PAUL MALLIAVIN

Spectre des fonctions moyenne-périodiques. Totalité d'une suite d'exponentielles sur un segment

Séminaire Lelong. Analyse, tome 3 (1961), exp. n° 11, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1961__3__A8_0>

SPECTRE DES FONCTIONS MOYENNE-PÉRIODIQUES. TOTALITÉ D'UNE SUITE D'EXPONENTIELLES SUR UN SEGMENT

par Paul MALLIAVIN

1. – On se propose d'exposer des résultats d'un article de BEURLING-MALLIAVIN [1], qui donnent une caractérisation des spectres des fonctions moyenne-périodiques, un calcul explicite de la moyenne-période d'un spectre, ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante de totalité sur un segment d'une suite d'exponentielles. De plus, on caractérisera les fonctions entières qui peuvent s'écrire comme le quotient des transformées de Fourier de deux mesures à support compact [2].

Λ étant une suite de nombres complexes, on note par $R(\Lambda)$ la borne inférieure de l'ordre des fonctions entières de type exponentiel qui s'annulent sur Λ et sont bornées sur l'axe réel ; on appelle ordre d'une fonction entière de type exponentiel f le nombre c défini par

$$c = \limsup_{|z|=\infty} \frac{\log|f(z)|}{|z|}$$

Λ est le <u>spectre</u> d'une fonction moyenne périodique si et seulement si $R(\Lambda) < \infty$. $R(\Lambda)$ est appelé la <u>moyenne période</u> de la suite Λ.

Il est bien connu que $R(\Lambda) < \infty$ entraîne

$$\sum \left|\operatorname{Im} \frac{1}{\lambda}\right| < \infty \qquad (1.1)$$

Si z est un nombre complexe, on notera par z' la <u>projection circulaire</u> de z définie par $|z'| = |z|$, et $\arg z' = 0$, si $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}$, et par $\arg z' = \pi$ dans le cas contraire.

Nous associons à la suite Λ la suite réelle Λ' constituée par les projections circulaires λ' de tous les points $\lambda \in \Lambda$.

On définit comme d'habitude

$$n_{\Lambda'}(x) = \varepsilon_x \times \text{nombre de } \lambda' \in (0, x)$$

où ε_x = signe de x ; $n_{\Lambda'}$ est fonction croissante de x et définie de $-\infty$ à $+\infty$. On pose

$$n_\Lambda(x) = n_{\Lambda'}(x) \quad .$$

On note par J_a l'ensemble des fonctions dérivables croissantes $k(x)$, telles que

$$k'(x) \leqslant a \quad .$$

On notera par $\overline{J}_a$ l'ensemble des fonctions $h(x)$ telles que l'on puisse trouver $k \in J_a$ vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x) - k(x)| \frac{dx}{1+x^2} < \infty \quad .$$

La <u>densité effective</u> de la suite Λ est définie par

(1.2) $$D_c(\Lambda) = \inf \{a | n_\Lambda \in \overline{J}_a\} \quad .$$

On a :

(1.3) THÉORÈME. – <u>Supposons</u> (1.1) <u>satisfait</u> : <u>alors</u>

$$R(\Lambda) = \pi D_c(\Lambda) \quad .$$

<u>Si</u> (1.1) <u>n'est pas vérifié</u> $R(\Lambda) = \infty$.

On peut donner diverses définitions équivalentes de $D_c(\Lambda)$. Signalons-en une. On appelle <u>famille significative</u> d'intervalles I_m une famille d'intervalles disjoints, ne rencontrant pas le segment $[-1, +1]$ et telle que

$$\Sigma |I_m|^2 = \infty \quad \text{où} \quad |I_m| = \int_{I_m} \frac{dt}{t} \quad .$$

On pose

$$D(\Lambda, I_m) = \liminf_{I_m \to \infty} \frac{\int_{I_m} dn(t)}{\int_{I_m} dt} \quad .$$

On a alors la définition équivalente à (1.2).

(1.4) $D_c(\Lambda) = \sup \{b \mid$ il existe une famille significative I_m telle que $D(\Lambda, I_m) \geqslant b\}$.

On peut traduire l'énoncé (1.3) en un énoncé de <u>totalité pour la suite d'exponentielle</u> $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\in\Lambda}$ <u>dans</u> $L_2(-a, +a)$: <u>si</u> (1.1) <u>n'est pas vérifié il y a</u>

totalité ; si (1.1) est vérifié il y a totalité pour $a < \pi D_c(\Lambda)$, non totalité pour $a > \pi D_c(\Lambda)$.

Notons par $\Lambda^+ = \Lambda \cap \{ z | \mathrm{Re}\, z \geq 0\}$, $\Lambda^- = \Lambda \cap \{z | \mathrm{Re}\, z < 0\}$ alors une conséquence immédiate de (1.3) est que

$$R(\Lambda) = \sup(R(\Lambda^+) \ , \ R(\Lambda^-)) \quad .$$

Pour démontrer (1.3), nous devons résoudre le problème suivant. Si f est une fonction entière de type exponentiel nous appellerons multiplicateur pour f une fonction g , entière, de type exponentiel, telle que sur l'axe réel g et fg soient bornés. Nous avons le résultat suivant de [2].

(1.5) THÉORÈME. - f possède des multiplicateurs si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\log|f(x)|| \frac{dx}{1+x^2} < \infty \qquad (1.6)$$

on peut alors trouver des multiplicateurs d'ordre arbitrairement petit. Les transformées de Fourier des fonctions f satisfaisant (1.6) peuvent être appelées des hyperdistributions régularisables. On peut montrer qu'il existe une hyperdistribution régularisable T telle que $\frac{T}{x}$ ne soit plus régularisable, c'est-à-dire que l'on peut construire une fonction f satisfaisant (1.6) et dont la primitive ne satisfait pas (1.6). Ce fait montre que la démonstration de (1.5) ne peut pas être immédiate. On indiquera une démonstration, fondée sur une méthode extrémale appliquée à des potentiels de Green.

On peut aussi donner la conséquence suivante de (1.5) (signalée par MALGRANGE) :

Soit $\mathfrak{M}$ l'espace des transformées de Fourier des mesures à support compact alors si M_1 , $M_2 \in \mathfrak{M}$ et si M_1/M_2 est entière, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver N_1 , $N_2 \in \mathfrak{M}$ tels que

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

l'ordre de N_2 étant inférieur à ε .

D'autre part la classe des fonctions entières qui peuvent s'écrire comme le quotient de deux fonctions appartenant à $\mathfrak{M}$ est identique à la classe des fonctions entières de type exponentiel satisfaisant (1.6).

Nous allons donner quelques indications sur les démonstrations des théorèmes

(1.3) et (1.5), renvoyant pour les preuves complètes à [1] et à [2].

2. Démonstration de l'inégalité $R(\Lambda) \geq \pi D_c(\Lambda)$.

Cette inégalité est une conséquence immédiate de la proposition suivante

(2.1) PROPOSITION. - Soit $f(z)$ une fonction entière telle que :

$$f(\Lambda) = 0$$

$$|f(z)| < e^{b|y|} \qquad (z = x + iy) \quad .$$

Soit I_m une suite significative d'intervalles telle que

$$D(\Lambda , I_m) > \frac{b}{\pi} \quad .$$

Alors

$$f \equiv 0 \quad .$$

La marche de la démonstration est la suivante. On pose

$$h(z) = \log|f(z)| - \frac{b}{\pi} \int_0^{\infty} \log|1 - z^2 t^{-2}| \, dt \quad .$$

Le fait que $h(z) < 0$ et que $h(z)$ est sous-harmonique dans le demi-plan supérieur entraîne que

$$\text{(2.2)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \frac{dx}{1 + x^2} > -\infty \quad .$$

B étant une constante vérifiant $1 < B < \frac{\pi}{b} D(\Lambda , I_m)$, on note par Ω_0 la bande $-B < \operatorname{Re} z < B$, par $\mathcal{H}_m$ l'une des homothéties amenant le segment $[-1 , +1]$ sur I_m, par Ω_m la transformée de Ω_0 par $\mathcal{H}_m$. Si v est une mesure ayant son support dans Ω_m, on notera par U^v le potentiel de Green cette mesure pour la fonction de Green de Ω_m. Avec ces notations, on a, I_m^* notant l'image de $[-B , +B]$ par $\mathcal{H}_m$,

$$h(x) < U^{\sigma_m}(x) , \qquad x \in I_m^*$$

où $d\sigma_m = \frac{b}{\pi} \frac{dt}{t}$ - somme des masses de Dirac placées en $\Lambda \cap \Omega_m$, ceci valant pour $t \in \Omega_m$, le support de $d\sigma_m$ étant contenu dans Ω_m.

On peut trouver une fonction $k(t)$ positive bornée ayant son support sur $[-B, +B]$, telle que posant $d\mu_0 = k(t)\, dt$, on ait

$$U^{\mu_0}(x) = 1 , \qquad x \in [-1, +1]$$

$$U^{\mu_0}(z) < 1 \quad \text{quel que soit } z \quad .$$

Soit $d\mu_m$ l'image de $d\mu_0$ par $\mathcal{H}_m$, alors

$$\int h\, d\mu_m < \int U^{\mu_m}\, d\sigma_m \quad .$$

En utilisant (1.1) on peut montrer que l'on peut trouver un nombre $\varepsilon > 0$ et une suite d'indices m_s telles que

$$\sum_s |I_{m_s}|^2 < \infty$$

et que

$$\int U^{\mu_m}\, d\sigma_m < -\varepsilon \int_{I_m} dt \quad \text{si} \quad m \neq m_s , \quad s = 1, 2, \ldots \quad .$$

Cette dernière inégalité entraîne que

(2.3) $$\int_{I_m^*} h(x) \frac{dx}{x^2} < -\varepsilon_1 \sum |I_m|^2 = -\infty \quad .$$

On est amené alors à démontrer le lemme géométrique suivant : si B est un nombre > 1 donné et I_m une famille significative d'intervalles tels que $|I_m| \to 0$ donnée, on peut extraire de cette famille une famille significative I_{m_k} telle que les $I_{m_k}^*$ recouvrent au plus deux fois tout point de l'axe réel.

Il suffit alors d'appliquer le raisonnement précédent à la famille I_{m_k} pour obtenir une contradiction entre (2.2) et (2.3).

3. Démonstration de l'inégalité $R(\Lambda) \leqslant \pi D_c(\Lambda)$.

Cette inégalité est une conséquence évidente de

(3.1) PROPOSITION. - Soit Λ une suite satisfaisant (1.1), alors pour tout

$$b > \frac{1}{\pi} D_c(\Lambda)$$

<u>On peut trouver une fonction entière de type exponentiel</u> f , <u>d'ordre</u> b , <u>satisfaisant</u> (1.6) <u>et nulle sur</u> Λ .

La démonstration de (3.1) nécessite une succession d'étapes. On considère d'abord le cas où la suite Λ est réelle. Le cas d'une suite complexe sera envisagé au paragraphe suivant.

Utilisant la définition (1.2) de $D_c(\Lambda)$, on peut trouver $a < b\pi$ et $k \in J_a$ tels que

$$\varphi(x) = \frac{n_\Lambda(x) - k(x)}{x}$$

satisfasse à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| \frac{dt}{|t|} < \infty \quad . \tag{3.2}$$

On posera alors

$$N_1(x) = x\left(\frac{b}{\pi} + \varphi(x)\right)$$

$N_1(x)$ est alors une fonction croissante pour $|x|$ assez grand. Soit dN la partie positive de la mesure dN_1 , on définira f par

$$\log|f(z)| = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{+M} \log|1 - z^2 t^{-2}| \, dN(t) = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{z - t} \varphi(t) \, dt \; .$$

Notons par R^* l'axe réel positif muni de sa structure de groupe par la multiplication, $L_1(R^*)$ les fonctions sommables sur R^* pour la mesure $\frac{dx}{x}$, $*$ le produit de convolution dans $L_1(R^*)$, φ_+ la restriction de φ à R^* ,

$$\varphi_-(-x) = \varphi(x) - \varphi_+(x) \quad .$$

Alors on a, si $x > 0$:

$$\frac{1}{x} \log|f(x)| = K_1 * \varphi_+ + K_2 * \varphi_- \tag{3.3}$$

$$+ \text{ v. p.} \int_{x/2}^{2x} \frac{1}{x/t - 1} \varphi_+(t) \frac{dt}{t} - g_+(x) - g_-(-x)$$

où $g_+(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t) \frac{dt}{t}$, où $g_-(x)$ est la même intégrale prise de $-\infty$ à x , et où K_1 et K_2 sont deux noyaux aisément calculables. On a K_1 et

$K_2 \in L_1(R^*)$; l'hypothèse faite sur φ entraîne φ_+ et $\varphi_- \in L_1(R^*)$, par suite $K_1 * \varphi_+$ et $K_2 * \varphi_- \in L_1(R^*)$.

Pour traiter la valeur principale, on rencontre la difficulté bien connue : la transformée de Hilbert d'une fonction sommable n'est pas nécessairement sommable. Cette difficulté disparait si la fonction φ est très oscillante ; plus précisément la démonstration continue en introduisant temporairement l'hypothèse complémentaire suivante :

$$(3.4) \qquad \begin{cases} g_+ \text{ possède une suite épaisse de zéros } \to +\infty \\ \text{et} \\ g_- \text{ possède une suite épaisse de zéros } \to -\infty \end{cases}$$

où l'on a convenu qu'une suite monotone w_n est <u>épaisse</u> si

$$\Sigma \ (1 - \frac{w_n}{w_{n+1}})^2 < \infty \qquad .$$

Il est élémentaire de montrer que (3.4) entraîne

$$\int_0^{+\infty} |g_+(x)| \frac{dx}{x+1} < \infty$$

et le même résultat pour g_- . Par suite tout revient à traiter la valeur principale figurant dans (3.3), ce qui est fait en utilisant le lemme suivant sur la transformée de Hilbert que nous exprimons en notation additive posant $x = e^{\sigma}$. On note par $\tilde{\Phi}$ la transformée de Hilbert tronquée de Φ

$$\tilde{\Phi}(\sigma) = \text{v. p.} \int_{-1}^{+1} \Phi(\sigma + \xi) \frac{d\xi}{\xi} \qquad .$$

(3.5) LEMME. - <u>Soit</u> $\Phi \in L_1(R)$. <u>Supposons que</u> Φ <u>ait son support limité à gauche, que uniformément en</u> σ

$$\Phi(\sigma + \xi) - \Phi(\sigma) > 0(\xi) \ , \qquad \xi > 0$$

<u>et que</u>

$$G(\sigma) = \int_{\sigma}^{+\infty} \Phi(\xi) \ d\xi$$

<u>ait une suite de zéros</u> $\sigma_n \to +\infty$ <u>telle que</u> $\{e^{\sigma_n}\}$ <u>soit une suite épaisse, alors</u>

$$\tilde{\Phi} \in L_1(R) \qquad .$$

Ce lemme se démontre en considérant la restriction Ψ_n de Φ à l'intervalle $[\sigma_n , \sigma_{n+1}]$. Alors $\|\tilde{\Psi}_n\|_1$ est évalué en utilisant d'une part le deuxième terme du développement asymptotique à l'infini de $\tilde{\Psi}_n$ et d'autre part l'inégalité de Schwarz pour la majoration au voisinage de $[\sigma_n , \sigma_{n+1}]$.

La démonstration est ainsi complète moyennant l'hypothèse supplémentaire (3.4) qu'il s'agit maintenant de lever. On peut démontrer le lemme suivant : Etant donnée une fonction φ satisfaisant (3.2), on peut trouvet une fonction q vérifiant $|xq'(x)| < \varepsilon$, $q(x) = o(1)$, $|x| \to \infty$, telle que $\varphi_1(x) = \varphi(x) + q(x)$ satisfasse alors simultanément (3.2) et (3.4). Remplacer φ par φ_1 dans la construction, n'a pour effet que d'augmenter l'ordre de la fonction f d'au plus ε ce qui ne présente pas d'inconvénients.

Reste pour achever la démonstration à indiquer comment on traite le cas des suites complexes Λ. Il est naturel de vouloir construire une fonction nulle sur Λ à partir d'une fonction f' nulle sur Λ', qui sera obtenue par la construction précédente appliquée à la suite réelle Λ'. On est ainsi amené à considérer

$$K_N(z) = \prod_{|\lambda|<2^N} \frac{1 - z/\lambda}{1 - z/\lambda'} \quad .$$

On désirerait montrer que l'intégrale (1.6) prise pour la fonction K_N est bornée indépendamment de N : il en résulterait alors que les K_N formeraient une famille normale, soit K_∞ la limite d'une suite extraite des K_N. Alors K_∞ satisferait (1.6) et $f = f_1 K_\infty$ serait une fonction satisfaisant les conclusions de (3.1).

Sans hypothèses supplémentaires, il n'est pas possible de majorer uniformément les intégrales (1.6) prises pour K_N. Nous allons introduire temporairement une hypothèse supplémentaire. Soit

$$\Lambda_N = \Lambda \cap \{z \,|\, 2^N \leqslant |z| < 2^{N+1}\}$$

$$\omega(z) = \mathrm{Re}\, \frac{1}{z} - \frac{1}{z'} \quad .$$

On supposera que

$$(3.6) \qquad \sum_{\lambda\in\Lambda_N} \omega(\lambda) = 0 \quad \text{quel que soit } N \text{ assez grand} \quad .$$

Posons $W_N \doteq K_N | K_{N-1}$, alors la conclusion est donnée évidemment par le lemme

(3.7). LEMME. - Il existe une constante B telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\log|W_N(x)|| \frac{dx}{x^2} < B \sum_{\lambda\in\Lambda_N} |\operatorname{Im} \frac{1}{\lambda}| \quad .$$

La preuve de ce lemme est obtenue en partageant l'intégration de $-\infty$ à $+\infty$ en deux intégrations, l'une sur $[-2^{N-2}, 2^{N-2}]$, l'autre sur le complémentaire. La première intégrale peut s'écrire en tenant compte de (3.6)

$$I_N' = \int_{-2^{N-2}}^{2^{N-2}} |\sum_{\lambda\in\Lambda_N} H(\theta, \frac{x}{t}) - H(\theta', \frac{x}{t})| \frac{dx}{x^2}$$

où $\theta = \arg \lambda$, $\theta' = \arg \lambda'$, $t = |\lambda|$ et

$$H(\theta, t) = \log|1 - te^{-i\theta}| + t \cos\theta \quad \text{si} \quad |t| < \frac{1}{2}$$

$$H(\theta, t) = 0 \quad \text{si} \quad |t| > \frac{1}{2} \quad .$$

En remarquant que

$$\left|\frac{\partial H(\theta, r)}{\partial\theta}\right| < 8|\theta - \theta'| r^2 \quad ,$$

on obtient

$$I_N' < 8 \sum_{\lambda\in\Lambda_N} |\theta - \theta'| t^{-1} < 16 \sum_{\lambda\in\Lambda_N} |\operatorname{Im} \frac{1}{\lambda}| \quad .$$

L'intégrale sur le complémentaire de $[-2^{N-2}, 2^{N-2}]$ est traitée de façon analogue, et ceci permet de démontrer le lemme.

Reste enfin à lever l'hypothèse parasite (3.6), on peut démontrer qu'étant donné Λ satisfaisant (1.1), et tel que $D_c(\Lambda) < \infty$, on peut construire $\Lambda_2 \supset \Lambda$ telle que (1.1) et (3.6) soient satisfaits, et que $D_c(\Lambda_2) < D_c(\Lambda) + \varepsilon$. Ceci achève la démonstration de (3.1).

4. Démonstration du théorème sur le multiplicateur.

On va donner quelques brèves indications sur la marche de la démonstration du théorème (1.5).

Remarquons qu'en considérant au besoin

$$f_1(z) = f(z)\,\overline{f(\overline{z})} + f(-z)\,\overline{f(-\overline{z})} + 1$$

on peut se ramener au cas où $f(z)$ est une fonction paire, positive, et > 1, sur l'axe réel. On va ramener le problème sur le multiplicateur à un problème de la théorie du potentiel.

Soit $G(x) = \log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. Si $d\varphi$ est une mesure ayant son support sur $(0, +\infty)$ on note par

$$U^{\varphi}(x) = \int G\left(\frac{x}{t}\right) d\varphi(t)$$

le potentiel de φ. Ce potentiel est la restriction à l'axe réel d'un potentiel de Green défini dans le demi-plan $\mathrm{Re}\, z > 0$. Nous l'interpréterons comme potentiel sur la droite sur laquelle ce potentiel définit un espace de Dirichlet.

La proposition suivante permet de traduire les problèmes relatifs aux fonctions entières paires, de type exponentiel, en termes de potentiels U^{φ}.

(4.1) PROPOSITION. - Soit f une fonction entière de type exponentiel paire et telle que $\Lambda = f^{-1}(0)$ satisfasse (1.1). Soit a tel que

(4.2) $$\limsup_{|y|=\infty} \frac{\log|f(iy)|}{|y|} < a .$$

Alors il existe une mesure $d\varphi$ satisfaisant

(4.3) $$d\varphi(t) > -a\frac{dt}{t} \quad \text{pour } t \text{ assez grand}$$

(4.4) $$\lim_{R=\infty} \varphi(R) \quad \text{existe et est finie}$$

(où $\varphi(R) = \int_0^R d\varphi$) et telle que

$$\log|f(x)| = -x\,U^{\varphi}(x), \qquad x > 0 .$$

Inversement si on a une mesure $d\psi$ satisfaisant (4.3) et (4.4), on peut lui associer une fonction entière de type exponentiel g telle que (4.2) soit satisfait

$$\log|g(x)| < -x\,U^{\psi}(x) + O(\log x), \qquad x > 0 .$$

Nous ne donnerons pas ici la démonstration de cette proposition. Signalons seulement qu'elle peut être étendue à des fonctions f qui ne sont pas paires, et que d'autre part on peut en se plaçant "en dehors des zéros" de g remplacer la majoration de $|g|$ à l'aide de $\exp(-x\, U^{\psi}(x))$ par une égalité (ces deux remarques ne sont pas nécessaires pour ce qui suit, mais elles peuvent être utiles dans d'autres problèmes).

La proposition (4.1) permet de traduire le théorème sur le multiplicateur (1.5) dans l'énoncé.

LEMME. - Soit φ une mesure satisfaisant (4.3) et (4.4) et telle que

$$U^{\varphi} < 0$$

$$\int_0^{\infty} U^{\varphi}(x)\, \frac{dx}{x} > -\infty \qquad (4.5)$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une mesure μ satisfaisant (4.4) et

$$d\mu \geqslant -\varepsilon\, \frac{dt}{t} \qquad (4.6)$$

et telle que

$$U^{\mu} \geqslant U^{-\varphi} \qquad (4.7)$$

L'idée de la démonstration consiste d'abord à montrer que pour les mesures satisfaisant (4.6) et (4.7) on a

$$\lim_{R=\infty} \mu(R) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} U^{\mu}(x)\, \frac{dx}{x} \qquad (4.8)$$

les deux membres étant simultanément finis ou infinis.

Par suite pour que $\lim \mu(R)$ soit fini, on a intérêt à prendre U^{μ} le "plus petit possible". Plus précisément, notons par A la famille des mesures μ satisfaisant (4.7) et (4.6). En appliquant le principe de l'enveloppe inférieure, on montre qu'il existe $\mu_0 \in A$ telle que

$$U^{\mu_0} \leqslant U^{\mu} \quad \text{quel que soit} \quad \mu \in A \quad .$$

C'est évidemment pour cette mesure μ_0 que l'intégrale (4.8) sera minima.

En appliquant un argument variationnel on peut montrer que, si

$$E = \{x \,|\, U^{\mu_0}(x) > U^{-\varphi}(x)\}$$

alors, sur E, $d\mu_0 = -\varepsilon\, \frac{dt}{t}$. De plus, on peut établir

$$-\varepsilon\, \frac{dt}{t} \leqslant d\mu_0 \leqslant a\, \frac{dt}{t} \quad \text{pour } t \text{ assez grand} \quad . \qquad (4.9)$$

Utilisant (4.5) et (4.8), on obtient que $\lim \mu(R)$ fini est équivalent à

$$\int_0^\infty U^{\varphi+\mu_0}(x)\ \frac{dx}{x} < \infty \quad .$$

Mais

$$\int_0^\infty U^{\varphi+\mu_0}\ \frac{dx}{x} = \int_E U^{\varphi+\mu_0}\ \frac{dx}{x} = -\frac{1}{\varepsilon}\int U^{\varphi+\mu_0}\ d\mu_0 \quad .$$

Il reste à démontrer

$$\int U^{\varphi+\mu_0}\ d\mu_0 > -\infty \quad .$$

En écrivant cette intégrale comme somme des deux intégrales suivantes (ce qui peut être justifié par un passage à la limite)

$$\int U^{\mu_0}\ d\mu_0$$

$$\int U^{\varphi}\ d\mu_0 \quad ,$$

en remarquant que la première intégrale est positive (intégrale d'énergie) et que la seconde est convergente d'après (4.5) et (4.9), on achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEURLING (A.) and MALLIAVIN (P.). - Closure of a set of exponentials on an interval, Acta Mathematica (à paraître).

[2] BEURLING (A.) and MALLIAVIN (P.). - On Fourier transforms of measures with compact support, Annals of Math. (à paraître).