharmoniques sur un domaine d'un espace de Banach sur le corps des complexes ; comparaison avec le cas de C^n.

DÉFINITION 8. - Une fonction V définie sur un domaine D d'un espace de Banach B_C à valeurs réelles ou $-\infty$ est plurisousharmonique si :

a. V est semi-continue supérieurement ; $V \not\equiv -\infty$.

b. La restriction de V à une droite complexe de B_C est une fonction sous-harmonique ou la constante $-\infty$ sur chacune des composantes connexes de l'intersection de cette droite avec D.

Si V est plurisousharmonique, a et b nombres réels avec $a \geq 0$, alors $aV + b$ est plurisousharmonique.

PROPOSITION 3. - Une suite décroissante de fonctions plurisousharmoniques a une limite qui est plurisousharmonique ou la constante $-\infty$.

Ceci résulte immédiatement du fait que la limite d'une suite décroissante de fonction semi-continue supérieurement est semi-continue supérieurement, et que si les fonctions sont sousharmoniques sur une droite complexe, leur limite décroissante est aussi sousharmonique ou $-\infty$.

PROPOSITION 4. - Pour qu'une fonction définie sur un domaine D soit plurisousharmonique, il faut et il suffit qu'en tout point de D il existe un voisinage où la restriction de la fonction soit plurisousharmonique.

Cette propriété locale des fonctions plurisousharmoniques se déduit immédiatement de la définition.

Nous allons maintenant rappeler les propriétés des fonctions plurisousharmoniques définies sur C^n (pour les démonstrations, voir [3]).

Nous désignerons par $L(V , M , r)$ la moyenne de la fonction V sur l'arête d'un polycercle de centre M, défini par $|z_i| \leq r_i$ avec $r = (r_1 , \dots , r_n)$.

Si V est une fonction plurisousharmonique définie sur un domaine $D \subset C^n$, alors $L(V , M , r)$ est fini. On a $V(M) \leq L(V , M , r)$ pour r asez petit.

PROPOSITION 5. - Pour qu'une fonction V définie sur un domaine $D \subset C^n$ soit plurisousharmonique, il faut et il suffit qu'elle soit semi-continue supérieurement, et que, pour tout point M, et tout système $[e_1 , \dots , e_n]$ de n vecteurs indépendants, il existe ρ tel que la moyenne sur le polycercle de centre M d'axes $e_1 , \dots , e_n$, et de rayon $r_i < \rho$, $L(V , M , r)$ soit inférieure ou égale à $V(M)$.

PROPOSITION 6a. - Pour qu'une fonction définie sur un domaine D de C^n et de classe C^2 soit plurisousharmonique, il faut et il suffit que la forme hermitienne $\sum_{p,q} \frac{\partial^2 V}{\partial z_p \, \partial \bar{z}_q} = \lambda_p \bar{\lambda}_q$ soit semi définie positive.

PROPOSITION 6b (cf. [6]). - *Pour qu'une fonction* V *soit plurisousharmonique* $(-\infty \leq V < +\infty)$, *il faut et il suffit* :

a. *qu'elle soit localement sommable,*

b. *que la distribution*

$$\delta(V , \vec{\lambda}) = \sum_{p,q} \frac{\partial^2 r}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} = \lambda_p \bar{\lambda}_q$$

soit une mesure positive pour tout vecteur $\vec{h}$ *complexe,*

c. *qu'en tout point,* V *ait la valeur de son maximum en mesure.*

PROPOSITION 7. - *Toute fonction plurisousharmonique est la suite d'une suite décroissante de fonctions plurisousharmoniques de classe* C^∞ .

PROPOSITION 8. - *On a*

$$\lim_{r \to 0} (V , M , r) = V(M)$$

pour toute fonction plurisousharmonique sur un domaine de C^n , *où* $L(V , M , r)$ *est de plus fonction croissante des* r_i .

PROPOSITION 9. - *Pour qu'une fonction* V , *définie sur un domaine* D *de* C^n , *à valeur réelle ou* $-\infty$, *soit plurisousharmonique, il faut et il suffit que*

a. V *soit sousharmonique dans* R^{2n} ,

b. V *reste sousharmonique dans* R^{2n} *par des transformations linéaires à coefficients complexes de* C^n .

PROPOSITION 10. - *Soit une famille* $(V_i)_{i \in I}$ *localement bornée de fonctions plurisousharmoniques définies sur un domaine* D *de* C^n ; *la plus petite majorante semi continue supérieurement (ou régularisée supérieure) est plurisousharmonique.*

Les propositions 5, 6, 8 et 9 qui font intervenir des notions n'existant que dans le cas de dimension finie, n'ont pas de sens en dimension infinie.

Les propositions 7 et 10 ont un énoncé qui a un sens en dimension infinie, mais les méthodes de démonstration ne semblent pas s'étendre au cas infini.

Nous pouvons donner l'énoncé suivant moins fort que la proposition 10.

PROPOSITION 11. - Soit une famille $(V_i)_{i\in I}$ de fonctions plurisousharmoniques définies sur un domaine D d'un espace de Banach complexe, si

$$W(z) = \sup_{i\in I} V_i(z)$$

est une fonction semi-continue supérieurement, alors $W(z)$ est plurisousharmonique.

En effet, pour z_0 et a fixés,

$$W(z_0 + \lambda a) = \sup_{i\in I} V_i(z_0 + \lambda a) \quad ,$$

donc W est fonction sousharmonique de λ comme enveloppe supérieure, qui est fonction semi-continue de λ.

4. Convexité dans les espaces de Banach réels.

DÉFINITION 9. - Une fonction U définie sur un domaine D d'un espace de Banach réel B_R est convexe si sa restriction à toute composante connexe de l'intersection de D avec une droite quelconque de B est une fonction convexe d'une variable.

DÉFINITION 10. - Un domaine D d'un espace de Banach B_R réel est convexe lorsque pour tout couple x_1, x_2 de points de D le segment joignant x_1 et x_2 est contenu dans D.

THÉORÈME 1. - Soient un espace de Banach réel B_R, D un domaine de cet espace. Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

a. D est convexe.

b. L'intersection de D avec tout sous-espace affine de dimension finie est convexe.

c. Pour toute norme sur B_R tel que D soit un domaine, si $a \in B_R$ avec $\|a\| = 1$, alors la fonction $-\log[D]_a(x)$ est convexe.

d. Pour toute norme sur B_R tel que D soit un domaine, la fonction $-\log[D](x)$ est convexe.

e. Soit sur B_R la topologie définie par une norme faisant de D un domaine ; si S_t est une suite continue de segments ouverts $0 \leqslant t \leqslant 1$, (T_t désignant les extrémités de S_t), telle que $S_t \subset D$ pour $0 < t \leqslant 1$ et $T_t \subset D$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$; alors $S_t \subset D$.

(a) $\Longrightarrow$ (c). - Soient D un domaine convexe et deux points x_1 et $x_2 \in D$. On peut écrire

$$x_1 = x_0 + t_1 b \qquad x_2 = x_0 + t_2 b \quad \text{avec } \|b\| = 1 \qquad .$$

Soient

$$x_{1,\theta} = x_0 + t_1 b + \theta[D]_a (x_0 + t_1 b)a \qquad -1 < \theta < 1$$

$$x_{2,\theta} = x_0 + t_2 b + \theta[D]_a (x_0 + t_2 b)a \qquad .$$

On a $x_{1,\theta}$ et $x_{2,\theta} \in D$.

Soit $\ell(t)$ une fonction affine de la variable t définie sur le segment $x_1 x_2$; et soit

$$m = \inf_{t_1 \text{ ot } t_2} [D]_a (x_0 + tb) \exp(\ell(t)) \qquad .$$

On désigne par

$$x(t , \theta) = x_0 + tb + \theta m \exp(-\ell(t)) a \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$

les points $x(t_1 , \theta)$ et $x(t_2 , \theta)$ qui sont dans D , ainsi que les segments joignant deux tels points ; en particulier, si λ_1 et $\lambda_2 \geqslant 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, le point

$$\frac{\lambda_1 x(t_1 , \theta) + \lambda_2 x(t_2 , \theta)}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$= x_0 + \frac{\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2}{\lambda_1 + \lambda_2} b + \theta m \frac{\lambda_1 \exp(-\ell(t_1)) + \lambda_2 \exp(-\ell(t_2))}{\lambda_1 + \lambda_2} a$$

est contenu dans D . Or la fonction $\exp(-\ell(t))$ est convexe c'est-à-dire

$$0 < \exp(-\ell(t)) \leqslant \frac{\lambda_1 \exp(-\ell(t_1)) + \lambda_2 \exp(-\ell(t_2))}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \text{où} \quad t = \frac{\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad .$$

Ainsi le point $x(t, \theta)$ est sur le segment d'extrémités $x(t, 0)$ et $\dfrac{\lambda_1 x(t_1, \theta) + \lambda_2 x(t_2, \theta)}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Nous avons $x(t, \theta)$ et $x(t, -\theta) \in D$ et l'inégalité

$$[D]_a (x_0 + tb) \geqslant m \exp(-\ell(t)) \quad .$$

D'où :

$$\ell(t) \geqslant -\log[D]_a (x_0 + tb) + \log m \quad ,$$

si on prend $\ell(t)$ tel que, pour $t = t_1$ et t_2 ,

$$\ell(t) \geqslant -\log[D]_a (x_0 + tb) \quad ,$$

on a $\log m \geqslant 0$, et en conséquence

$$\ell(t) \geqslant -\log[D]_a (x_0 + tb) \text{ , pour } t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \quad .$$

Comme cette inégalité est vraie quels que soient x_1 et x_2 la fonction $-\log[D]_a (x_0 + tb)$ est convexe.

(c) $\Longrightarrow$ (d). - On a

$$-\log[D](x) = \sup_{\|a\|=1} -\log[D]_a (x) \quad ,$$

donc $-\log[D](x)$ enveloppe supérieure de fonctions convexes est convexe.

Les deux démonstrations précédentes restent valables si on choisit une autre norme définissant la même topologie sur B_C , et même plus généralement pour toute norme compatible avec la structure vectorielle de B_C faisant de D un domaine.

(d) $\Longrightarrow$ (e). - Soient une famille S_t de segments ouverts dépendant continûment du paramètre t avec $0 \leqslant t \leqslant 1$, T_t les extrémités.

Faisons l'hypothèse

$$T_t \subset D \quad \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \ , \text{ et } \ S_t \subset D \quad \text{si} \quad 0 < t \leqslant 1 \qquad ;$$

$-\log[D](x)$ est convexe, donc

$$\sup_{x \in S_t \cup T_t} - \log[D](x) = \sup_{x \in T_t} - \log[D](x) \quad \text{avec} \quad 0 < t \leqslant 1$$

ainsi

$$\inf_{x \in S_t \cup T_t} [D](x) = \inf_{x \in T_t} [D](x) \quad \text{avec} \quad 0 < t \leqslant 1 \qquad .$$

Comme la famille est continue et que $[D](x)$ est une fonction continue, on a

$$\inf_{x \in S_0 \cup T_0} [D](x) = \inf_{x \in T_0} [D](x) \qquad ,$$

donc

$$[D](x) > 0 \quad \text{sur} \quad S_0 \quad \text{et} \quad S_0 \subset D \qquad .$$

(e) $\Longrightarrow$ (a). - Considérons le produit topologique $D \times D$, et représentons un segment joignant deux points a , b de D par le couple $(a , b) \in D \times D$, et appelons Δ l'ensemble des $(a , b) \in D \times D$ tel que le segment $[a , b]$ soit contenu dans D . L'assertion e indique que Δ est fermé (une suite $[a_n , b_n]$ de A converge vers $[a , b]$, alors $(a , b) \in \Delta$). D'autre part, Δ est ouvert, en effet soit un segment ab contenu dans D , comme $[a , b]$ est compact, il existe un δ tel que toutes les boules centrées sur $[a , b]$ de rayon $\leqslant \delta$ soient contenues dans D . Ainsi si a' et b' sont tels que

$\|a' - a\| \leqslant \delta$, $\|b' - b\| \leq \delta$ le segment $[a' , b']$ est contenu dans D . Ainsi $\Delta = D \times D$ et D est convexe.

On remarque que la propriété de convexité, dans un espace de Banach, ne dépend pas de la norme, ni de la topologie, mais seulement de la structure d'espace vectoriel. On remarque que dans les démonstrations (c) $\Longrightarrow$ (a) $\Longrightarrow$ (e) $\Longrightarrow$ (a) il suffit de prendre les propriétés pour une norme particulière pour avoir la propriété (a).

5. Pseudo-convexité dans les espaces de Banach complexes.

DÉFINITION 11. - Un domaine D d'un espace de Banach complexe B_C sera dit pseudo-convexe si, pour tout $a \in B_C$, $\|a\| = 1$ la fonction $-\log[D]_a(z)$ est plurisousharmonique sur D .

THÉORÈME 2. - Si un domaine D est pseudo-convexe, l'intersection de D avec toute variété affine V de B_C est une réunion de domaines pseudo-convexes pour la structure d'espace de Banach induite sur V .

Inversement si les composantes connexes de l'intersection d'un domaine D avec les sous-variétés affines de dimension 2 sont pseudo-convexes. D est pseudo-convexe

Soit V une variété affine de B_C ; la norme de B_C y induit une norme. Si a est parallèle à V , alors on peut définir la distance $[D \cap V]_a(z)$ pour $z \in D \cap V$, et cette fonction est la restriction à V de la fonction $[D]_a(z)$. Or $-\log[D]_a(z)$ est plurisousharmonique, D étant pseudo-convexe, ainsi si $D \cap V$ est connexe, $-\log[D \cap V]_a(z)$ est plurisousharmonique. On remarquera que $D \cap V$ n'est pas nécessairement connexe, mais chacune de ses composantes connexes est pseudo-convexe par le raisonnement précédent.

Inversement, soient une droite $z_0 + \lambda b$ de B_C et $a \in B_C$ avec $\|a\| = 1$. La restriction de $-\log[D]_a(z)$ au sous-espace $V = z_0 + \lambda b + \mu a$ est $-\log[D \cap V]_a(z)$, et est plurisousharmonique sur chacune des composantes connexes de $D \cap V$, donc $-\log[D]_a(z)$ est plurisousharmonique et D est pseudo-convexe.

PROPOSITION 12. - Soit une nouvelle norme équivalente sur l'espace de Banach B_C et soit $[D]'_a(z)$ la fonction distance correspondante à cette norme. Si $-\log[D]_a(z)$ est plurisousharmonique, alors la fonction $-\log[D]'_a(z)$ est plurisousharmonique.

Cette propriété résulte immédiatement de la propriété du cas où B_C est l'espace C^n , en prenant des restrictions des fonctions ci-dessus à des sous-espaces de dimension finie.

THÉORÈME 3. - Pour qu'un domaine D d'un espace de Banach B_C soit pseudo-convexe, il faut et il suffit que la fonction $-\log[D](z)$ soit plurisousharmonique.

Si D est pseudo-convexe $-\log[D]_a(z)$ est plurisousharmonique pour tout $a \in B_C$ avec $\|a\| = 1$, or

$$- \log[D](z) = \sup_{\|a\|=1} - \log[D]_a(z)$$

et est continue ; d'après la proposition 1, $-\log[D](z)$ est plurisousharmonique.

Soit V une variété affine de dimension finie, nous pouvons écrire

$$V = \{z \mid z = z_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i\} \qquad ,$$

et soit la fonction $W(z)$ définie sur $D \cap V$ par

$$W(z) = \sup[- \log[D](z) , \log|\lambda_i|] \qquad ,$$

$W(z)$ est le sup d'un nombre fini de fonction plurisousharmonique, et est donc plurisousharmonique. Nous avons donc, sur $D \cap V$, une fonction plurisousharmonique $W(z)$ avec $W(z) \to +\infty$ si z tend vers un point-frontière de D , ceci étant valable sur chaque composante connexe de $D \cap V$, donc $D \cap V$ est réunion de ses composantes connexes pseudo-convexes, [propriété de la pseudo-convexité à dimension finie] ; comme on peut choisir V comme une quelconque variété affine de dimension 2 , D est pseudo-convexe, d'après le théorème 2.

PROPOSITION 13. - Si un domaine D est pseudo-convexe dans un espace de Banach B_C , il existe une fonction plurisousharmonique telle que l'adhérence de l'ensemble des z tel que $V(z) < M$ (quel que soit $M > 0$) soit contenue dans D .

En effet la fonction $-\log[D](z)$ est plurisousharmonique et tend vers $+\infty$ si z tend vers un point-frontière.

PROPOSITION 14. - Si un domaine D est pseudo-convexe, il possède la propriété "des suites continues de disques" :

Soit une suite continue de disques S_t, $0 \leq t \leq 1$, de frontière T_t, si $S_t \subset D$ pour $0 < t \leq 1$, et $T_t \subset D$ pour $0 \leq t \leq 1$, alors $S_0 \subset D$.

Nous allons considérer la fonction $-\log[D](z)$; comme elle est sousharmonique sur toute droite complexe, on a alors le principe du maximum qui nous donne :

$$\sup_{S_t \cup T_t} - \log[D](z) = \sup_{T_t} - \log[D](z) \quad \text{pour} \quad 0 < t \leq 1$$

grâce à la condition de continuité sur S_t, et la continuité de $-\log[D](z')$, nous avons

$$\sup_{S_0 \cup T_0} - \log[D](z) = \sup_{T_0} - \log[D](z) \qquad ,$$

on a ainsi sur S_0

$$[D](z) \geq \inf_{T_0} [D](z) = m > 0 \qquad ,$$

et

$$[D](z) \neq 0 , \qquad S_0 \subset D \qquad .$$

6. Pseudo-convexité et domaine d'holomorphie.

Nous aurons besoin du lemme ci-dessous de prolongement d'une fonction holomorphe.

LEMME 1. - Soient D un domaine dans un espace de Banach complexe B_C, S un domaine simplement connexe borné d'une droite complexe $z_0 + \lambda b$ de B_C, T la frontière de S, avec S et $T \subset D$; on suppose de plus qu'il existe une fonction $x(\lambda)$ holomorphe de la variable λ pour $\lambda \in S$ continue et différente de 0 sur $S \cup T$, et tel que

$$|X(\lambda)|[D]_a\ (z_0 + \lambda b) \geq m > 0 \ \underline{\text{pour}} \ \lambda \in T$$

<u>et</u> $a \in B_C$ <u>avec</u> $\|a\| = 1$. <u>Alors toute fonction holomorphe dans</u> D <u>peut se prolonger en une fonction holomorphe en tous les points de</u> A .

$$A = \{z \mid z_0 + \lambda b + \mu a\} \text{ avec } \lambda \in S \cup T \text{ et } |\mu| \leq |X(\lambda)|^{-1} m\} \quad .$$

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans D , nous devons la prolonger sur A , puis montrer que ce prolongement, c'est-à-dire que sa restriction à toute droite complexe, est holomorphe. Pour cela, soient V l'espace affine défini par z_0 , les vecteurs b , a et d avec $\|d\| = 1$ et $d \in B_C$. On peut écrire

$$V = \{z \mid z = z_0 + \lambda b + \mu a + \nu d\} \quad .$$

$f(z)$ holomorphe sur $D \cap V$, $\lambda \in T$, on a

$$[D]_a\ (z_0 + \lambda b) \geq |X(\lambda)|^{-1}\ m \quad ;$$

comme T est compact, l'ensemble des z défini par

$$z = z_0 + \lambda b + \mu a \text{ avec } \lambda \in T \text{ et } |\mu| \leq |X\lambda|^{-1}\ (m - \varepsilon)$$

est compact ; et il existe $\delta > 0$ tel que les points

$$z = z_0 + \lambda b + \mu a + \nu d\ , \quad \lambda \in T\ , \quad |\mu| \leq |X(\lambda)|^{-1}\ (m - \varepsilon) \text{ et } |\nu| < \delta$$

soient contenus dans D . Soit A' l'ensemble de ces points, A' est compact dans le sous-espace V de B_C .

La restriction de f à C' est bornée. Soit M cette borne. Considérons le développement en série de μ et ν de la fonction $f(z_0 + \lambda b + \mu a + \nu d)$, il s'écrit

(1) $$f(z_0 + \lambda b + \mu a + \nu d) = \sum_{p,q \geq 0}^{+\infty} u_{p,q}\ \mu^p\ \nu^q$$

pour $\lambda \in T$ et, $|\mu| \leqslant |X(\lambda)|^{-1}(m-\varepsilon)$, $|\nu| < \delta$, on a $|f| \leqslant M$. On en déduit, grâce à la majoration de Cauchy,

$$|u_{p,q}| \leqslant M\delta^{-p}(m-\varepsilon)^{-p}|X(\lambda)|^{p}, \qquad \lambda \in T$$

ou encore

$$|u_{p,q}|X(\lambda)|^{-p}| \leqslant M\delta^{-p}(m-\varepsilon)^{-p}, \qquad \lambda \in T$$

Le côté gauche est une fonction holomorphe de λ , nous pouvons alors appliquer le principe du maximum à S et T et nous avons la majoration précédente, valable même si $\lambda \in S \cup T$, la série (1) est donc uniformément convergente sur tout compact contenu dans l'ensemble des z tel que $\lambda \in S \cup T$,

$$|\mu| < (m-\varepsilon)|X(\lambda)|^{-1} \quad \text{et} \quad |\nu| < \delta \quad .$$

Soit A^* cet ensemble, $f(z)$ se prolonge donc par la somme de la série sur l'ensemble A^* .

Maintenant faisons varier d avec $\|d\| = 1$; on obtiendra une fonction définie sur un ouvert contenant A où

$$A = \{z \mid z = z_0 + \lambda b + \mu a + \nu d \quad \text{avec} \quad \lambda \in S \cup T, \ |\mu| < m|X(\lambda)|^{-1}\} \quad .$$

Il reste à voir que ce prolongement est univalent. En effet l'hypothèse de simple connexité de S entraîne que les coefficients $u_{p,q}$ des séries (1), lorsque (λ) varie, sont les coefficients de Taylor d'une fonction univalente sur S .

LEMME 2. - <u>Soit un domaine d'holomorphie</u> D ; <u>soient</u> S , T <u>et</u> $X(\lambda)$ <u>des données vérifiant les conditions du lemme 1 : alors nous avons</u>

$$\inf_{T} |X(\lambda)|[D]_a(z) = \inf_{S\cup T} |X(\lambda)|[D]_a(z) \quad .$$

Si le premier membre est différent de 0 , posons-le égal à m $(m > 0)$, l'ensemble C du lemme 1 est contenu dans D c'est-à-dire

$$[D]_a (z_0 + \lambda b) \geqslant m\, [|X(\lambda)|]^{-1} \quad \text{pour} \quad \lambda \in S \cup T$$

et

$$|X(\lambda)|\, [D]_a (z_0 + \lambda b) \geqslant m \quad \text{pour} \quad \lambda \in S \cup T \quad .$$

Si le premier membre $= 0$, le second aussi.

On aurait des énoncés analogues en remplaçant $[D]_a (z_0 + \lambda b)$ **par** $[D] (z_0 + \lambda b)$.

THÉORÈME 4. - Tout domaine d'holomorphie d'un espace de Banach B_c est un domaine pseudo-convexe.

Soit $a \in B_c$, avec $\|a\| = 1$, on va montrer que $-\log[D]_a (z)$ est plurisousharmonique. On va supposer que $-\log[D]_a (z)$ n'est pas plurisousharmonique, c'est-à-dire qu'il existe une droite complexe $z_0 + \lambda b$ et une composante connexe de l'intersection de D avec sa droite où $-\log[D]_a (z)$ n'est pas sousharmonique ; c'est-à-dire qu'il existe un disque S de centre z de frontière T , et une fonction $h(\lambda)$ harmonique, telle que

$$h(\lambda) \geqslant -\log[D]_a (z + \lambda b) \quad \text{sur} \quad \lambda \in T$$

et un point $\lambda_0 \in S$ avec

$$h(\lambda_0) < -\log[D]_a (z_0 + \lambda b) \quad .$$

Soit $h'(\lambda)$ la fonction conjuguée de $h(\lambda)$, on a les inégalités :

$$|\exp(h(\lambda) + ih'(\lambda))|\, [D]_a (z + \lambda b) \geqslant 1 \quad \text{pour} \quad \lambda \in T$$

et

$$|\exp(h(\lambda_0) + ih'(\lambda_0))|\, [D]_a (z + \lambda_0 b) < 1 \quad .$$

On a une contradiction avec le lemme 2 qui établit l'énoncé.

Nous rappelons que si nous sommes dans le cas de C^n le théorème 4 admet une réciproque : tout domaine pseudo-convexe est un domaine d'holomorphie. Mais dans le cas où B_C a une infinité de dimensions, la dimension ne se transpose pas directement, et la question est ouverte de savoir si cette réciproque est exacte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BREMERMANN (H. J.). - Complex convexity, Trans. Amer. math. Soc., t. 82, 1956, p. 17-51.

[2] BREMERMANN (H. J.). - Holomorphic functionals and complex convexity in Banach spaces, Pacific J. Math., t. 7, 1957, p. 811-831.

[3] LELONG (Pierre). - Les fonctions plurisousharmoniques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 62, 1945, p. 301-338.

[4] LELONG (Pierre). - La convexité et les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 31, 1952, p. 191-219.

[5] LELONG (Pierre). - Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques, J. Anal., Jérusalem, t. 2, 1953, p. 178-208.

[6] LELONG (Pierre). - Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 36, 1957, p. 268-303.

[7] NORGUET (François). - Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes, Bull. Soc. math. France, t. 82, 1954, p. 137-159.