Aimée Baillette

Fonctions approchables par des sommes d'exponentielles

Séminaire Lelong. Analyse, tome 5 (1962-1963), exp. n° 7, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1962-1963__5__A7_0>

FONCTIONS APPROCHABLES PAR DES SOMMES D'EXPONENTIELLES

par Mlle Aimée BAILLETTE

On se donne une suite $\Lambda = \{\lambda_n\}$ réelle positive croissante,

$$0 < \lambda_n < \lambda_{n+1} \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty \quad ,$$

et un ouvert Ω du plan complexe. Soit $\mathcal{H}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes dans Ω , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, et soit $\mathcal{H}_\Lambda(\Omega)$ le sous-espace fermé engendré par $\{\exp(-\lambda_n z)\}$.

On se propose de chercher les domaines Δ dans lesquels toute fonction $f \in \mathcal{H}_\Lambda(\Omega)$ a un prolongement borné, c'est-à-dire tel qu'il existe une constante A et un compact $K \subset \Omega$ de telle sorte que :

$$\sup_{z\in\Delta} |f(z)| < A \sup_{z\in K} |f(z)| \quad .$$

La forme des domaines Δ est liée à la suite Λ par son "indice de saturation" ainsi défini :

soit $n(r) = \sum_{\lambda_n<r} 1$ la fonction de distribution de la suite Λ ; l'indice de saturation de Λ est

$$L = \lim_{\delta\to 1-0} \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r) - n(r\delta)}{r} \quad .$$

On démontre le résultat suivant :

THÉORÈME 1. - Soient Λ une suite ayant un indice de saturation fini et Ω un ouvert qui contient le diagramme conjugué de la fonction

$$C(w) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w^2}{(\lambda_n)^2}\right) \quad .$$

1° Toute fonction $f \in \mathcal{H}_\Lambda(\Omega)$ a un prolongement borné dans tout domaine Δ tel que

$$|y| \leq \exp ax \qquad a < \frac{1}{L} \qquad x \geq x_0 > x_0(a) \quad .$$

2° Il existe une fonction appartenant à $\mathcal{H}_\Lambda(\Omega)$ qui a une infinité de points singuliers dans tout domaine Δ tel que

$$|y| \leq \exp ax \qquad a > \frac{1}{L} \qquad x \geq x_0 \quad .$$

La démonstration de ce théorème repose sur l'étude des propriétés de la fonction $1/C(w)$.

Nous appellerons "<u>co-indicatrice</u>" de la fonction $C(w)$, la fonction

$$H(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r} \log \left|\frac{1}{C(r \exp i\theta)}\right| \qquad \theta \neq k\pi \quad .$$

THÉORÈME 2. - Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\theta_0(\varepsilon) > 0$ tel que

$$0 < |\theta| < \theta_0(\varepsilon) \implies (L - \varepsilon) \log \frac{1}{|\theta|} < H(\theta) < (L + \varepsilon) \log \frac{1}{|\theta|} \quad .$$

<u>Démonstration</u>.

1° Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\theta_0(\varepsilon) > 0$ et $r_0(\varepsilon) > 0$ tels que

$$0 < |\theta| < \theta_0(\varepsilon) \text{ et } r > r_0(\varepsilon) \implies \frac{1}{r} \log \left|\frac{1}{C(r \exp i\theta)}\right| < (L + \varepsilon) \log \frac{1}{|\theta|} \quad .$$

En effet, soit :

$$C(r \exp i\theta) = C_1 \, C_2 \, , \qquad C_1(r \exp i\theta) = \prod_{r/\gamma<\lambda_n<r\gamma} \left(1 - \frac{r^2 \exp 2i\theta}{(\lambda_n)^2}\right) \quad .$$

Pour r assez grand, $\gamma > 1$, assez voisin de 1 , et $0 < |\theta| < \frac{\pi}{4}$ on a :

$$|C_1(r \exp i\theta)| > |\sin 2\theta|^{n(r\gamma)-n(r/\gamma)} > |\theta|^{r(L+\varepsilon/2)} \quad .$$

D'autre part :

$$\log |C_2(r \exp i\theta)| > \int_0^{r/\gamma} + \int_{r\gamma}^{\infty} \log \left|1 - \frac{r^2}{\lambda^2}\right| dn(\lambda) > - ra \qquad a = \text{constante} \quad .$$

2° On construit une suite $r_n \to \infty$ et une suite $\mathbb{S}_n \to 1 - 0$ telles que

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n(r_n - n(r_n \, \mathbb{S}_n)}{r_n} \quad .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\theta_0(\varepsilon)$ tel que

$$0 < |\theta| < \theta_0(\varepsilon) \text{ et } n > n_0(\theta \, , \, \varepsilon) \implies \frac{1}{r_n} \log \left|\frac{1}{C(r_n \exp i\theta)}\right| > (L - \varepsilon) \log \frac{1}{|\theta|} \quad .$$

En effet, soit

$$C(r_n \exp i\theta) = C_1 \, C_2 \, , \qquad C_1(r_n \exp i\theta) = \prod_{r_n \mathbb{S}_n<\lambda_p<r_n} \left(1 - \frac{r_n^2 \exp 2i\theta}{(\lambda_p)^2}\right) \quad .$$

Pour n assez grand et $|b\theta| < 1$ (b constante > 2), on a :

$$|C_1(r_n \exp i\theta)| < \left|\frac{2r_n^2 \, \theta}{r_n^2 \, \mathbb{S}_n^2}\right|^{n(r_n)-n(r_n \mathbb{S}_n)} < |b\theta|^{r_n(L-\varepsilon/2)} \quad .$$

D'autre part

$$|C_2(r_n \exp i\theta)| < \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r_n^2}{(\lambda_p)^2}\right) < \exp r_n c \qquad c = \text{constante}$$

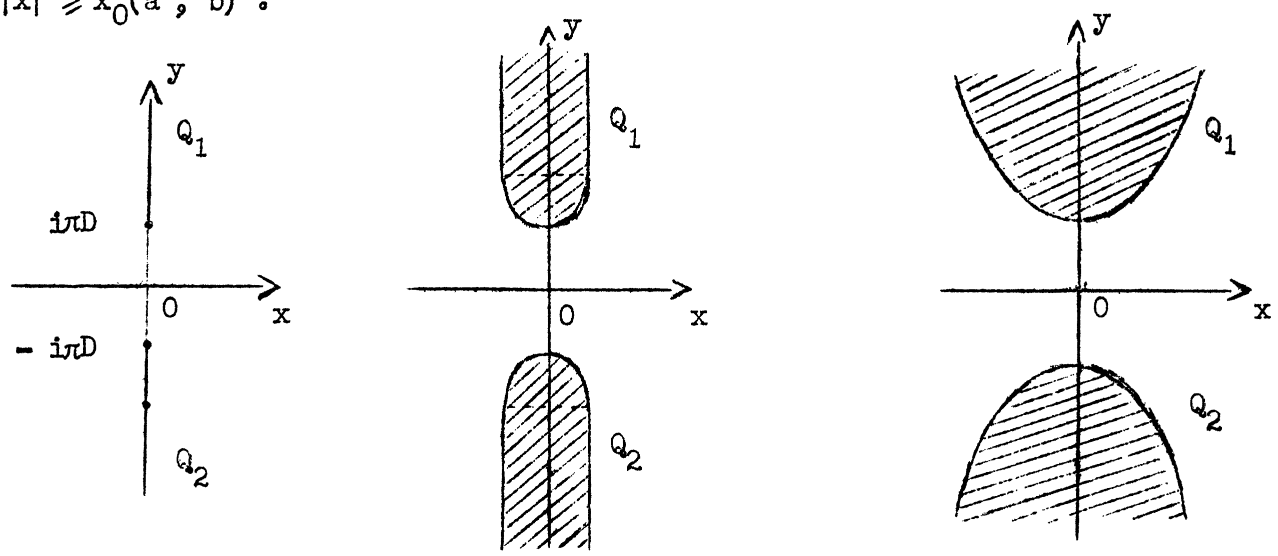
ce qui achève de démontrer le théorème 2.

Nous appellerons "co-diagramme conjugué" Q, de la fonction $C(w)$, la réunion suivante des ensembles :

Q_1 : ensemble des points $z = x + iy$ tels que $x \cos\theta - y \sin\theta \leqslant H(\theta)$ pour tout $\theta \in \,]0\,,\,\pi[$.

Q_2 : ensemble des points $z = x + iy$ tels que $x \cos\theta + y \sin\theta \leqslant H(\theta)$ pour tout $\theta \in \,]0\,,\,\pi[$.

Si $0 < L < \infty$ et si $0 < a < \frac{1}{L} < b$, tout point $z = x + iy$ de la frontière de θ satisfait les inégalités : $\exp a|x| < |y| < \exp b|x|$ pourvu que $|x| \geqslant x_0(a\,,\,b)$.



Λ mesurable de densité D

Λ a une densité maximum finie

$\theta < L < \infty$

Démonstration du théorème 1.

1° A chaque $Z \in \Delta$ on associe une mesure $d\mu_Z$ à support compact $K \subset \Omega$ indépendant de Z, telle que :

$$\int \exp(-\lambda_n z)\, d\mu_Z(z) = \exp(-\lambda_n z) \qquad \int |d\mu_Z(z)| < A \quad .$$

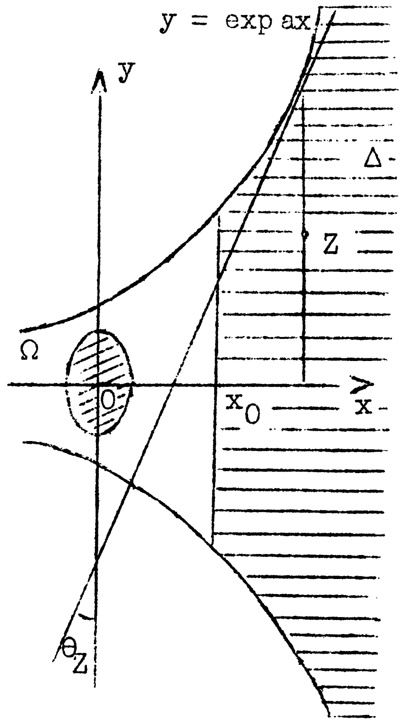
On pose pour toute $f \in \mathscr{H}_\Lambda(\Omega)$:

$$\int f(z)\, d\mu_Z(z) = f(Z) \quad .$$

On définit $d\mu_Z$ en posant :

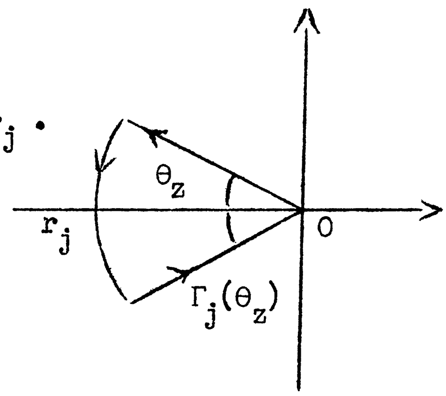
$$\int \exp wz \, d\mu_Z(z) = M_Z(w) = C(w) \, A_Z(w)$$

$$A_Z(w) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j(\theta_Z)} \frac{e^{w'Z}}{C(w')(w - w')} dw' + g(w)$$



$g(w) = 0 \qquad$ si $\quad |\arg w| < \pi - \theta_Z$

$g(w) = \frac{\exp wZ}{C(w)} \quad$ si $|\arg w - \pi| < \theta_Z$



$r_j \to \infty \qquad$ tel que $\quad |C(w')| > \exp(-\varepsilon r_j) \quad$ pour $\quad |w'| = r_j$.

φ_Z étant la transformée de Laplace de $M_Z(w)$,
on prend la mesure

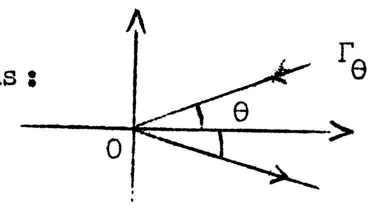
$$d\mu_Z(z) = \frac{1}{2\pi i} \varphi_Z(z) \, dz$$

sur un contour fermé $K \subset \Omega$ et qui entoure le diagramme conjugué de $C(w)$.

2° La fonction

$$F_\theta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} \frac{\exp(-wz)}{C(w)} dw \qquad (0 < \theta < \pi)$$

est holomorphe dans l'angle A_θ intersection des demi-plans :



$x \cos \theta - y \sin \theta > H(\theta)$

$x \cos \theta + y \sin \theta > H(\theta)$

θ variant dans $]0, \pi[$ on définit ainsi une fonction $F(z)$ holomorphe à l'extérieur du co-diagramme conjugué Q de $C(w)$ ayant une infinité de points singuliers sur la frontière de Q ; F est limite uniforme d'une suite de plynômes de Dirichlet dans une partie de son domaine d'existence et possède une infinité de points singuliers dans tout domaine Δ tel que

$$|y| \leq \exp ax \qquad a > \frac{1}{L} \qquad x \geq x_0 \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNSTEIN (Vladimir). - Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet. - Paris, Gauthier-Villars, 1933 (Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions).

[2] KAHANE (Jean-Pierre). - Lectures on mean periodic functions. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1959 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on mathematics, 15).

[3] KAHANE (Jean-Pierre). - Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 5, 1953-1954, p. 39-130 (Thèse Sc. math. Paris, 1954).

[4] LEONT'EV (A. F.). - Sur la convergence des suites de polynômes de Dirichlet, [en russe], Dokl. Akad. Nauk, SSSR., t. 108, 1956, p. 23-26.

[5] LEONT'EV (A. F.). - Séries de polynômes de Dirichlet et leurs généralisations [en russe], Trudy mat. Inst. Steklova, t. 39, 1951, 214 p.

[6] LEVIN (B. J.). - Raspredelenie kornej celykh funkcij [Distribution des zéros des fonctions entières]. - Moscou, 1956.

[7] SCHWARTZ (Laurent). - Etude des sommes d'exponentielles. 2e éd. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 959 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 5).

[8] VALIRON (Georges). - Théorie des fonctions, 2e éd. - Paris, Masson, 1955 (Cours d'Analyse mathématique).