Séminaire Lelong.
Analyse

MICHEL HERVÉ

Quelques propriétés des applications holomorphes d'une boule à *m* dimensions dans elle-même

Séminaire Lelong. Analyse, tome 5 (1962-1963), exp. n° 3, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1962-1963__5__A3_0>

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS HOLOMORPHES D'UNE BOULE À m DIMENSIONS DANS ELLE-MÊME

par Michel HERVÉ

Notations. – L'espace numérique C^m sera toujours envisagé comme espace vectoriel complexe ; les points de cet espace seront notés par des minuscules latines, et considérés, dans les calculs, comme des matrices à m lignes, une colonne; a^* désignera la ligne transposée et conjuguée de la colonne a. Ainsi

$$b^* a = \sum_{j=1}^{m} \bar{b}_j a_j \quad ,$$

où les a_j et b_j sont les coordonnées des points a et b ; enfin, on posera

$$\|a\|^2 = a^* a = \sum_{j=1}^{m} |a_j|^2 \quad .$$

Dans tout l'exposé, B_m désignera la boule-unité $\|x\| < 1$, où x est le point courant de C^m, et f une application holomorphe de B_m dans elle-même, autrement dit, un système de m fonctions holomorphes pour $\|x\| < 1$ et dont les modules ont des carrés de somme < 1.

L'application f est un automorphisme de B_m si elle est de la forme

$$x' = A\Gamma_u \frac{x - u}{1 - u^* x} \quad , \tag{0.1}$$

où A est une matrice unitaire d'ordre m, $u \in B_m$, et

$$\Gamma_u = \frac{uu^*}{1 + \sqrt{1 - \|u\|^2}} + \sqrt{1 - \|u\|^2}\, I_m \quad , \tag{0.2}$$

I_m matrice-unité d'ordre m. Par suite :

a. les automorphismes de B_m qui laissent l'origine invariante sont les restrictions à B_m des applications linéaires unitaires de C^m sur lui-même ;

b. tout automorphisme f de B_m admet un prolongement continu $\bar{f}$ à $\bar{B}_m$, qui applique biunivoquement la sphère ∂B_m sur elle-même ;

c. tout automorphisme de B_m est la restriction à B_m d'une application linéaire inversible de l'espace projectif P^m sur lui-même.

1. Le lemme de Schwarz.

Dans l'énoncé qui suit, la partie (a) est classique (cf. par exemple BOCHNER-MARTIN).

THÉORÈME 1. - Soit f une application holomorphe de la boule B_m dans elle-même, laissant l'origine invariante. Alors :

a. $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in B_m$;

b. l'ensemble des points $x \in B_m$, tels que $\|f(x)\| = \|x\|$, est l'intersection de B_m avec un sous-espace vectoriel V de C^m, dont la dimension p peut aller de 0 à m ;

c. la restriction de f à $B_m \cap V$ coïncide avec la restriction à $B_m \cap V$ d'un automorphisme de B_m ; en particulier, si V est de dimension m, f est un automorphisme de B_m.

Démonstration.

a. Etant donnés deux points a et $b \in C^m$, la fonction

(1.1) $$\varphi_{a,b}(\zeta) = b^* f(\zeta a)$$

est holomorphe et de module $\leqslant \|b\|$ pour $|\zeta| < \frac{1}{\|a\|}$, et nulle avec ζ ; d'après le lemme de Schwarz classique :

(1.2) $$|\varphi_{a,b}(\zeta)| \leqslant \|a\| \, \|b\| \, |\zeta| \quad \text{pour tout } \zeta \text{ tel que } |\zeta| < \frac{1}{\|a\|} ,$$

l'égalité dans (1.2) pour un ζ entraînant

(1.3) $$\varphi_{a,b}(\zeta) \equiv e^{i\alpha}\|a\| \, \|b\| \, \zeta , \qquad \alpha \in R .$$

En réunissant (1.1) et (1.2), on a :

$$\|f(\zeta a)\| = \sup_{\|b\|=1} |b^* f(\zeta a)| = \sup_{\|b\|=1} |\varphi_{a,b}(\zeta)| \leqslant \|\zeta a\| ,$$

pour tout $\zeta a \in B_m$.

b. On peut développer chaque coordonnée de $f(x)$ en série de polynômes homogènes, d'où une série normalement convergente sur tout compact de B_m :
$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$, où chaque coordonnée de $f_k(x)$ est un polynôme homogène et de degré k par rapport aux coordonnées de x ; les f_k sont donc des applications holomorphes de C^m dans C^m, et f_1 est linéaire. Etant donnés a et $b \in C^m$, pour $\|\zeta a\| < 1$:

$$\varphi_{a,b}(\zeta) = \sum_{k=1}^{+\infty} b^* f_k(\zeta a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \zeta^k \, b^* f_k(a) ,$$

d'où en particulier :

(1.4) $$\varphi'_{a,b}(0) = b^* f_1(a) \quad .$$

En réunissant (1.2) et (1.4), on a :

(1.5) $$\|f_1(a)\| = \sup_{\|b\|=1} |b^* f_1(a)| = \sup_{\|b\|=1} |\varphi'_{a,b}(0)| \leqslant \|a\| \quad ,$$

pour tout $a \in C^m$.

Prenons maintenant $a \in B_m$, $a \neq 0$, et supposons $\|f(a)\| = \|a\|$. D'après (1.2) :

$$|\varphi_{a,f(a)}(\zeta)| \leqslant \|a\|^2 \, |\zeta| \quad \text{pour tout } \zeta \text{ tel que } |\zeta| < \frac{1}{\|a\|} \quad ;$$

mais

$$\varphi_{a,f(a)}(1) = \|f(a)\|^2 = \|a\|^2 \quad ,$$

donc (1.3) est réalisé :

$$\varphi_{a,f(a)}(\zeta) \equiv \|a\|^2 \zeta \; , \qquad \varphi'_{a,f(a)}(0) = \|a\|^2 \quad .$$

Tenant compte de (1.4) et (1.5), on a $f(a)^* f_1(a) = \|f(a)\|^2$ avec $\|f_1(a)\| \leqslant \|f(a)\|$, donc $f_1(a) = f(a)$.

Prenons toujours $a \in B_m$, $a \neq 0$, et supposons au contraire $\|f_1(a)\| = \|a\|$. Si l'on pose

$$g(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} f_k(x) \quad ,$$

on a, pour $\|\zeta a\| < 1$:

$$\|f(\zeta a)\|^2 = \|f_1(\zeta a)\|^2 + \|g(\zeta a)\|^2 + 2 \operatorname{Re}[f_1(\zeta a)^* g(\zeta a)] \quad ,$$

alors que, d'après l'hypothèse et la partie (a) du théorème, $\|f(\zeta a)\| \leqslant \|f_1(\zeta a)\|$, donc $\operatorname{Re}[f_1(\zeta a)^* g(\zeta a)] \leqslant 0$. Or

$$f_1(\zeta a)^* g(\zeta a) = \bar{\zeta} \sum_{k=2}^{+\infty} \zeta^k f_1(a)^* f_k(a) = |\zeta|^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \zeta^{k-1} f_1(a)^* f_k(a) \quad ;$$

la dernière série converge pour $|\zeta| < \frac{1}{\|a\|}$; sa somme est nulle pour $\zeta = 0$ et de partie réelle $\leqslant 0$ partout ; elle est donc identiquement nulle, c'est-à-dire que $f_1(a)^* f_k(a) = 0$ pour tout $k \geqslant 2$. Alors $f_1(a)^* f(a) = \|f_1(a)\|^2$ avec $\|f(a)\| \leqslant \|f_1(a)\|$, donc $f(a) = f_1(a)$.

En réunissant les résultats des deux alinéas précédents, nous voyons que l'ensemble des points $x \in B_m$ tels que $\|f(x)\| = \|x\|$ est aussi celui des points $x \in B_m$ tels que $\|f_1(x)\| = \|x\|$, et que f et f_1 ont la même restriction à cet ensemble. Il reste à prouver que $V = \{x \in C^m \mid \|f_1(x)\| = \|x\|\}$ est un sous-espace vectoriel de C^m.

Soient donc a et $b \in V$; on a, pour $\zeta \in C$:

$$\|\zeta a + b\|^2 = |\zeta|^2 \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\zeta b^* a)$$

et

$$\|f_1(\zeta a + b)\|^2 = |\zeta|^2 \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2 \operatorname{Re}[\zeta f_1(b)^* f_1(a)] \quad .$$

Par suite, en tenant compte de (1.5) :

$$\operatorname{Re}[\zeta f_1(b)^* f_1(a)] \leqslant \operatorname{Re}(\zeta b^* a) \quad \text{pour tout } \zeta \in C \quad ,$$

donc

$$f_1(b)^* f_1(a) = b^* a \quad \text{et} \quad \|f_1(\lambda a + \mu b)\| = \|\lambda a + \mu b\|$$

quels que soient λ et $\mu \in C$.

c. Supposant $p \geqslant 1$, on choisit une base orthonormée $\{e_1 , \dots , e_p\}$ de V, que l'on complète en une base orthonormée de C^m, ainsi que le système orthonormé $\{f_1(e_1) , \dots , f_1(e_p)\}$.

2. Conséquences du lemme de Schwarz.

On ne suppose plus que f laisse l'origine invariante.

A. L'ensemble des points de B_m invariants par f.

COROLLAIRE 1. – Etant donnée une application holomorphe f de la boule B_m dans elle-même, l'ensemble des points de B_m invariants par f est vide ou est l'intersection de B_m avec une variété linéaire affine de C^m, dont la dimension peut aller de 0 à m.

B. Le lemme de Pick.

Soient x_0 et $x_1 \in B_m$:

$$\delta(x_0 , x_1) = \left\| \Gamma_{x_0} \frac{x_1 - x_0}{1 - x_0^* x_1} \right\|$$

est une distance dans B_m invariante par les automorphismes de B_m, et $\delta(0 , x) = \|x\|$.

Pour énoncer le lemme de Pick, notons $d_{a,b}$ la droite complexe, ou variété linéaire affine de dimmension 1, passant par deux points donnés a et $b \in C^m$, $a \neq b$, $d_{a,b}$ est le lieu, pour $\zeta \in C$, du point $a + \zeta(b - a)$; l'ensemble des ζ pour lesquels $\|a + \zeta(b - a)\| < 1$ est vide ou est un disque ouvert de C, dont le centre est le point qui rend $\|a + \zeta(b - a)\|$ minimum.

COROLLAIRE 2. - Etant donnée une application holomorphe f de la boule B_m dans elle-même :

a. $\delta[f(x_0), f(x_1)] \leq \delta(x_0, x_1)$ quels que soient x_0 et $x_1 \in B_m$;

b. si l'égalité se produit avec $x_0 \neq x_1$, alors la restriction de f au disque $B_m \cap d_{x_0,x_1}$ l'applique biunivoquement sur le disque $B_m \cap d_{f(x_0),f(x_1)}$, et

$$\delta[f(x), f(x')] = \delta(x, x')$$

quels que soient x et $x' \in B_m \cap d_{x_0,x_1}$;

c. réciproquement, si deux droites complexes d et d', rencontrant B_m, sont telles que la restriction de f au disque $B_m \cap d$ l'applique biunivoquement sur le disque $B_m \cap d'$, alors

$$\delta[f(x), f(x')] = \delta(x, x')$$

quels que soient x et $x' \in B_m \cap d$;

d. étant donné $x_0 \in B_m$, l'ensemble des points $x \in B_m$, tels que

$$\delta[f(x_0), f(x)] = \delta(x_0, x) \quad ,$$

est l'intersection de B_m avec une variété linéaire affine V de C^m, contenant x_0, dont la dimension p peut aller de 0 à m ; la restriction de f à $B_m \cap V$ coïncide avec la restriction à $B_m \cap V$ d'un automorphisme de B_m ; en particulier, si $p = m$, f est un automorphisme de B_m.

Remarque. - Soient d_1 et d_2 deux droites complexes rencontrant B_m, ayant un point commun x_0 et un seul, telles que la distance δ soit conservée par les restrictions de f aux disques $B_m \cap d_1$ et $B_m \cap d_2$: d'après le corollaire 2 (d), si $x_0 \in B_m$, δ est encore conservée par la restriction de f à l'intersection de B_m avec la variété linéaire affine de dimension 2 qui contient d_1 et d_2. Mais cette propriété ne subsiste plus si $x_0 \in \partial B_m$ ou $x_0 \in C^m - \bar{B}_m$.

3. La dérivée angulaire.

Etant donnés une application holomorphe f de B_m dans elle-même et deux points a et b de la sphère ∂B_m, posons

$$(3.1) \qquad F(x) = F(x\,;\,f, a, b) = \frac{|1 - b^* f(x)|^2}{|1 - a^* x|^2}\,\frac{1 - \|x\|^2}{1 - \|f(x)\|^2}, \qquad x \in B_m ,$$

et définissons $\lambda = \lambda(f, a, b)$, $0 < \lambda \leq +\infty$, par

$$(3.2) \qquad \lambda(f, a, b) = \sup_{x \in B_m} F(x\,;\,f, a, b) \quad .$$

THÉORÈME 2. — Soit f une application holomorphe de la boule B_m dans elle-même, et soient a et b deux points de la sphère ∂B_m.

a. S'il existe une suite de points $y_n \in B_m$ tels que $y_n \to a$ et $f(y_n) \to b$, alors

$$\lambda \leqslant \liminf_n \frac{1 - \|f(y_n)\|}{1 - \|y_n\|} .$$

b. Si f est un automorphisme de B_m, et b l'image de a par le prolongement continu de f à $\overline{B}_m$, alors $\lambda < +\infty$ et $F(x) = \lambda$ pour tout $x \in B_m$.

c. Si $\lambda < +\infty$ et si $x_0 \in B_m$ est tel que $F(x_0) = \lambda$, alors $F(x) = \lambda$ pour tout $x \in B_m \cap d_{x_0,a}$, et la restriction de f au disque $B_m \cap d_{x_0,a}$ l'applique biunivoquement sur le disque $B_m \cap d_{f(x_0),b}$.

d. Si $\lambda < +\infty$, étant donné un cône

$$(K) \quad \operatorname{Re}(1 - a^* x) \geqslant k\|a - x\| , \quad \text{où} \quad k \in \,]0\,,\,1[\quad ,$$

$$\frac{1 - \|f(x)\|}{1 - \|x\|} , \frac{1 - |b^* f(x)|}{1 - \|x\|} , \frac{1 - b^* f(x)}{1 - a^* x} \to \lambda \quad \text{quand} \quad x \to a , \quad x \in B_m \cap K .$$

Remarque. — Dans le cas classique $m = 1$, K est un angle saillant de sommet a dont la bissectrice intérieure passe par l'origine, et le dernier résultat signifie que la restriction de f à l'angle $B_1 \cap K$ possède une application affine tangente au point a, d'où le nom de dérivée angulaire ; mais ceci n'est plus vrai si $m \geqslant 2$.

Soit, par exemple, $m = 2$, les coordonnées étant notées ξ et η, soit

$$\varphi(\xi) = \frac{2\xi + \sqrt{1 - \xi^2}}{2 + \sqrt{1 - \xi^2}} , \qquad |\xi| < 1 \quad ,$$

la détermination adoptée pour $\sqrt{1 - \xi^2}$ valant 1 à l'origine, et soit enfin ψ une fonction holomorphe et non nulle sur le disque-unité B_1, telle que $\log|\psi|$ soit la plus grande minorante harmonique, sur B_1, de la fonction surharmonique $\log\sqrt{1 - |\varphi|^2}$. Prenons l'application holomorphe f de la boule B_2 dans elle-même définie par $\xi' = \varphi(\xi)$, $\eta' = \psi(\xi)$, $|\xi| < 1$, et les points a, b confondus avec le point de coordonnées 1, 0 : quand $t \to 1$, $t \in \,]-1\,,\,+1[$, on a

$$\varphi(t) \to 1 , \quad \psi(t) \to 0 , \quad 1 - \varphi(t) \sim 1 - t , \quad \log|\psi(t)| \sim \frac{3}{4}\log(1 - t) \quad ,$$

donc

$$ta \to a , \quad f(ta) \to a , \quad \frac{1 - \|f(ta)\|}{1 - \|ta\|} \to 1 \quad ;$$

ainsi $\lambda(f\,,\,a\,,\,a) = 1$, mais la restriction de f à $B_2 \cap K$ n'a pas d'application affine tangente au point a, puisque $\frac{\psi(t)}{1 - t}$ n'est pas borné quand $t \to 1$, $t \in \,]-1\,,\,+1[$.

4. La suite des itérées d'une application holomorphe de B_m dans elle-même.

Soit f_n la n-ième itérée de l'application f, $f_1 = f$. De toute suite d'itérées de f on peut extraire une suite partielle uniformément convergente sur toute partie compacte de B_m ; la limite g de cette suite partielle peut être, ou bien une application holomorphe de B_m dans B_m, ou bien une application constante de B_m sur un point de la sphère ∂B_m. Si f est un automorphisme de B_m, il en est de même des f_n, et de g dans la première éventualité ci-dessus. (Cf. H. CARTAN (*).)

THÉORÈME 3. - Si f est un automorphisme de B_m, autre que l'identité : ou bien f laisse invariant un point au moins de B_m, alors la suite f_n ne converge pas, et les limites de suites partielles convergentes sont encore des automorphismes de B_m ; ou bien f ne laisse invariant aucun point de B_m, alors la suite f_n converge, uniformément sur tout compact de B_m, vers une application constante sur un point de la sphère ∂B_m, invariant par le prolongement continu de f à $\bar{B}_m$.

Démonstration. - Si le point $x_0 \in B_m$ est invariant par f, il l'est aussi par les limites d'itérées de f, qui sont donc des automorphismes de B_m ; si la suite partielle $f_{n_k} \to g$ ($n_k \to +\infty$ avec k), la suite $f_{n_k+1} \to f \circ g \neq g$, donc la suite f_n ne converge pas.

Si f ne laisse invariant aucun point de B_m, la propriété à établir est classique dans B_1 ; on va donc la supposer vraie dans B_{m-1}, et envisager successivement les cas suivants :

a. Le prolongement linéaire de f à l'espace projectif P^m, défini par (0.1), laisse invariant dans son ensemble un hyperplan (ou variété linéaire affine de dimension $m-1$) H de C^m rencontrant B_m.

Alors, la restriction de f à $B_m \cap H$ applique biunivoquement $B_m \cap H$ sur lui-même ; or, si l'on rapporte H à une base orthonormée, $B_m \cap H$ est une boule ouverte de C^{m-1}, pour laquelle la restriction de f à $B_m \cap H$ est un automorphisme sans point invariant. Par hypothèse, les restrictions des f_n à $B_m \cap H$ ont pour limite un point appartenant à $\partial B_m \cap H$; alors, il en est de même des f_n.

(*) CARTAN (Henri). - Sur les fonctions de plusieurs variables complexes, L'itération des transformations intérieures d'un domaine borné, Math. Z., t. 35, 1932, p. 760-773.

b. Le prolongement linéaire de f à P^m laisse invariant un point $x_1 \in \complement \bar{B}_m$ (qui peut être à l'infini).

x' et y' étant les images par (0.1) de deux points quelconques x et $y \in P^m$, on a

$$(4.1) \qquad 1 - y'^* x' = \frac{1 - \|u\|^2}{(1 - \overline{u^* y})(1 - u^* x)} (1 - y^* x) \quad .$$

Alors, il résulte de l'hypothèse que le prolongement linéaire de f à P^m laisse invariant, dans son ensemble, l'hyperplan $x_1^* x = 1$ de C^m, qui rencontre B_m, et l'on est ramené au cas (a).

c. Le prolongement linéaire de f à P^m laisse invariant un point $a \in \partial B_m$.

D'après (4.1), il laisse invariant, dans son ensemble, l'hyperplan $a^* x = 1$ de C^m, dont tous les points, sauf a, $\in \complement \bar{B}_m$; si l'on écarte le cas (b), a est le seul point invariant de l'hyperplan. D'autre part, le prolongement de f laisse invariante, dans son ensemble, au moins une droite complexe d issue de a dans l'hyperplan ; si d est le lieu, pour $\zeta \in C$, du point $a + \zeta b$, où $b \neq 0$, $a^* b = 0$, alors le prolongement de f transforme $a + \zeta b$ en $a + \zeta_1 b$, où ζ_1 est lié à ζ par une relation homographique, non dégénérée, ne laissant invariant que 0, donc de la forme

$$(4.2) \qquad \frac{1}{\zeta_1} = \frac{1}{\zeta} + h \, , \qquad h = \text{Cte} \neq 0 \quad .$$

En itérant (4.2) : le prolongement linéaire de f_n à P^m transforme $a + \zeta b$ en $a + \zeta_n b$, où

$$\frac{1}{\zeta_n} = \frac{1}{\zeta} + nh \to \infty \quad \text{quand} \quad n \to +\infty \quad ;$$

autrement dit : si $y \in d$ (y pouvant être à l'infini), les images y_n de y par les prolongements des f_n ont pour limite a.

Alors, étant donné $x \in B_m$, choisissons $y \in d$ tel que $y^* x = 1$: d'après (4.1), on a, de proche en proche, $y_n^* f_n(x) = 1$, et $y_n \to a$ entraîne $f_n(x) \to a$.

Comme toute application linéaire inversible de P^m sur lui-même laisse invariant un point au moins de P^m, tous les cas possibles ont été envisagés. Ainsi, lorsque f ne laisse invariant aucun point de B_m, la suite f_n a pour limite un point $a \in \partial B_m$; enfin, étant donné $x \in B_m$, $f_n(x) \to a$ et

$$f \circ f_n(x) = f_{n+1}(x) \to a \quad ,$$

donc a est invariant par le prolongement continu de f à $\bar{B}_m$.

THÉORÈME 4. – Si l'application f ne laisse invariant aucun point de B_m, la suite f_n converge, uniformément sur tout compact de B_m, vers une application constante sur un point de la sphère ∂B_m.

Démonstration.

a. Envisageons d'abord le cas où une suite d'itérées f_{n_k}, $n_k \to +\infty$ avec k, a une limite g appliquant B_m dans B_m : on peut supposer, en remplaçant au besoin la suite n_k par une suite partielle, que $n_{k+1} > n_k$ et $f_{n_{2k+1}-n_{2k}} \to h$. Comme $f_{n_{2k+1}-n_{2k}} \circ f_{n_{2k}} = f_{n_{2k+1}}$, $g(B_m)$ est contenu dans l'ensemble analytique

$$B_q = \{x \in B_m \mid h(x) = x\} \quad ;$$

ainsi $B_q \neq \emptyset$, donc h est une application holomorphe de B_m dans B_m ; d'autre part,

$$f \circ h = \lim_k f_{1+n_{2k+1}-n_{2k}} = h \circ f \quad ,$$

donc :

(4.3) $$x \in B_q \text{ entraîne } f(x) \in B_q \quad .$$

Or (n° 2, corollaire 1 appliqué à h), B_q est l'intersection de B_m avec une variété linéaire affine W, dont la dimension q peut aller de 0 à m ; si $q = 0$, B_0 est réduit à un point $x_0 \in B_m$, (4.3) signifie que x_0 est invariant par f. Si $q \geq 1$, $B_q = B_m \cap W$ est une boule à q dimensions ; la restriction de f à B_q est, d'après (4.3), une application holomorphe de B_q dans B_q, dont les itérés de rangs $n_{2k+1} - n_{2k}$ ont pour limite l'application identique : cette restriction est donc (cf. l'article de H. CARTAN déjà cité au début du n° 4) un automorphisme de la boule B_q, qui (théorème 3) laisse invariant un point au moins de B_q.

b. Supposons maintenant que f ne laisse invariant aucun point de B_m : alors aucune limite d'itérées de f, dont les rangs tendent vers $+\infty$, ne peut être une application de B_m dans B_m, autrement dit $\|f_n(x)\| \to 1$ pour tout $x \in B_m$. On peut extraire de la suite des entiers une suite partielle $n_j \to +\infty$ telle que

$$\|f_{n_j+1}(0)\| \geq \|f_{n_j}(0)\| \quad ,$$

et de celle-ci une suite partielle $n_k \to +\infty$ telle que

$$\frac{1 - \|f_{n_k+1}(0)\|}{1 - \|f_{n_k}(0)\|} \leq 1$$

et que la suite f_{n_k} converge ; sa limite est une constante $a \in \partial B_m$, donc

$$f_{n_k}(0) \to a \, , \qquad f \circ f_{n_k}(0) = f_{n_k} \circ f(0) \to a \, .$$

Alors (théorème 2 (a)), $\lambda(f \, , \, a \, , \, a) \leq 1$, donc

$$\frac{|1 - a^* f(x)|^2}{1 - \|f(x)\|^2} \leq \frac{|1 - a^* x|^2}{1 - \|x\|^2} \quad \text{pour tout} \quad x \in B_m \quad ;$$

en itérant cette inégalité :

$$|1 - a^* f_n(x)|^2 \leq [1 - \|f_n(x)\|^2] \frac{|1 - a^* x|^2}{1 - \|x\|^2} \quad \text{pour tout} \quad x \in B_m \quad ,$$

et $\|f_n(x)\| \to 1$ entraîne $f_n(x) \to a$.