Séminaire Lelong.
Analyse

Antoni Zygmund

Sur la différentiabilité des fonctions

Séminaire Lelong. Analyse, tome 3 (1961), exp. nº 12, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1961__3__A9_0>

SUR LA DIFFÉRENTIABILITÉ DES FONCTIONS

par Antoni ZYGMUND

I

Dans ces deux exposés, je veux esquisser quelques résultats sur la différentiabilité des fonctions. Les résultats concernant la différentiabilité des fonctions lisses ont été obtenus en collaboration avec E. M. STEIN, les autres avec A. P. CALDERÓN. Les démonstrations (ainsi qu'un nombre de généralisations) vont paraître ailleurs.

Soit $F(x)$ une fonction d'une variable réelle (nous ne considérons que des fonctions mesurables) définie au voisinage d'un point x_0. Les fonctions

$$\varphi_{x_0}(t) = \varphi_{x_0}(t\ ;\ F) = \frac{1}{2}[F(x_0 + t) + F(x_0 - t)]$$

$$\psi_{x_0}(t) = \psi_{x_0}(t\ ;\ F) = \frac{1}{2}[F(x_0 + t) - F(x_0 - t)]$$

peuvent être nommées respectivement la <u>partie paire</u> et la <u>partie impaire</u> de $F(x_0 + t)$; nous allons aussi utiliser les expressions <u>partie paire</u> et <u>partie impaire</u> de F en x_0.

Ces deux parties sont d'importance dans certains problèmes de la théorie des fonctions d'une variable réelle. Par exemple, on sait bien qu'en ce qui concerne la convergence ou sommabilité, d'une série de Fourier au point x_0, c'est le comportement de φ_{x_0} qui est décisif ; dans le cas des séries conjuguées des séries de Fourier le rôle analogue est joué par ψ_{x_0}. Dans cet exposé, nous allons considérer le problème de différentiabilité de $\varphi_{x_0}(t)$ et $\psi_{x_0}(t)$. Ce problème appartient essentiellement à la théorie des fonctions de la variable réelle, mais les méthodes utilisées dans les démonstrations s'appuient dans des résultats assez délicats de la théorie des séries de Fourier et des fonctions d'une variable complexe.

La différentiabilité de $\psi_{x_0}(t)$ pour $t = 0$ équivaut à l'existence de la dérivée symétrique

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(x_0 + t) - F(x_0 - t)}{2t}$$

de F en x_0. La différentiabilité de $\varphi_{x_0}(t)$ pour $t = 0$ équivaut à la condition

$$(1) \qquad F(x_0 + t) + F(x_0 - t) - 2F(x_0) = o(t) \qquad (t \to 0) \quad .$$

Les fonctions satisfaisant à cette dernière condition sont dites <u>lisses</u> au point x_0, nous dirons aussi qu'elles satisfont à la condition λ en x_0. Si l'on remplace ici $o(t)$ par $O(t)$, on parlera de la condition Λ. Les fontions continues qui satisfont à la condition λ, ou Λ, possèdent un nombre de propriétés intéressantes (voir [3]).

Il est immédiat que si $F'(x_0)$ existe et est finie, les fonctions $\varphi_{x_0}(t)$ et $\psi_{x_0}(t)$ sont différentiables pour $t = 0$. La réciproque n'est pas vraie ni la différentiabilité de $\varphi_{x_0}(t)$ en $t = 0$, ni celle de $\psi_{x_0}(t)$, n'impliquent l'existence de $F'(x_0)$. Il est naturel cependant de se poser la question de savoir s'il existe ici des résultats vrais presque partout (p. p.), et la réponse, un peu surprenante, est que les rôles joués par les parties paires et impaires de F sont à cet égard complètement différents. Citons quelques résultats connus.

THÉORÈME 1. - <u>Si</u> $F(x)$ <u>possède une dérivée symétrique en tout point</u> x <u>d'un ensemble</u> E, <u>alors</u> $F'(x)$ <u>existe p. p. dans</u> E.

THÉORÈME 2. - <u>Il y a des fonctions continues</u> $F(x)$ <u>satisfaisant partout à la condition</u> λ, <u>même uniformément en</u> x, <u>qui ne sont différentiables que dans un ensemble de mesure nulle</u>.

Le théorème 1 est un résultat, déjà assez ancien, de KHINČIN (voir [2]). Pour le théorème 1 on peut consulter, par exemple, [3] où on démontre que la fonction

$$(2) \qquad \sum 2^{-n} n^{-1/2} \sin 2^n x$$

jouit des propriétés exigées.

On peut cependant se demander si F est différentiable si l'on remplace (1) par une condition un peu plus forte. Le problème est résolu par les deux théorèmes qui suivent.

THÉORÈME 3. - Supposons qu'en tout point x_0 d'un ensemble E nous ayons

$$F(x_0 + t) + F(x_0 - t) - 2F(x_0) = 0[\varepsilon_{x_0}(t)\, t] \qquad (t \to +0) \tag{3}$$

où $\varepsilon_{x_0}(t)$ satisfait, pour tout $x_0 \in E$, aux conditions suivantes :

a. $\varepsilon_{x_0}(t)$ reste bornée pour $t \to 0$.

b. $\varepsilon^2_{x_0}(t)/t$ est intégrable près de $t = 0$. Alors $F'(x)$ existe p. p. dans E.

REMARQUE 1. - La situation est un peu différente en ce qui concerne la continuité de φ_{x_0} et ψ_{x_0} en $t = 0$. Ces deux continuités sont équivalentes, respectivement, aux relations :

$$\text{a.} \quad F(x_0 + t) + F(x_0 - t) - 2F(x_0) \to 0 \quad ,$$

$$\text{b.} \quad F(x_0 + t) - F(x_0 - t) \to 0 \qquad (t \to 0)$$

chacune d'elles pourrait être nommée continuité symétrique de F en x_0. On peut démontrer que si l'on a ou bien (a) ou bien (b) en tout point d'un ensemble E, alors F est continue en presque tout point de E. Ceci n'est qu'un cas spécial du résultat suivant (qui n'est pas difficile à établir) : soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ une suite de nombres différents, et soit $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ une autre suite telle que $\sum \beta_i = 0$. Supposons qu'en tout point x d'un ensemble E on ait

$$\sum \beta_i F(x + \alpha_i t) \to 0 \qquad (t \to +0) \quad .$$

Alors F est continue p. p. en E.

REMARQUE 2. - En d'autres termes F satisfait en tout point de E à la condition Λ.

THÉORÈME 4. - Soit $\eta(t)$ une fonction décroissante tendant vers 0 avec t, et satisfaisant à la condition $\eta(2t)/\eta(t) \to 1$ $(t \to +0)$, et telle que $\eta^2(t)/t$ n'est pas intégrable. Alors il existe une fonction continue $F(x)$ satisfaisant pour t suffaisamment petit, et uniformément en x, à la condition

$$(4) \qquad |F(x+t) + F(x-t) - 2F(x)| \leq \eta(t)\, t$$

est néanmoins presque partout non différentiable.

Tandis que la démonstration du théorème 3 est longue et difficile, la construction de la fonction F du théorème 4 ne l'est pas : c'est la fonction

$$F(x) = \sum \eta(2^{-n})\, 2^{-n} \sin 2^n x$$

multipliée par une constante convenable. Observons aussi qu'en vertu du théorème 4 la fonction (2) satisfait à la condition (4) avec $\eta(t) = A\,(\log \frac{1}{t})^{-1/2}$, pour une valeur A finie.

Supposons maintenant pour simplifier que la fonction $F(x)$ appartienne à la classe $L^2(-\infty, +\infty)$. Si elle satisfait aussi aux hypothèses du théorème 3, alors l'intégrale

$$(5) \qquad \mu(x_0) = \int_0^\infty \frac{[F(x_0+t) + F(x_0-t) - 2F(x_0)]^2}{t^3}\, dt$$

est finie pour $x_0 \in E$. Cette intégrale a été introduite par MARCINKIEWICZ, qui a aussi démontré que $\mu(x_0)$ est fini en presque tout point x_0 où la fonction F est différentiable. Le théorème 3 nous donne une sorte de réciproque : si l'intégrale (5) existe dans E et si, en outre, F satisfait en tout point de E à la condition Λ, alors $F'(x)$ existe p. p. dans E et l'on arrive ainsi au résultat suivant.

THÉORÈME 5. - Si F est de carré intégrable, et satisfait à la condition Λ en tout point d'un ensemble E, alors la condition nécessaire et suffisante pour que F soit différentiable p. p. dans E, est que l'intégrale (5) soit finie pour presque tout x_0 dans E.

Supposons de nouveau que $F \in L^2(-\infty, +\infty)$ et demandons-nous quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de l'intégrale (5) p. p.

dans E si l'on ne suppose plus que F satisfasse à la condition Λ dans E. Observons, que si l'on pose

$$|F(x_0 + t) + F(x_0 - t) - 2F(x_0)| = \varepsilon_{x_0}(t)\, t$$

l'inégalité $\mu(x_0) < \infty$ équivaut à la condition de l'intégrabilité de $\varepsilon_{x_0}^2(t)/t$, mais la fraction $\varepsilon_{x_0}(t)$ ainsi définie n'est pas nécessairement bornée pour $t \to 0$. Pour donner une réponse à notre problème on doit généraliser la notion de différentiabilité d'une fonction.

Soit $1 \leq p \leq \infty$, et supposons que la fonction F appartienne à la classe L^p dans les environs du point x_0. Nous dirons que F est différentiable en x_0 dans le sens de L^p s'il existe une fonction linéaire $\ell(t)$ telle que

$$(6) \qquad \{\frac{1}{h}\int_0^h |F(x_0 + t) - \ell(t)|^p\, dt\}^{1/p} = o(h) \qquad (h \to 0) \quad .$$

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 6. - Si F est de carré intégrable, alors l'intégrale (5) est finie p. p. dans un ensemble E si, et seulement si, F est différentiable en presque tout point de E dans le sens de L^2.

II

La notion de différentiabilité dans L^p peut être généralisée.

Désignons par $\mathcal{R}^n$ l'espace réel n-dimensionnel de points $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Nous écrivons

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad ,$$

$$|x| = (\sum x_j^2)^{1/2} \quad .$$

Si les composantes α_j de $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ sont des entiers non-négatifs, nous écrivons $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$. Une somme

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \, x^\alpha \quad ,$$

où les a_α sont des scalaires, est un polynôme de degré $\leq m$.

Soit $1 \leq p \leq \infty$, et supposons que $F(x) = F(x_1 , .. , x_n)$ soit définie dans l'entourage du point x^0 et de puissance p-ième intégrable. Soit u un nombre réel $\geq -n/p$. Nous dirons que F satisfait à la condition $t^p_u(x^0)$ s'il existe un polynôme $P(y)$ de degré $\leq n$ (en particulier, $P \equiv 0$ si $n < 0$), tel que

$$(7) \qquad \{\frac{1}{\rho^n} \int_{|y| \leq \rho} |F(x^0 + y) - P(y)|^p \, dy\}^{1/p} = o(\rho^n) \qquad (\rho \to 0) \quad .$$

Un tel polynôme, s'il existe, est nécessairement unique. Si n est égal a un entier k , nous pouvons dire que F est différentiable d'ordre k en x^0 , dans le sens de L^p , et nous pouvons appeler $P(y)$ la k-ième différentielle de F en x^0 (dans le sens de L^p). D'une façon analogue on peut dire que F satisfait à la condition $T^p_n(x_0)$ s'il existe un polynôme $P(y)$ de degré strictement plus petit que n et tel que le membre gauche de (7) soit (ρ^n) pour $\rho \to 0$ (un tel polynôme, s'il existe, est aussi unique).

Les notions que nous venons d'introduire sont utiles dans la théorie des équations aux dérivées partielles du type elliptiques (voir [1]), mais ici nous ne citons que des applications assez particulières.

a. Considérons l'intégrale de F d'ordre fractionnaire α donnée pour la convolution

$$I_\alpha F = F * \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} \quad ,$$

en omettant pour simplifier le facteur numérique normalisant le noyau $|x|^{\alpha-n}$. Supposons $F \in L^p$ et F à support borné (cette dernière restrictions pourrait être évitée si l'on remplaçait le noyau $|x|^{\alpha-n}$ par un autre, ayant le même comportement à l'origine mais s'évanoussant rapidement à l'infini). On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 7. - Si F satisfait à la condition $T^p_n(x^0)$, $1 < p < \infty$, $v \geq 0$ et si $u + v$ n'est pas un entier non-négatif, alors $I_v F$ satisfait à la condition $T^q_{u+v}(x_0)$, où $1/p - 1/q = v/n$ si $p < n/v$ et $q = \infty$ si $p > n/v$. Si F satisfait à la condition $T^p_n(x_0)$ pour tout $x \in E$, et si n et v sont des entiers non-négatifs, alors $I_v F$ appartient à $t^q_{n+v}(x_0)$ pour presque tout $x_0 \in E$, avec le même q qu'auparavant ; si $u + v \geq 1$ le résultat subsiste même pour $p = 1$.

Remarquons le cas spécial $v = 0$ dans la seconde partie du théorème.

Le cas de $\alpha = 2$ nous donne des résultats sur la différentiabilité des potentiels.

THÉORÈME 8. - Supposons que F soit localement intégrable et possède des dérivées partielles $F_j = \partial F/\partial x_j$ dans le sens des distributions. Alors si toutes les F_j satisfont à la condition $t^p_n(x_0)$, $1 \leq p < \infty$, la fonction F elle même appartient à $t^q_{n+1}(x_0)$, où q est lié à p par les mêmes relations que dans le théorème précédent, avec $v = 1$.

Le cas de $n = 0$ est digne d'intérêt. Supposons que F soit avsolument continue dans le sens de Tonelli. Alors les dérivées F_j existent et sont intégrables. Comme elles satisfont p. p. à la condition $t^1_0(x_0)$ (condition de Lebesgue), F elle-même est différentiable p. p. dans le sens de $\mathcal{L}^{n/(n-1)}$. Le résultat subsiste pour les fonctions qui sont à variation bornée dans le sens de Tonelli. Dans le cas de $n = 2$, nous obtenons le résultat suivant : Toute surface $x_s = F(x_1, x_2)$ d'aire finie possède p. p. un plan tangent, dans le sens de L^2.

Nous terminons en donnant une application très élémentaire de la différentiabilité en L^p aux séries trigonométriques.

Supposons que $c_n = O(|n|^k)$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ et que la série trigonométrique

$$\text{(S)} \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

soit sommable (C, k) du point x_0 avec la somme s. Alors la fonction

$$F(x) = c_0 \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \sum c_n \frac{e^{inx}}{(in)^{k+1}}$$

obtenue par l'intégration de (S) terme à terme $(k + 1)$ fois possède en x_0 une $(k + 1)$-ième dérivée dans le sens de L^p égale à s, pour n'importe quel $p < \infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - Local properties of solutions of elliptic partial differential equations, Studia Mathematica, t. 20, 1961, p. 171-225.

[2] KHINTCHINE (A.) [KHINČIN (A.)]. - Recherches sur la tructure des fonctions mesurables, Fundamenta Mathematicae, t. 9, 1927, p. 212-280.

[3] ZYGMUND (Antoni). - Smooth functions, Duke math. J., t. 12, 1945, p. 47-76.