PIERRE LELONG

Éléments positifs d'une algèbre extérieure complexe avec involution

Séminaire Lelong. Analyse, tome 4 (1962), exp. nº 1, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1962__4__A1_0>

ÉLÉMENTS POSITIFS D'UNE ALGÈBRE EXTÉRIEURE COMPLEXE AVEC INVOLUTION

par Pierre LELONG

1. Introduction. - L'étude des fonctions analytiques de $n > 1$ variables complexes, plus généralement celle des structures complexes, fait intervenir des formes homogènes du type $(1,1)$:

$$t = i \sum_{p,q} t_{p,q}\, dz_p \wedge d\bar{z}_q \ , \qquad p\ ,\ q = 1\ ,\ \ldots\ ,\ n \tag{1}$$

avec la condition $\sum t_{p,q} h_p \overline{h_q} \geqslant 0$, pour tout vecteur $\vec{h} = (h_k)$ complexe. Rappelons qu'à une fonction V (à valeurs réelles) plurisousharmonique est attachée une mesure

$$\delta(V\ ,\ \vec{h}) = \sum_{p,q} \frac{\partial^2 V}{\partial z_p\, \partial \bar{z}_q} h_p \overline{h_q} \tag{2}$$

positive pour tout $\vec{h}$. On préférera interpréter la condition sur la forme extérieure t correspondante, obtenue en remplaçant $h_p \overline{h_q}$ par $i dz_p \wedge d\bar{z}_q$. Elle s'écrit $t = i d_z d_{\bar{z}} V$, et est dans ce cas une forme généralisée (ou courant, au sens de G. de RHAM). On est conduit ainsi à la notion de forme positive de degré 1 relativement à l'algèbre extérieure $E_{2n}(dz\ ,\ d\bar{z})$. La notion s'étend au degré p, $0 \leqslant p \leqslant n$. Les formes positives de degré p sont de type $(p\ ,\ p)$ et forment un cône convexe E_+^p. D'autre part, les coefficients peuvent être pris dans un espace vectoriel (cas des courants) ou dans un anneau (par exemple celui des fonctions continues). Dans ce dernier cas, un monôme, produit (extérieur) de q formes positives de degré 1, est encore une forme positive ; on obtiendra un cône positif dont les éléments sont multipliables.

2. Eléments positifs. - Plaçons-nous d'abord dans le cas d'une algèbre extérieure complexe E_{2n} sur le corps K des constantes complexes, avec l'involution $a \to \bar{a}$ qui se ramène à la conjugaison sur K. On considèrera une base autoconjuguée $(\omega_1\ ,\ \ldots\ ,\ \omega_n\ ,\ \bar{\omega}_1\ ,\ \ldots\ ,\ \bar{\omega}_n)$; les bases $(\omega'_1\ ,\ \ldots\ ,\ \omega'_n\ ,\ \bar{\omega}'_1\ ,\ \ldots\ ,\ \bar{\omega}'_n)$

déduites de la première par une transformation (T)

(3) $$\omega'_k = \sum_j c_k^j \omega_j \;; \qquad \overline{\omega}'_k = \sum \overline{c}_k^j \overline{\omega}_j \qquad c_k^j \in K \quad ,$$

qui permute avec la conjugaison, seront dites permises ; les transformations (T) forment un groupe G. Par définition les éléments positifs de E_{2n}, de degré zéro, sont les constantes réelles positives $a \in R^+$. On considèrera de plus une forme fondamentale

(4) $$\tau_n = c(i\omega_1 \wedge \overline{\omega}_1) \wedge \dots \wedge (i\omega_n \wedge \overline{\omega}_n) \quad \text{avec} \quad c \in R^+ \quad .$$

Le passage à toute autre base permise $(\omega', \overline{\omega}')$ remplace c par c' dans (4), et l'on a encore $c' \in R^+$. On appelle linéaire pur tout élément $\alpha \in E_{2n}$ qui s'écrit $\alpha = \sum a_k \omega_k$, $a_k \in K$.

Définition. - Un élément $\varphi \in E_{2n}$ sera dit positif, de degré p, $0 \leqslant p \leqslant n$, si

a. il est homogène de type (p, p),

b. pour tout système $L^{n-p} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-p})$ d'éléments linéaires purs, on a

(5) $$\varphi \wedge (i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1) \wedge \dots \wedge (i\alpha_{n_p} \wedge \overline{\alpha}_{n_p}) = \ell(\varphi, L^{n-p})\, \tau_n$$

avec $\ell(\varphi, L^{n-p}) \in R^+$.

Conséquences :

1° L'ensemble E_+^p des éléments positifs de degré p est un cône convexe saillant, car $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ entraîne, si $\varphi_1 \in E_+^p$, et $\varphi_2 \in E_+^p$:

$$h_1 \varphi_1 + h_2 \varphi_2 \in E_+^p \quad .$$

On a

$$E_+^n = \{a \tau_n\}, \qquad a \in R^+ \quad .$$

On pose

$$E_+ = \sum_0^n E_+^p \quad .$$

2° Pour que φ appartienne à E^1_+ il faut et il suffit qu'il existe une base permise $(\omega , \overline{\omega})$ dans laquelle φ s'exprime par

$$(6) \qquad \varphi = \sum_1^q s_j \ \omega_j \wedge \overline{\omega}_j \ , \qquad 1 \leqslant q \leqslant n \ , \quad s_j \in R^+ \qquad .$$

3° Pour la suite, remarquons que si dans (5) φ est fixé, et si l'on fait varier le système $L^{n-p}(\alpha_1 , \dots , \alpha_{n-p} , \overline{\alpha}_1 , \dots , \overline{\alpha}_{n-p})$, on obtient une fonction d'un $2(n-p)$-vecteur L^{n-p} , autoconjugué, notée $\ell(\varphi , L^{n-p})$; cette application est injective. On le voit en écrivant (5) pour un ensemble $\Lambda = \{L_1^{n-p} , \dots , L_N^{n-p}\}$ de systèmes L_s^{n-p} , $N = (C_n^p)^2$ étant le nombre de coefficients $\varphi_{(i),(\overline{j})}$ de φ dans l'écriture par rapport à la base $(\omega , \overline{\omega})$, si φ est de type (p , p) . Si l'on explicite les éléments $\alpha_{k,s}$ d'un L_s^{n-p} :

$$\alpha_{k,s} = \sum a_{k,s}^j \ \omega_j \ , \qquad k = 1 , \dots , n-p \ ; \quad s = 1 , \dots , N \qquad .$$

On détermine les coefficients $\varphi_{(i),(j)} = \varphi_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p}$ de φ par le système des équations (5) à condition que le système soit régulier. Considérons d'abord le déterminant

$$h_s^{(j')} = \|a_{k,s}^j\| \ , \qquad j \in (j') \ , \quad k = 1 , \dots , n-p$$

(j') désignant la combinaison complémentaire de (j) . Le système qui détermine les $\varphi_{(i),(j)}$ est régulier si $\Delta \neq 0$ où Δ est le déterminant d'ordre N :

$$(7) \qquad \Delta = \left\| h_s^{(i')} \ \overline{h}_s^{(j')} (-1)^{I+J} \right\|_{s=1,\dots,N}^{(i')\times(j')}$$

(i') et (j') parcourant les combinaisons C_n^{n-p} ; I est la parité de la permutation $[(i) , (i)']$ par rapport à $[1 , \dots , n]$. Si l'on explicite les parties réelles et imaginaires des $a_{k,s}^j$:

$$a_{k,s}^j = a'^j_{k,s} + i a''^j_{k,s} \qquad ,$$

on obtient pour Δ le produit par une constante non nulle d'un polynôme $P[a'^j_{k,s} , a''^j_{k,s}]$ à coefficients réels, non identiquement nul. Si l'on pose

$$N_1 = N(n-p)n \quad ,$$

dans l'espace R^{2N_1} des $(a'^{j}_{k,s} \,,\, a''^{j}_{k,s})$ les points représentatifs des ensembles Λ non réguliers forment une variété algébrique de dimension $2N_1 - 1$, soit W. Il en résulte que dans tout ouvert de R^{2N_1}, il y a des points représentatifs de systèmes Λ non dégénérés ; ce résultat est utilisé dans [4]. Si l'on considère les $\ell(\varphi \,,\, L_s^{n-p})$ relatifs à φ et aux L_s^{n-p} d'un système régulier

$$\Lambda = \{L_1^{n-p} \,,\, \ldots \,,\, L_N^{n-p}\} \quad ,$$

les N nombres complexes $\ell(\varphi \,,\, L_s^{n-p})$ déterminent φ ; si $\varphi \in E_p^+$, ces N nombres sont positifs. Il en résulte :

PROPOSITION 1. - <u>Tout élément positif est</u> autoconjugué.

En effet dans (5) si l'on pense aux conjugués, on aura

$$\ell(\varphi \,,\, L_s^{n-p}) = \ell(\overline{\varphi} \,,\, L_s^{n-p}) \quad \text{pour tout} \quad L_s^{n-p} \in \Lambda \quad .$$

D'où $\varphi \equiv \overline{\varphi}$, Λ étant choisi régulier.

PROPOSITION 2. - Si $\varphi_k \in E_+^p$ et si $\sum_1^m \varphi_k = 0$ on a $\varphi_k = 0$ pour tout k.

En effet $\sum \ell(\varphi_k \,,\, L_s^{n-p}) = 0$ entraîne $\ell(\varphi_k \,,\, L_s^{n-p}) = 0$ pour tout $L_s^{n-p} \in \Lambda$.

<u>Multiplication</u>. - La parité du degré total entraîne $\varphi \wedge \psi = \psi \wedge \varphi$ entre éléments positifs. De plus :

PROPOSITION 3. - <u>Si</u> $\varphi \in E_+^p$, $\psi \in E_+^1$, <u>on a</u> $\varphi \wedge \psi \in E_+^{p+1}$.

Il suffit d'après (2°) de l'établir pour $\psi = i\omega \wedge \overline{\omega}$, ω forme linéaire pure ; comme φ est positive, écrivons (5) en choisissant $\alpha_1 = \omega$, α_2, ..., α_{n-p} quelconques, linéaires purs. On a

$$\ell(\varphi \wedge \psi \,,\, L^{n-p-1}) = \ell(\varphi \,,\, L^{n-p}) \geqslant 0 \quad ,$$

où $L^{n-p-1} = \{\alpha_2 \,,\, \ldots \,,\, \alpha_{n-p}\}$.

<u>Eléments positifs décomposables</u>. - Un élément positif $\varphi \in E_+^p$ sera dit décomposable s'il est de la forme

(8) $$\varphi = (i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1) \wedge \dots \wedge (i\alpha_p \wedge \overline{\alpha}_p) , \qquad \alpha_k \text{ linéaires purs} \quad .$$

Si φ est décomposable, il en est de même de $c\varphi$, c constante positive. Les éléments décomposables de degré p engendrent un cône positif saillant $P^p \in E_+^p$; P^p est aussi le cône engendré à partir des monômes produits de p éléments de E_+^1. Le cône $P = \sum_0^n P^p$ admet une structure d'algèbre commutative ; si $\theta_1 \in P^p$ et si $\theta_2 \in P^q$, on a

$$\theta_1 \wedge \theta = \theta_2 \wedge \theta_1 \in P^{p+q} , \qquad (p + q \leqslant n) \quad .$$

Signalons ici deux problèmes :

A. $P \subset E_+$ est-il un vrai sous-ensemble de l'ensemble E_+ des éléments positifs de E_{2n} ? Autrement dit, existe-t-il des éléments φ (positifs de degré $p \geqslant 2$), qui ne sont pas des combinaisons linéaires finies, à coefficients positifs de monômes de la forme (8). On a vu qu'on a $P^1 = E_+^1$.

B. Le produit $\varphi \wedge \psi$, où $\varphi \in E_+^p$, $\psi \in E_+^q$, $2 \leqslant p , q \leqslant n$, peut-il être un élément non positif ? La question n'est à chercher que si $P \neq E_+$, puisque pour deux éléments respectivement de P^p et de P^q , le produit appartient à P^{p+q} .

Remarquons qu'à un élément $\varphi \in E_+^1$ on peut faire correspondre un espace vectoriel $E(\varphi)$ autoconjugué, d'une manière unique ; il suffit d'exprimer

$$\varphi = i \sum_1^q s_k\, g_k \wedge \overline{g}_k , \qquad s_k > 0 \quad ,$$

les g_k étant indépendants. $E(\varphi)$ est sous-tendu par les g_k et les $\overline{g}_k$; $E(\varphi)$ est de dimension $2q$; q étant déterminé par les conditions $\varphi^{q+1} = 0$, $\varphi^q \neq 0$; φ^q détermine $E(\varphi)$. On dira que l'élément φ appartient à l'espace vectoriel $E(\varphi)$.

<u>Division</u>. - Soit φ un élément de E_+^p , écrit dans une base $(\omega_k , \overline{\omega}_k)$; si l'on a

$$\varphi = a \wedge (i\omega_1 \wedge \overline{\omega}_1) + b \wedge \omega_1 + b' \wedge \overline{\omega}_1 + c$$

où a , b , c ne contiennent ni ω_1 , ni $\overline{\omega}_1$, a et c sont des éléments positifs. On a $b = \overline{b'}$. Si de plus on a $c = 0$, alors on a aussi $b = b' = 0$. Il en résulte que si $\varphi \in E_+^p$ vérifie $\varphi \wedge i\omega_1 \wedge \overline{\omega}_1 = 0$, φ est divisible par

$i\omega_1 \wedge \overline{\omega}_1$ et le quotient peut être choisi dans E_+^{p-1}. Les éléments positifs ont ainsi des propriétés de divisibilité particulières.

PROPOSITION 4. - Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ sont des éléments positifs de degré 1, pour que l'on ait

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_p = 0 \qquad , \tag{9}$$

il faut et il suffit qu'il existe q, $1 \leqslant q \leqslant p$, de manière que q éléments φ_k appartiennent au même espace vectoriel autoconjugué de dimension $2(q-1)$.

La condition suffisante étant évidente, indiquons brièvement comment on établit la condition nécessaire : on procède par récurrence sur p, et tout revient à montrer que si $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_{p-1}} \neq 0$ pour tout groupe de $p-1$ éléments, (9) entraîne que tous les $E(\varphi_k)$ appartiennent à un même espace vectoriel $E(\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}, \overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_{p-1})$. On part des représentations :

$$\varphi_k = i \sum_j^1 s_k^j \, g_{k,j} \wedge \overline{g}_{k,j} , \qquad s_k^j > 0 , \quad j = 1, \ldots, n_k \leqslant n$$

des φ_k, les $g_{k,j}$ étant linéaires pures ; (9) entraîne alors la nullité de tous les produits

$$G_{(j)} = g_{1,j_1} \wedge \ldots \wedge g_{p,j_p}$$

pour toutes les combinaisons $(j) = (j_1, \ldots, j_p)$, ce qui permet de proche en proche d'exprimer les $g_{k,j}$ en fonction de $p-1$ d'entre elles supposées indépendantes.

Interprétation géométrique. - Il est commode d'utiliser les calculs de l'adjointe et la dualité, et de se référer à l'interprétation géométrique. On note $\omega_p = dz_p$ et on fait jouer un rôle particulier aux transformations unitaires $G_u \subset G$ qui conservent la forme fondamentale

$$\tau_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge dz_p \wedge d\overline{z}_p \qquad .$$

(On rappelle que le calcul de l'adjointe s'opère selon les formules classiques en géométrie différentielle réelle, par rapport aux "paramètres" $d\zeta_k = \frac{dz_n}{\sqrt{2}}$, $d\zeta_{k+n} = \frac{d\bar{z}_k}{\sqrt{2}}$; on écrit

$$ds^2 = \sum g_{p,q}\, d\zeta_p\, d\zeta_q \,, \qquad 1 \leqslant p \leqslant 2n \,, \quad 1 \leqslant q \leqslant 2n \qquad ,$$

où $g_{pq} = 0$ sauf si $p - q$ est congru à n modulo $2n$, auquel cas on a $g_{pq} = 1$.)
On pose

$$\beta = \frac{i}{2} \sum_1^n dz_k \wedge d\bar{z}_k = \frac{i}{2}\, d_z\, d_{\bar{z}} \sum_1^n z_k \bar{z}_k$$

β est une forme positive ; il en est de même de β^p ; on a $\tau_n = \frac{1}{n!}\beta^n$.

A un sous-espace vectoriel L^p, à p dimensions complexes, défini par

(10 a) $$z_s = \sum_1^p a_s^j\, u_j \qquad ,$$

on associe des paramètres plückériens complexes

$$h_{(s)} = \frac{D(z_{s_1}, \dots, z_{s_p})}{D(u_1, \dots, u_p)} = \left\| a_s^j \right\|_{s \in (s)}^{j=1,\dots,p}$$

les $h_{(s)}$ seront dits unitaires si (10 a) se prolonge en une transformation unitaire de $C^n(u)$ dans $C^n(z)$. A L^p on associe la forme $\tau(L^p)$ définie par

$$\begin{aligned}\tau(L^p) &= \left(\frac{i}{2}\right)^p du_1 \wedge d\bar{u}_1 \dots du_p \wedge d\bar{u}_p \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^p (-1)^{p(p-1)/2} \sum_{(s),(t)} h^{(s)}\, \bar{h}^{(t)}\, dz_{s_1} \wedge \dots \wedge dz_{s_p} \wedge d\bar{z}_{t_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{t_p}\end{aligned}$$

avec $h^{(s)} = \bar{h}_{(s)}$. L'application $L^p \to \tau(L^p)$ est bien déterminée : un changement unitaire $z_k \to z'_k$ commute avec elle et l'on obtient $\tau(L^p)$ en substituant les z'_k aux z_k dans l'expression obtenue. D'autre part si L^{n-p} est le sous-espace orthogonal, on a

$$\tau(L^{n-p}) = {}^*\tau(L^p)$$

en désignant par ${}^*\varphi$ l'adjoint de φ. On rappelle que l'adjonction est un opérateur linéaire, défini par rapport à la métrique (donc permutable avec les transformations unitaires) et vérifiant

$$^*1 = \tau_n \, , \qquad \alpha \wedge {}^*\beta = \beta \wedge {}^*\alpha \quad .$$

Pour un monôme

$$\varphi = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\overline{z}_{j_q} \quad ,$$

on a

$$^*\varphi = 2^{p+q-n}\, i^n (-1)^{I+J+np}\, dz_{j_{q+1}} \wedge \dots \wedge dz_{j_n} \wedge d\overline{z}_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge d\overline{z}_{i_n}$$

dans la métrique euclidienne. On a noté I la parité de $[i_1 , \dots , i_p , i_{p+1}, \dots , i_n]$. On n'utilise ici que des propriétés algébriques de l'opérateur $\varphi \to {}^*\varphi$, sans faire intervenir la différentiation, de sorte qu'on peut toujours se ramener à une métrique du type

$$ds^2 = \sum_1^n dz_k \, d\overline{z}_k \quad .$$

PROPOSITION 5. - Si $\varphi \in E_+^p$, on a $^*\varphi \in E_+^{n-p}$.

En effet $^*\varphi$ est bien du type $(n - p , n - p)$; de plus soit

$$\sigma = i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge i\alpha_p \wedge \overline{\alpha}_p \quad ,$$

les α étant linéaires purs et indépendants ; soit B^{n-p} le sous-espace défini par $\alpha_k = \overline{\alpha}_k = 0$, $1 \leqslant k \leqslant p$, et soit A^p le sous-espace orthogonal ; on a

$$\sigma = |\delta|^2 \, \tau(A^p) \, , \qquad {}^*\sigma = |\delta|^2 \, \tau(B^{n-p})$$

où δ est le déterminant des α par rapport à des coordonnées unitaires dans A^p . Il en résulte, si L^p est le système $(\alpha_1 , \dots , \alpha_p)$:

$$\ell({}^*\varphi , L^p) \, \tau_n = {}^*\varphi \wedge \sigma = \sigma \wedge {}^*\varphi = \varphi \wedge {}^*\sigma = \varphi \wedge \tau(B^{n-p}) \, |\delta|^2$$

qui établit

$$\ell({}^*\varphi , L^p) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } L^p \quad .$$

Remarque. - A une forme $\varphi \in E_+^p$ on fera correspondre (comme dans le cas $p = 1$) un espace vectoriel

$$E(\varphi) = \{\alpha_1 , \ldots , \alpha_s , \overline{\alpha}_1 , \ldots , \overline{\alpha}_s\} ,$$

les α_k étant des formes linéaires pures telles que φ s'exprime en fonction des α_k , $\overline{\alpha}_k$, et que s soit minimum. Si

$$\dim E(\varphi) = 2s < 2n ,$$

on pourra trouver une base $(\alpha'_1 , \ldots , \alpha'_n , \overline{\alpha}'_1 , \ldots , \overline{\alpha}'_n)$ déduite par une transformation unitaire de $(\omega , \overline{\omega})$, et telle que

$$\{\alpha'_1 , \ldots , \alpha'_s , \overline{\alpha}'_1 , \ldots , \overline{\alpha}'_s\} = E(\varphi) .$$

Alors on a

$$\text{(10 b)} \qquad {}^*\varphi = (i\alpha'_{s+1} \wedge \overline{\alpha}'_{s+1}) \wedge \ldots \wedge (i\alpha'_n \wedge \overline{\alpha}'_n) \wedge \varphi_1$$

où φ_1 ne contient que les α' et $\overline{\alpha}'$ d'indices s au plus, et réciproquement. $E(\varphi)$ est donc encore l'orthogonal du plus grand espace autoconjugué $(\alpha'_k , \overline{\alpha}'_k)$ tel que la divisibilité (10 b) ait lieu.

Division. - Pour l'étude de la division, on utilisera l'algorithme donné par l'adjonction :

PROPOSITION 6. - Si $\varphi \in E_+^p$ et $\psi \in E_+^1$, avec $\psi^q \neq 0$, $\psi^{q+1} = 0$, et si l'on a $\varphi \wedge \psi = 0$, alors ψ , ainsi que toute puissance ψ^m , $1 \leqslant m \leqslant q$, divise φ , et l'on a l'identité

$$\text{(11)} \qquad \varphi = \varphi_1 \wedge \psi^q .$$

On a $\varphi_1 = \varphi = 0$ si $q > p$. Le quotient φ_1 est bien déterminé par (11) sous la condition que les espaces vectoriels $E(\varphi_1)$, $E(\psi)$ n'aient pas d'élément (non nul) en commun, ou ce qui revient au même, que l'on ait ${}^*\varphi_1 \wedge \psi = 0$, ou encore ${}^*\varphi_1 \wedge h = 0$ pour toute forme linéaire pure vérifiant $h \wedge \psi^q = 0$; le quotient φ_1 ainsi déterminé appartient à E_+^{p-q} .

Indiquons seulement ici le principe de la démonstration : soit

$$\psi = i \sum_{1}^{q} s_k\, g_k \wedge \bar{g}_k \,, \qquad s_k > 0 \qquad ,$$

les g_k appartenant à une base unitaire de $C^n(dz)$. Alors $\varphi \wedge \psi = 0$ entraîne

$$\varphi \wedge g_k \wedge \bar{g}_k = 0 \quad \text{pour tout } k \,, \quad 1 \leqslant k \leqslant q \qquad .$$

On remarque alors que si φ est écrit dans une base à laquelle appartiennent $g_1 , \dots , g_q$, sous la forme

$$(12) \qquad \varphi = t_1 \wedge (ig_1 \wedge \bar{g}_1) + t_2 \wedge g_1 + t_2' \wedge \bar{g}_1 + t_3$$

t_3 ne contenant plus ni g_1 , ni $\bar{g}_1$, alors on a $t_3 = 0$; mais le fait que φ est positive entraîne dans (12) que l'on ait $t_1 \in E_+^{p-1}$, $t_2 = \bar{t}_2'$; $t_3 = 0$ entraîne d'autre part $t_2 = t_2' = 0$, [substituer à g_1 l'expression hg_1 et remarquer que l'expression obtenue en h , $\bar{h}$ donne un résultat positif dans toute $\ell(\varphi , L^{n-p})$]. Finalement $\varphi \wedge \psi = 0$ entraîne

$$\varphi = t_1 \wedge ig_1 \wedge \bar{g}_1 \,, \qquad t_1 \in E_+^{p-1} \qquad .$$

On opère alors de proche en proche de manière à obtenir la divisibilité de φ par les produits $(ig_k \wedge \bar{g}_k)$.

Soit

$$S = s_1 \times \dots \times s_q > 0$$

on a

$$\psi^q = S\tau(\Lambda^q)$$

où Λ^q est le sous-espace vectoriel de C^n associé à ψ , et l'on obtient (11) où φ_1 est déterminé par

$$*\varphi_1 = S^{-2}\, \psi^q \wedge *\varphi \qquad .$$

3. Formes positives à coefficients continus ; courants positifs. - On obtient encore une algèbre si l'on considère les formes dont les coefficients sont pris dans l'anneau des fonctions continues sur une variété W^n à structure analytique complexe ; mais avec quelques précautions évidentes, les résultats s'étendent aux

formes généralisées (courants).

Définition. - Une forme différentielle sur W^n sera dite positive, de degré p, si :

1° elle est homogène de type (p, p),

2° ses coefficients sont des fonctions continues sur W^n ;

3° en tout point $z^0 \in W^n$, elle est une forme positive de l'algèbre extérieure $E^{2n}(dz_k, d\bar{z}_k)$, c'est-à-dire vérifie la condition (5) pour tout système L^{n-p} de formes linéaires pures $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-p}$.

Remarques.

1° Si l'on a sur W^n une métrique donnée par une forme hermitienne définie positive

$$\sum g_{pq}\, dz_p\, d\bar{z}_q = ds^2$$

des coordonnées locales dz_k, $d\bar{z}_k$, et si l'on pose

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum g_{pq}\, dz_p \wedge d\bar{z}_q$$

on peut dans la condition (5) remplacer τ_n par "l'élément de volume" $\frac{1}{n!}\Omega^n$.

2° La classe des formes positives, de degré p, soit Φ_+^p est indépendante des coordonnées locales choisies sur W.

3° On remarque qu'on a deux possibilités d'exprimer qu'une forme φ, à coefficients continus, de type (p, p) appartient à Φ_+^p : l'une est d'écrire $\ell(\varphi ; \alpha_1, \dots, \alpha_{n-p}) \geq 0$, les α_k étant linéaires pures à coefficients constants (ou plus généralement continus) ; il suffit alors d'écrire les conditions

$$\varphi \wedge \tau(B^{n-p}) = \ell(\varphi, B^{n-p})\, \tau_n \quad \text{avec} \quad \ell(\varphi, B_p^{n-p}) \geq 0$$

en chaque point pour tous les plans complexes B_p^{n-p}.

On peut aussi exprimer qu'en chaque point la forme φ induit sur chaque sous-espace Λ^p tangent à W, soit $dz_k = \sum a_k^j du_j$, $1 \leq j \leq p$, une forme

$$\varphi = c(\varphi, \Lambda^p)\, \tau(\Lambda^p) \qquad ,$$

avec $c(\varphi , \Lambda^p) \geqslant 0$. Pour l'expression de ces conditions, il sera indifférent d'utiliser, dans l'espace tangent, la métrique induite pour celle de W^n , ou celle de l'espace euclidien $C^n(dz)$.

Définition. - Un courant $t(\varphi)$ sera dit positif, de degré p , de dimension (complexe) $n - p$ sur W^n si

a. il est homogène de degré (p , p) ;

b. pour tout système $L^{n-p} = (\alpha_1 , \dots , \alpha_{n-p})$ de formes pures à coefficients constants, on a

$$t \wedge (i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1) \wedge \dots \wedge (i\alpha_{n-p} \wedge \overline{\alpha}_{n-p}) = T(t , L^{n-p})$$

où $T(L^{n-p})$ est une distribution positive (donc une mesure positive). Il revient au même d'exprimer que pour toute $f \in \mathcal{D}(W)$ avec $f \geqslant 0$, on a

$$\int t \wedge (fi\alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1) \wedge \dots \wedge i\alpha_{n-p} \wedge \overline{\alpha}_{n-p} \geqslant 0 \qquad .$$

Remarques.

1° Pour qu'un courant soit positif, il faut et il suffit qu'il le soit localement.

2° Soient Λ^p un sous-espace de $C^n(dz_k)$ et B^{n-p} le sous-espace complémentaire :

$$(t , \Lambda^p) \to t \wedge \tau(\Lambda^p) = T(t , B^{n-p})$$

est une application qui associe à t et à tout B^{n-p} une mesure positive ; tout système non dégénéré Λ de B^{n-p} , soit $B_1^{(n-p)} , \dots , B_N^{(n-p)}$, en nombre N , donne la possibilité de calculer les coefficients de

$$t = \sum t_{(i)(j)}\, dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\overline{z}_{j_p}$$

sous la forme

$$t_{(i)(j)} = \sum c^s_{(i)(j)}\, T(t , B_s^{n-p}) \qquad ,$$

les $c^s_{(i)(j)}$ étant des constantes complexes ; les $T(t , B^{n-p}_s)$ sont des mesures, donc :

PROPOSITION 7. - Un courant positif t est continu d'ordre zéro : les distributions

$$T_{(i)(j)} = t_{(i)(j)} \tau_n$$

associées à ses coefficients sont des mesures de Radon complexes ; et l'on a

$$T_{(i)(j)} = (-1)^p \overline{T}_{(j)(i)} \quad .$$

Il en résulte qu'on pourra multiplier un courant par une forme à coefficients continus à support compact.

D'autre part les définitions entraînent :

PROPOSITION 8. - Les classes Φ^p_+ , T^p_+ (formes positives et courants positifs) sont invariantes par un homéomorphisme analytique complexe.

Dans la suite on se bornera à l'étude de formes et de courants positifs dans des domaines de C^n . On peut envisager pour un courant $t \in T^p_+$ différentes normes dans un domaine D :

1° $N_1(t) = \sup_\varphi |t(\varphi)|$, pour les φ à support compact dans D , indéfiniment dérivables, vérifiant

$$N_1(\varphi) = \sup|\varphi_{(i)(j)}(z)| \leqslant 1 \quad .$$

2° $N_2(t) = \sup\|T_{(i)(j)}\|$, les $T_{(i)(j)}$ étant les normes des mesures complexes associées aux coefficients $t_{(i)(j)}$ du courant t .

3° $N(t , \Lambda) = \sup_s T(t , B^{n-p}_s)$, pour les B^{n-p}_s d'un système $B^{n-p}_1 , \ldots , B^{n-p}_N$ régulier donné.

Ces trois normes sont équivalentes. De plus on a :

PROPOSITION 9. - Si t est un courant positif de degré 1 ,

$$t = i \sum t_{pq} \, dz_p \wedge d\overline{z}_q$$

les mesures complexes $T_{p,q}$ associées aux coefficients t_{pq} vérifient

(13) $$\|T_{p,q}\|_D \leqslant (\sum_k T_{kk})_D \quad .$$

En effet, soit f une fonction positive, indéfiniment dérivable à support compact dans D : $\sum_{p,q} T_{p,q}(f)\, h_p\, \bar{h}_q$ est positif pour tout vecteur h, d'où, les T_{kk} étant des mesures positives :

$$\|T_{pq}\| \leqslant T_{pp} + T_{qq} \leqslant \sum_k T_{kk} \quad .$$

<u>Régularisation</u>. - Plaçons-nous dans C^n ; soit $\alpha_m(z)$ une suite de noyaux continus, positifs, à support la boule $|z| \leqslant m^{-1}$. Alors, si $t \in T^p_+$, le courant

$$t_m = t \star \alpha_m$$

obtenu en régularisant par composition chacun des coefficients de t, appartient aussi à T^+_p, et l'on a

$$\lim t_m(\varphi) = \lim[t \star \alpha_m](\varphi) = t(\varphi)$$

sur toute forme continue à support compact φ.

Par régularisation à partir des énoncés précédents, on établit alors :

THÉORÈME 1 :

a. Le produit d'une forme $\varphi \in \Phi^1_+$ par un courant $t \in T^p_+$ est un courant $t \wedge \varphi$ appartenant à T^{p+1}_+.

b. Le produit d'une forme $\varphi \in \Phi^p_+$ par un courant $t \in T^1_+$ est un courant de T^{p+1}_+.

Plus généralement, un monôme

$$\theta = \chi_1 \wedge \chi_2 \wedge \dots \wedge \chi_h$$

est un courant positif si les χ sont des courants positifs et si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

α. tous les χ, sauf l'un d'eux au plus, sont des formes positives, β. tous les χ , sauf l'un d'eux (au plus), sont de degré 1 .

Le théorème de division s'étend :

THÉORÈME 2. - Soient un courant positif de degré p , $1 \leqslant p \leqslant n$, sur une variété analytique complexe W^n , et ψ une forme positive de rang q , de degré 1 , avec $\psi^q \neq 0$, $\psi^{q+1} \equiv 0$, vérifiant $t \wedge \psi = 0$. Alors ψ , ainsi que toute puissance ψ^m , $1 \leqslant m \leqslant q$, divise t , et l'on a l'identité

$$t = t_1 \wedge \psi^q \qquad (14)$$

De plus t_1 est unique sous la condition d'être positif et de vérifier la condition

$$*t_1 \wedge \psi = 0 \quad .$$

Si $q \leqslant p$, on a $t_1 \in T_+^{p-q}$; on a $t = t_1' = 0$ si $q > p$; enfin t_1 est donné par

$$*t_1 = S^{-2}(z)\ \psi^q \wedge *t \qquad (15)$$

Il suffit d'établir le théorème localement, c'est-à-dire dans un domaine D de C^n ; on définit t_1 par (15) qui a bien un sens, car $S(z) > 0$ dans D ; de plus $t_1 \in T_+^{p-q}$ si $q \leqslant p$, l'adjoint d'un courant $t \in T_p^+$ appartenant à T_{n-p}^+ ; si $p < q$, on a $*t_1 = 0$.

On établit (14) à partir de (15), si t est une forme, en appliquant la proposition 6 en chaque point. Pour passer aux courants on procède par régularisation ; on a évidemment en appelant $R_\alpha t = \alpha \star t$ le régularisé de t au moyen du noyau α :

$$*(R_\alpha t) = R_\alpha(*t) \quad .$$

Soit α_m une suite de noyaux régularisants, continus, tendant vers la mesure de Dirac. Soit $t_m = \alpha_m \star t$ et

$$*t_{1,m} = S^{-2}(z)\ \psi^q \wedge *t_m \qquad (16)$$

On a alors, d'après (14) et (15), puisqu'il n'intervient que des formes à coefficients continus

$$t_m = t_{1,m} \wedge \psi^q \quad .$$

D'autre part ψ^q étant à coefficients continus,

$$t = \lim_{m=\infty} t_m = \lim[t_{1,m} \wedge \psi^q] = [\lim t_{1,m}] \wedge \psi^q \quad .$$

D'après (16) $\lim t_{1,m} = t_1$ existe et vérifie

$$^*t_1 = \lim {}^*t_{1,m} = S^{-2}(z)\ \psi^q \wedge \lim {}^*t_m = S^{-2}(z)\ \psi^q \wedge {}^*t$$

et l'on a

$$t = (\lim t_{1,m}) \wedge \psi^q = t_1 \wedge \psi^q \quad .$$

Pour l'unicité, si l'on a

$$^*t_1 \wedge \psi = 0 \quad ,$$

et si t_1 est positif, $^*t_1$ l'est aussi et il existe alors t_2 , tel que l'on ait

$$(17) \quad \begin{aligned} &^*t_1 = \psi^q \wedge t_2 \\ &^*t_2 = S^{-2}(z)\ \psi^q \wedge {}^*({}^*t_1) = S^{-2}(z)\ \psi^q \wedge t_1 = S^{-2}(z)\ t \quad . \end{aligned}$$

D'où

$$t_2 = S^{-2}(z)\ {}^*t \quad ,$$

et d'après (17)

$$^*t_1 = \psi^q \wedge S^{-2}(z)\ {}^*t \quad ;$$

on retrouve ainsi l'expression (15).

<u>Image d'un courant positif</u>. - Soit $z' = f(z)$ une application localement biunivoque et analytique complexe d'une variété W^n analytique complexe dans une variété W'^n analytique complexe. Soit t un courant positif sur W^n . Son image $t' = ft$ est définie par

$$t'(\varphi) = t[f_1 \varphi]$$

où $f_1 \varphi$ résulte de φ par remplacement de z' et dz' en fonction de z et dz ; t' est un courant positif.

On notera que si l'on considère deux ouverts U et U' en correspondance biunivoque par f, et deux compacts $K \subset u$, $K' \subset u'$, avec $K' = f(K)$, il existe deux constantes a, b (dépendant de K) telles que

$$a\|t\|_K \leqslant \|t'\|_{K'} \leqslant b\|t\|_K \quad .$$

Applications. Cas des courants positifs fermés.

1° Si V est une fonction plurisousharmonique, $t = i d_z d_{\bar z} V$ est un courant positif fermé. Réciproquement si V est une fonction localement sommable ($-\infty \leqslant V < +\infty$ en tout point), si V est faiblement semi-continue et si $d_z d_{\bar z} V \in T^1_+$, V est plurisousharmonique. La semi-continuité faible (ou métrique) signifie que, en tout point z, $V = V_m$, où V_m est la borne inférieure des ξ tels qu'il existe un ouvert contenant z dans lequel l'ensemble $V(z') > \xi$ est de mesure nulle.

Si l'on se donne un courant σ positif fermé de degré 1, l'équation

$$t = i d_z d_{\bar z} V$$

admet localement une solution V plurisousharmonique.

2° Si l'on considère en particulier la fonction $V = \log|f(z)|$, où f est holomorphe, le courant associé $t = i\pi^{-1} d_z d_{\bar z} \log|f|$ est l'opérateur d'intégration sur le diviseur $f = 0$ et la mesure positive

$$\sigma = \frac{t \wedge \beta^{n-1}}{(n-1)!} \tag{18}$$

est l'aire de l'ensemble analytique $f = 0$. On pose

$$\beta = \frac{i}{2} \sum_k dz_k \wedge d\bar z_k = \frac{i}{2} d_z d_{\bar z}[\sum z_k \bar z_k] \in \Phi^1_+$$

$$\alpha = \frac{i}{2} d_z d_{\bar z} \log \sum z_k \bar z_k \in \Phi^1_+ \quad \text{dans} \quad C^n - 0 \quad .$$

Le résultat (18) remonte à Poincaré (pour une formulation moderne, voir KODAIRA [5]).

3° Plus généralement (cf. [4]), l'intégration sur un ensemble analytique complexe W^p de dimension p en tout point est un courant t positif fermé, $t \in T^p_+$. De plus on a établi dans [4] :

$$t = \lim_{r \to 0} t(1 - \alpha_r) \qquad ,$$

où le noyau $\alpha_r(z)$ vaut 1 sur l'ensemble S des points non ordinaires de W^p, $0 \leqslant \alpha_r \leqslant 1$, et le support de α_r tend vers S quand $r \to 0$.

4° On est ainsi conduit à donner des propriétés des courants positifs fermés. On associe à un tel courant $t \in T^{n-p}$, les mesures

$$\sigma = t \wedge \frac{\beta^p}{p!}, \qquad \nu = \pi^{-p}\, t \wedge \alpha^p \qquad .$$

D'après le théorème 1, σ et ν sont des mesures positives. Si t est de plus fermé, on a une propriété particulière de la norme σ. Supposons d'abord que t soit une forme positive fermée. Alors en comparant les mesures totales $\sigma(R)$, $\nu(R)$ dans une boule $|z| < R$, on obtient (cf. [4]), pour $R_1 < R_2$

$$\nu(R_2) - \nu(R_1) = p!\ \pi^{-p}[\sigma(R_2)\ R_2^{-2p} - \sigma(R_1)\ R_1^{-2p}]$$

qui montre que $\sigma(R)\ R^{-2p}$ est une quantité croissante. Il en est encore ainsi (on procède par régularisation) si t est un courant positif fermé quelconque ; $\sigma(R)$ désignant la mesure σ dans la boule ouverte $|z| < R$, $\sigma(R)\ R^{-2p}$ est fonction croissante. Il en résulte que

$$\nu(0) = \lim_{R \to 0} p!\ \pi^{-p}\ \sigma(R)\ R^{-2p}$$

existe (la constante $p!\ \pi^{-p} = \tau_{2p}^{-1}$ représente l'inverse de la mesure de la boule unité S^{2p}) et l'on a, en désignant par $\nu(R)$ la mesure positive dans la boule pointée $0 < |z| < R$:

$$\nu(0) + \nu(R) = \tau_{2p}^{-1}\,\frac{\sigma(R)}{R^{2p}} = \pi^{-p} \int_{|z|<R} t \wedge \alpha^p$$

pour un courant positif fermé. Si, en particulier, t est le courant d'intégration sur un ensemble analytique W, ν est l'aire de l'image de W dans l'espace projectif des droites complexes issues de 0 , σ est l'aire au sens usuel de W dans C^n (qui est définie ainsi à partir de l'existence de t).

5° Soit W un ensemble analytique dans un domaine D de C^n . La classe de cohomologie de D représentée par $t(W)$ courant associé à W est la classe duale à la classe d'homologie de D représentée par W et réduite en coefficients réels (cf. [1]) ; supposons que W_1 et W_2 soient des ensembles irréductibles dans D ; dans certains cas on pourra établir une relation entre $t(W_1)$, $t(W_2)$ et $t(W_1 \cap W_2)$, en procédant par régularisation et passage à la limite. Supposons que

$$W = W_1 \cap W_2$$

soit irréductible dans D et possède un point x ordinaire sur W_1 et W_2 et en lequel W_1 et W_2 se coupent transversalement avec

$$\operatorname{cod}_x W = \operatorname{cod}_x W_1 + \operatorname{cod}_x W_2 \quad .$$

Les courants $t(W_1)$ et $t(W_2)$ sont de degrés égaux respectivement à $\operatorname{cod}_x W_1$, $\operatorname{cod}_x W_2$. Les points de W qui ne sont pas à la fois points ordinaires sur W_1 et sur W_2 , ou en lesquels W_1 et W_2 ne se coupent pas transversalement, sont continus dans un ensemble analytique W' avec $\dim W' < \dim W$. En opérant comme plus haut, on considère un noyau α_r , $0 \leqslant \alpha_r \leqslant 1$, continu, valant 1 sur W' , nul en tout point à distance supérieure à r de W' . On a, pour $t = t(W_1 \cap W_2)$,

$$t = \lim_{r \to 0} t(1 - \alpha_r) \quad .$$

La quantité $t(1 - \alpha_r)$ se calcule par régularisation, et l'on a :

$$t(1 - \alpha_r) = t_1 \wedge t_2(1 - \alpha_r) \quad .$$

Quand $r \to 0$, le premier membre tend vers t ; il en résulte que l'on a

$$t(W_1 \cap W_2) = t(W_1) \cap t(W_2)$$

sous les hypothèses faites, le second membre étant défini par régularisation et passage à la limite $r \to 0$.

6° Soit $t = i\pi^{-1} d_z d_{\bar z} \log|F|$ le courant d'intégration sur un diviseur $F = 0$.

On a

$$t \wedge i dF \wedge d\overline{F} = 0 \quad .$$

Il résulte alors du théorème de division qu'on a

$$t = \theta \, i dF \wedge d\overline{F}$$

dans tout ouvert Ω ne contenant que des points ordinaires de $F = 0$; θ est un courant positif de degré nul. Par régularisation on définit $t \wedge t = t^{(2)} = 0$ sur Ω et en passant à la limite au moyen d'un noyau α_r comme plus haut, on définit $t^{(2)} = 0$.

7° Soit V une fonction plurisousharmonique sur $\overline{D}$, D étant un domaine contenant l'origine et de frontière FD régulière. On suppose de plus :

(a) $$V(z_k) = \log \sum_1^n z_k \overline{z}_k + h(z_k)$$

où h est deux fois continûment dérivable, dans $\overline{D}$.

(b) $$h(tz_k) = h(z_k) + g(t)$$

où g est harmonique pour $t \neq 0$.

La propriété (b) entraîne

(19) $$(d_z \, d_{\overline{z}} V)^n = 0 \quad \text{pour} \quad z \neq 0 \quad .$$

En effet soit $(z_1^0 , \ldots , z_n^0) \neq 0$, avec, par exemple, $z_1^0 \neq 0$. On a au voisinage de z^0 :

$$V(z_1 , \ldots , z_n) = V\left(1 , \frac{z_2}{z_1} , \ldots , \frac{z_n}{z_1}\right) + g(z_1) + \log|z_1 \overline{z}_1|$$

La forme $d_z \, d_{\overline{z}} V$ calculée pour le premier terme du second membre est évidemment de rang $n - 1$, tandis qu'elle est nulle pour le second terme, ce qui établit l'assertion.

Posons $U = e^V$,

$$\omega = (i d_z \, d_{\overline{z}} V)^{n-1} \wedge d_z V \quad .$$

On a, en fonction de U , fonction plurisousharmonique positive :

$$d_z d_{\bar z} \log U = \frac{1}{U} d_z d_{\bar z} U - \frac{1}{U^2} d_z U \wedge d_{\bar z} U$$

(20) $$(d_z d_{\bar z} V)^{n-1} = (d_z d_{\bar z} \log U)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{U^{n-1}} (d_z d_{\bar z} U)^{n-1} - \frac{n-1}{U^n} (d_z d_{\bar z} U)^{n-2} \wedge d_z U \quad d_{\bar z} U \; .$$

La forme ω est fermée dans $D - 0$ d'après (19) ; il en est de même de la forme $f\omega$, si f est une fonction holomorphe sur $\bar D$. Il en résulte que l'on a

(21) $$f(0) = k_n \int_{FD} f(z)\, \omega = k'_n \int_{FD} f(z) \frac{(d_z d_{\bar z} U)^{n-1} \wedge d_z U}{U^n}$$

où k_n est une constante numérique qui ne dépend que du nombre de dimensions, le second membre de (21) pouvant être calculé sur la frontière du domaine $U = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, arbitrairement petit. On remarquera que dans (21) l'intégrale est prise sur l'intersection de FD avec le support de $(d_z d_{\bar z} U)^{n-1}$.

8° Enfin envisageons les hypothèses suivantes :

- (a) Le domaine D contient le point x et est une composante connexe de l'ouvert $V < 0$, V étant plurisousharmonique deux fois continûment dérivable sur $\bar D - x$.
- (b) On a $(d_z d_{\bar z} V)^n = 0$ sur $\bar D - x$.
- (c) On a, au voisinage de x ,

$$V(z_k) = \log|z - x|^2 + h_x(z)$$

où h_x est deux fois continûment dérivable dans $\bar D$.

Alors la formule (21) où $U = e^V$ demeure valable, et l'on a, en remarquant que sur FD , $dU = d_z U + d_{\bar z} U = 0$

(22) $$f(x) = k''_n \int \frac{f(z)}{U^n} \left(\frac{i}{2} d_z d_{\bar z} U\right)^{n-1} \wedge \frac{i}{2} (d_z U - d_{\bar z} U)$$

k''_n constante numérique. Donc la fonction pluriharmonique $R(x)$ partie réelle de

$f(x)$ s'exprime sous la forme

$$R(x) = k_n'' \int_{FD} \frac{R(z)}{U^n} \left(\frac{i}{2} d_z d_{\bar{z}} U\right)^{n-1} \wedge \frac{i}{2} (d_z U - d_{\bar{z}} U) \tag{23}$$

et l'intégrale ne fait intervenir que les valeurs de $R(z)$ sur le support du courant positif $(i d_z d_{\bar{z}} U)^{n-1}$.

BIBLOGRAPHIE

[1] BOREL (A.) et HAEFLIGER (A.). - La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 461-513.

[2] LELONG (Pierre). - Sur les dérivées d'une fonction plurisousharmonique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 238, 1954, p. 2276-2278.

[3] LELONG (Pierre). - Integration of a differential form on an analytic complex subvariety, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 43, 1957, p. 246-248.

[4] LELONG (Pierre). - Intégration sur un ensemble analytique complexe, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 239-262.

[5] de RHAM (G.) and KODAIRA (K.). - Harmonic integrals. Lectures delivered in a Seminar conducted by H. Weyl and K. L. Siegel, 1950. - Princeton, Institute for advanced Study, 1953 (multigraphié).