François Norguet

Intégrales de formes différentielles extérieures non fermées

Séminaire Lelong. Analyse, tome 3 (1961), exp. n° 8, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1961__3__A7_0>

INTÉGRALES DE FORMES DIFFÉRENTIELLES EXTÉRIEURES NON FERMÉES

par François NORGUET

1. Introduction.

Habituellement, lorsqu'on intègre une forme différentielle extérieure ψ sur une chaîne σ d'une variété différentiable X, la forme ψ est fermée, et σ est un cycle compact. Dans ces conditions, la valeur de l'intégrale $\int_\sigma \psi$ ne dépend que de la classe d'homologie de σ et de la classe de cohomologie de ψ ; par conséquent, une variation continue du cycle σ ne change pas la valeur de l'intégrale. Nous nous proposons d'examiner le cas où la forme ψ n'est pas fermée : alors la valeur de l'intégrale $\int_\sigma \psi$ varie lorsque le cycle σ varie dans une classe d'homologie compacte de X. Donc, si nous remplaçons σ par un cycle voisin $\tilde{\sigma}$ qui lui est homologue, les valeurs des deux intégrales $\int_{\tilde{\sigma}} \psi$ et $\int_\sigma \psi$ diffèrent en général, et nous nous proposons d'étudier cette différence

$$\int_{\tilde{\sigma}} \psi - \int_\sigma \psi \quad .$$

Si ψ est une fonction, σ et $\tilde{\sigma}$ sont des points ; il s'agit alors de la différence $\psi(\tilde{\sigma}) - \psi(\sigma)$, que l'on peut exprimer (si ψ est analytique) par une série qui converge lorsque $\tilde{\sigma}$ est suffisamment voisin de σ : série de Taylor, ou série de Stieltjes (découverte par STIELTJES, et publiée par H. POINCARÉ dans son mémoire [6] sur la théorie des résidus).

Nous établirons ici une formule générale, annoncée dans [4] et [5], qui admet comme cas particulier le résultat de Stieltjes. Nous rappellerons d'abord quelques notions sur les dérivées partielles de formes différentielles extérieures et sur la théorie des résidus, que nous aurons à utiliser ; ces notions dues à J. LERAY [1], ont été précédemment exposées dans ce séminaire [2], et en partie généralisées dans [3].

2. Notations.

Soit X une variété analytique complexe, de dimension n, et soit m un nombre entier positif vérifiant $m \leqslant n$. Soit $(S_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ (resp. $(\tilde{S}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$) une famille de sous-variétés analytiques (non singulières) de X, de codimension 1, régulièrement plongées dans X, situées en position générale (i. e. : au voisinage de tout point 0 de $S = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant m} S_i$, il existe un système (z, w), $z = (z_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$, $w = (w_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-m}$, de coordonnées locales de X, telles que S_i ait pour équation locale $z_i = 0$, et une condition analogue est vérifiée pour $\tilde{S} = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant m} \tilde{S}_i$). Supposons que chaque S_i admet, dans X, une équation globale $s_i = 0$, la fonction holomorphe s_i s'annulant au premier ordre sur S_i, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Nous désignerons par N_+ l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls, et par N_+^m l'ensemble des suites croissantes de m éléments de N_+ ; si p est une telle suite, nous désignerons son i-ième terme par p_i, et nous poserons

$$|p| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} p_i \ , \quad p! = \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} p_i!$$

3. Dérivées partielles de formes différentielles extérieures.

Soit ψ une forme différentielle, indéfiniment différentiable dans X, et telle que la forme $(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant m} ds_i) \wedge \psi$ soit fermée, c'est-à-dire que l'on ait $(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant m} ds_i) \wedge d\psi = 0$. Alors, pour tout nombre entier q positif, et pour toute suite $(j_\alpha)_{1 \leqslant \alpha \leqslant q}$ de nombres entiers compris entre 1 et m, il existe une forme différentielle extérieure indéfiniment différentiable $\omega_{j_1,\dots,j_q}$, définie au voisinage de S, vérifiant les relations

$$d\psi = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} ds_i \wedge \omega_i \ , \quad d\omega_{j_1,\dots,j_q} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} ds_i \wedge \omega_{j_1,\dots,j_q,i} \ .$$

La classe de cohomologie, dans S, de la restriction de $\omega_{j_1,\dots,j_q}$ à S, est parfaitement déterminée par la donnée de ψ, des fonctions s_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, et de la suite $(j_\alpha)_{1 \leqslant \alpha \leqslant q}$; cette classe de cohomologie est appelée dérivée partielle d'ordre q de ψ sur S, par rapport aux fonctions $s_{j_1}, \dots, s_{j_q}$, et désignée par le symbole

$$\left. \frac{\partial^{|p|} \psi}{\partial_{s_1}^{p_1} \cdots \partial_{s_m}^{p_m}} \right|_S \ ,$$

où p_i désigne le nombre des indices égaux à i dans la suite $(j_\alpha)_{1 \leqslant \alpha \leqslant q}$; on a évidemment $|p| = q = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} p_i$.

4. Résidus de formes différentielles semi-méromorphes.

L'homomorphisme cobord de l'homologie à supports compacts

$$\delta : H_r(S) \to H_{r+m}(X - \bigcup_{1\leq i\leq m} S_i) \quad .$$

se réalise en fibrant un cycle de S par des tores à m dimensions réelles enlaçant une fois chacune des sous-variétés S_i ; son transposé est l'homomorphisme résidu de la cohomologie à supports quelconques

$$\text{Rés} : H^r(X - \bigcup_{1\leq i\leq m} S_i) \to H^{r-m}(S) \quad .$$

Si ψ est une forme différentielle indéfiniment différentiable dans X, la classe de cohomologie de la restriction de ψ à S est le résidu de la classe de cohomologie dans $X - \bigcup_{1\leq i\leq m} S_i$ de la forme différentielle semi-méromorphe (supposée fermée)

$$\left(\bigwedge_{1\leq i\leq m} \frac{ds_i}{s_i}\right) \wedge \psi \quad .$$

Si σ est un cycle compact de S, on a donc

$$(1) \qquad (2i\pi)^m \int_\sigma \psi = \int_{\delta(\sigma)} \left(\bigwedge_{1\leq i\leq m} \frac{ds_i}{s_i}\right) \wedge \psi \quad .$$

Enfin, on a la relation suivante entre résidus et dérivées partielles

$$(2) \qquad \frac{1}{p!} \left.\frac{\partial^{|p|}\psi}{\partial s_1^{p_1} \cdots \partial s_m^{p_m}}\right|_S = \text{Rés}\left(\left(\bigwedge_{1\leq i\leq m} \frac{ds_i}{s_i^{p_i+1}}\right) \wedge \psi\right) \quad .$$

5. Enoncé des résultats.

Nous désignerons par $\tilde{\delta}$ le cobord correspondant à $\tilde{S}$.

THÉORÈME 1. - Hypothèses.

a. Supposons qu'il existe une famille $(\omega_{i,j})_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq m}$ de fonctions holomorphes dans X, vérifiant

$$d\tilde{s}_i = \sum_{1\leq j\leq m} \omega_{i,j}\, ds_i \; , \quad 1 \leq i \leq m \quad .$$

b. Soit ψ une forme différentielle, indéfiniment différentiable dans X, vérifiant

$$\Big(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant m} ds_i \Big) \wedge d\psi = 0 \quad .$$

c. Soit σ (resp. $\tilde{\sigma}$) une classe d'homologie compacte de S (resp. $\tilde{S}$) telles qu'il existe un ouvert $\Omega \subset X - (S \cup \tilde{S})$ et une classe d'homologie τ de Ω, vérifiant les conditions :

(i) $\delta(\sigma)$ (resp. $\tilde{\delta}(\tilde{\sigma})$) est l'image naturelle de τ par l'inclusion de τ dans $X - S$ (resp. $X - \tilde{S}$) ;

(ii) $\left|1 - \dfrac{\tilde{s}_i}{s_i}\right| < 1$, $1 \leqslant i \leqslant m$, dans Ω .

CONCLUSION. – Alors nous avons la représentation en série convergente :

$$\int_{\tilde{\sigma}} \psi = \sum_{p\in N_+^m} \frac{1}{p!} \int_{\sigma} \left. \frac{\partial^{|p|}\Big[(\det \omega)\big(\prod_{1\leqslant i\leqslant m} (s_i - \tilde{s}_i)^{p_i}\big)\, \psi\Big]}{\partial s_1^{p_1}\, \partial s_2^{p_2} \cdots \partial s_m^{p_m}} \right|_S$$

où $\det \omega$ désigne le déterminant de la matrice $(\omega_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant m}$.

Les hypothèses du théorème 1 peuvent être aisément réalisées, comme le montre le théorème 2, qu'on établit à partir du théorème 1 en utilisant des voisinages tubulaires de S et de $\tilde{S}$. Pour énoncer le théorème 2, introduisons une famille $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ de fonctions holomorphes dans X , vérifiant les conditions suivantes :

i. v_i ne s'annule en aucun point de S_i , pour $1 \leqslant i \leqslant m$;

ii. Il existe une famille $(\alpha_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant m}$ de fonctions holomorphes dans X , vérifiant

$$dv_i = \sum_{1\leqslant j\leqslant m} \alpha_{i,j}\, ds_j \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant m \quad .$$

THÉORÈME 2. – Il existe une famille $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ de nombres réels positifs, dépendant seulement de $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ et de $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$, telle que les hypothèses suivantes entraînent la conclusion ci-dessous :

HYPOTHÈSES.

a. Supposons que l'on ait $s_i - \tilde{s}_i = h_i\, v_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, les nombres complexes h_i vérifiant $|h_i| < \varepsilon_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

b. Soit ψ une forme différentielle, indéfiniment différentiable dans X , vérifiant

$$\left(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant m} ds_i\right) \wedge d\psi = 0 \quad .$$

c. Soit σ une classe d'homologie compacte de S, et soit $\tilde{\sigma}$ la classe d'homologie de $\tilde{S}$ obtenue par variation continue de σ en fonction des paramètres complexes t_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, sur les variétés définies par les équations simultanées $s_i - t_i v_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

CONCLUSION. - Alors nous avons la représentation en série convergente

$$\int_{\tilde{\sigma}} \psi = \sum_{p\in N_+^m} \left(\prod_{1\leqslant i\leqslant m} \frac{h_i^{p_i}}{p_i!}\right) \int_\sigma \left. \frac{\partial^{|p|}\left[(\det\omega)\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant m} v_i^{p_i}\right)\psi\right]}{\partial s_1^{p_1} \cdots \partial s_m^{p_m}} \right|_S$$

où $\det \omega$ désigne le déterminant de la matrice $I - (h_i\, \alpha_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant m}$.

COROLLAIRE. - Pour $m = 1$, nous avons, sous les mêmes hypothèses :

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{\int_{\tilde{\sigma}} \psi - \int_\sigma \psi}{h_1} = \int_\sigma \left. \frac{\partial[(1 - h_1\, \alpha_{1,1})\, v_1\, \psi]}{\partial s_1} \right|_S \quad .$$

Cas particulier 1. - Si les fonctions v_i sont constantes et égales à 1, nous avons

$$\int_{\tilde{\sigma}} \psi = \sum_{p\in N_+^m} \left(\prod_{1\leqslant i\leqslant m} \frac{h_i^{p_i}}{p_i!}\right) \int_\sigma \left. \frac{\partial^{|p|}\psi}{\partial s_1^{p_1} \cdots \partial s_m^{p_m}} \right|_S$$

et, pour $m = 1$,

$$\lim_{h_1\to 1} \frac{\int_{\tilde{\sigma}} \psi - \int_\sigma \psi}{h_1} = \int_\sigma \left. \frac{\partial\psi}{\partial s_1} \right|_S \quad .$$

Cas particulier 2. - Pour $m = n = 2$, nous obtenons, après un calcul élémentaire, la formule de Stieltjes :

$$\psi(\tilde{S}) - \psi(S) = \sum_{p_1\geqslant 1} \frac{h_1^{p_1}}{p_1!} \frac{\partial^{p_1-1}}{\partial s_1^{p_1-1}} \left(v_1^{p_1} \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)_S + \sum_{p_2\geqslant 1} \frac{h_2^{p_2}}{p_2!} \frac{\partial^{p_2-1}}{\partial s_2^{p_2-1}} \left(v_2^{p_2} \frac{\partial\psi}{\partial s_2}\right)_S$$

$$+ \sum_{p_1\geq 1, p_2\geq 1} \frac{h_1^{p_1}}{p_1!} \frac{h_2^{p_2}}{p_2!} \frac{\partial^{p_1-1+p_2-1}}{\partial s_1^{p_1-1} \partial s_2^{p_2-1}} \left(v_1^{p_1} \frac{\partial v_2^{p_2}}{\partial s_1} \frac{\partial \psi}{\partial s_2} + v_2^{p_2} \frac{\partial v_1^{p_1}}{\partial s_2} \frac{\partial \psi}{\partial s_1} + v_1^{p_1} v_2^{p_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s_1 \partial s_2} \right)_S$$

qui exprime la valeur de la fonction holomorphe ψ au point d'intersection $\tilde{S}$ des courbes analytiques d'équations $s_1 - h_1 v_1 = 0$ et $s_2 - h_2 v_2 = 0$, en fonction des paramètres h_1 et h_2, et des dérivées des fonctions ψ, v_1 et v_2 calculées au point d'intersection S des courbes d'équations $s_1 = 0$ et $s_2 = 0$.

Le théorème 2 permet d'étudier le comportement d'une intégrale à distance finie quand on connaît son comportement à l'infini, dans certaines directions seulement ; de façon précise, le théorème 2 admet pour conséquence le théorème suivant, dont un cas particulier avait été établi par H. POINCARÉ ([6], § VI) :

THÉORÈME 3. - Soit ψ une forme différentielle, indéfiniment différentiable dans X, vérifiant

$$\left(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant m} ds_i \right) \wedge d\psi = 0 \quad .$$

S'il existe une suite $(\tau_j)_{1\leqslant j<+\infty}$ de cycles, appartenant à la classe d'homologie $\delta(\sigma)$, tels que l'on ait

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{\tau_j} \left(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant m} \frac{ds_i}{s_i^{p_i+1}} \right) \wedge \psi = 0$$

pour tous $p \in N_+^m$ vérifiant $|p| \geqslant 1$, alors on a $\int_{\tilde{\sigma}} \psi = \int_{\sigma} \psi$ pour toute classe d'homologie $\tilde{\sigma}$ obtenue par variation continue de la classe σ sur les variétés $\tilde{S}$ définies par les équations simultanées $s_i = t_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, et suffisamment voisines de S. En particulier, si ψ est une fonction, cette fonction est une fonction holomorphe constante au voisinage de S, donc constante dans X.

Pour démontrer ce théorème, on remarque que les hypothèses entraînent les relations

$$0 = \int_{\delta(\sigma)} \left(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant m} \frac{ds_i}{s_i^{p_i+1}} \right) \wedge \psi = \frac{(2i\pi)^m}{p!} \int_{\sigma} \left. \frac{\partial^{|p|} \psi}{\partial s_1^{p_1} \cdots \partial s_m^{p_m}} \right|_S \quad .$$

La conclusion résulte alors immédiatement du théorème 2.

COROLLAIRE (Théorème de Poincaré). - Si la fonction $\psi(z)$, holomorphe dans C^n, reste bornée sur un cône de sommet 0, dont les génératrices sont des droites de l'espace R^{2n} sous-jacent à C^n, et dont l'intersection avec la sphère de centre 0 et de rayon unité est homologue, dans $C^n - (\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} (z_i = 0))$, au tore $\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} (|z_i| = 1)$, alors la fonction ψ est constante dans C^n.

Réalisons en effet les hypothèses du théorème 3 en prenant $m = n$, $S_i = (z_i = 0)$, $\sigma = S = 0$, en prenant pour τ l'intersection du cône ci-dessus avec la sphère de centre 0 et de rayon unité, et pour τ_j l'homothétique de τ par l'homothétie de centre 0 et de rapport j ; nous aurons

$$\int_{\tau_j} \Big(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{dz_i}{z_i^{p_i+1}}\Big) \wedge \psi(z) = \frac{1}{j^{|p|}} \int_{\tau} \Big(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{dz_i}{z_i^{p_i+1}}\Big) \wedge \psi(jz) \quad ;$$

comme cette quantité tend vers 0 quand j tend vers $+\infty$, les hypothèses du théorème 3 sont réalisées, et la fonction ψ est constante dans C^n.

6. Démonstration du théorème 1.

La forme différentielle semi-méromorphe

$$\varphi = \Big(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant m} \frac{d\tilde{s}_i}{\tilde{s}_i}\Big) \wedge \psi$$

est fermée en vertu des hypothèses (a) et (b), qui entraînent en effet

$$d\varphi = (-1)^m \Big(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant m} \frac{d\tilde{s}_i}{\tilde{s}_i}\Big) \wedge d\psi = (-1)^m (\det \omega) \Big(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant m} \frac{ds_i}{\tilde{s}_i}\Big) \wedge d\psi = 0 \quad .$$

D'après la relation (1), nous avons donc

$$(2i\pi)^m \int_{\tilde{\sigma}} \psi = \int_{\tau} \varphi \quad .$$

En posant

$$s_i - \tilde{s}_i = u_i \,, \quad 1 \leqslant i \leqslant m \quad ,$$

nous obtenons

$$\tilde{s}_i = s_i - u_i = s_i\Big(1 - \frac{u_i}{s_i}\Big)$$

dans X , et

$$\left|\frac{u_i}{s_i}\right| = \left|1 - \frac{\tilde{s}_i}{s_i}\right| < 1$$

dans Ω . Développons $\frac{1}{\tilde{s}_i}$ en série entière dans Ω ; nous aurons

$$\frac{1}{\tilde{s}_i} = \frac{1}{s_i(1 - \frac{u_i}{s_i})} = \frac{1}{s_i} \sum_{r\geqslant 0} \left(\frac{u_i}{s_i}\right)^r$$

et

$$\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant m} \frac{d\tilde{s}_i}{\tilde{s}_i} = (\det \omega) \left(\prod_{1\leqslant i\leqslant m} \left(\sum_{r\geqslant 0} \left(\frac{u_i}{s_i}\right)^r\right)\right) \left(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant m} \frac{ds_i}{s_i}\right) = \sum_{p\in N_+^m} \varphi_p$$

dans Ω , si nous posons

$$\varphi_p = (\det \omega) \left(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant m} u_i^{p_i} \frac{ds_i}{s_i^{p_i+1}}\right) \wedge \psi \qquad .$$

Nous obtiendrons donc enfin

$$\int_\tau \varphi = \int_\tau \sum_{p\in N_+^m} \varphi_p = \sum_{p\in N_+^m} \int_\tau \varphi_p \qquad .$$

Mais φ_p est une forme semi-méromorphe fermée dans X ; en effet, nous avons

$$d\varphi_p = d(\det \omega) \left(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant m} u_i^{p_i} \frac{ds_i}{s_i^{p_i+1}}\right) \wedge \psi$$

$$+ (\det \omega)\, d\left(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant m} u_i^{p_i} \frac{ds_i}{s_i^{p_i+1}}\right) \wedge \psi$$

$$+ (-1)^m (\det \omega) \left(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant m} u_i^{p_i} \frac{ds_i}{s_i^{p_i+1}}\right) \wedge d\psi \qquad .$$

Le premier terme est nul, car on a

$$d(\det\omega) \wedge \Big(\bigwedge_{1\leq i\leq m} ds_i\Big) = d\Big(\bigwedge_{1\leq i\leq m} d\tilde{s}_i\Big) = 0 \qquad ;$$

le second terme est nul également, car on a

$$du_i \wedge \Big(\bigwedge_{1\leq j\leq m} ds_j\Big) = (ds_i - d\tilde{s}_i) \wedge \Big(\bigwedge_{1\leq j\leq m} ds_j\Big) = 0 \qquad ;$$

enfin le troisième terme est nul en vertu de l'hypothèse (b).

Nous avons donc la formule du résidu

$$\int_\tau \varphi_p = (2i\pi)^m \int_\sigma \mathrm{Rés}(\varphi_p)$$

puis, en vertu de la relation (2),

$$\int_\tau \varphi_p = \frac{(2i\pi)^m}{p!} \int_\sigma \left. \frac{\partial^{|p|}\Big[(\det\omega)\Big(\prod_{1\leq i\leq m} u_i^{p_i}\Big)\psi\Big]}{\partial s_1^{p_1}\ldots\partial s_m^{p_m}}\right|_S$$

d'où résulte le théorème 1.

7. Démonstration de la formule de Stieltjès.

Dans le second cas particulier du théorème 2, le développement en série convergente de l'intégrale $\int_\gamma \psi$ s'écrit

$$\psi(\tilde{S}) = \sum_{p_1\geq 0,\ p_2\geq 0} \frac{h_1^{p_1}}{p_1!}\frac{h_2^{p_2}}{p_2!}\frac{\partial^{p_1+p_2}}{\partial s_1^{p_1}\partial s_2^{p_2}}\Big[\Big(1 - h_1\frac{\partial v_1}{\partial s_1} - h_2\frac{\partial v_2}{\partial s_2}$$

$$\left. + h_1 h_2 \frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(s_1, s_2)}\Big) v_1^{p_1} v_2^{p_2}\psi\Big]\right|_S$$

$$= \sum_{p_1\geq 0,\ p_2\geq 0} \frac{h_1^{p_1}}{p_1!}\frac{h_2^{p_2}}{p_2!}\frac{\partial^{p_1+p_2}}{\partial s_1^{p_1}\partial s_2^{p_2}}\Big[v_1^{p_1} v_2^{p_2}\psi$$

$$- \frac{h_1}{p_1+1}\frac{\partial(v_1^{p_1+1})}{\partial s_1} v_2^{p_2}\psi - \frac{h_2}{p_2+1}\frac{\partial(v_2^{p_2+1})}{\partial s_2} v_1^{p_1}\psi\Big]$$

$$= \sum_{p_1\geq 0,\ p_2\geq 0} \frac{h_1^{p_1}}{p_1!}\frac{h_2^{p_2}}{p_2!}\frac{\partial^{p_1+p_2}(v_1^{p_1}\ v_2^{p_2}\ \psi)}{\partial s_1^{p_1}\ \partial s_2^{p_2}}$$

$$- \sum_{p_1\geq 1,\ p_2\geq 0} \frac{h_1^{p_1}}{p_1!}\frac{h_2^{p_2}}{p_2!}\frac{\partial^{p_1+p_2-1}}{\partial s_1^{p_1-1}\ \partial s_2^{p_2}}\left(\frac{\partial v_1^{p_1}}{\partial s_1}\ v_2^{p_2}\ \psi\right)$$

$$- \sum_{p_1\geq 0,\ p_2\geq 1} \frac{h_1^{p_1}}{p_1!}\frac{h_2^{p_2}}{p_2!}\frac{\partial^{p_1+p_2-1}}{\partial s_1^{p_1}\ \partial s_2^{p_2-1}}\left(v_1^{p_1}\ \frac{\partial v_2^{p_2}}{\partial s_2}\ \psi\right)$$

$$+ \sum_{p_1\geq 1,\ p_2\geq 1} \frac{h_1^{p_1}}{(p_1-1)!}\ \frac{h_2^{p_2}}{(p_2-1)!}\ \frac{\partial^{p_1+p_2-2}}{\partial s_1^{p_1-1}\ \partial s_2^{p_2-1}}\left(\frac{\partial(v_1\ ,\ v_2)}{\partial(s_1\ ,\ s_2)}\ v_1^{p_1-1}\ v_2^{p_2-1}\ \psi\right).$$

En groupant les termes correspondant aux valeurs $p_1 \geq 1$ et $p_2 \geq 1$, on obtient

$$\sum_{p_1\geq 1,\ p_2\geq 1} \frac{h_1^{p_1}}{p_1!}\frac{h_2^{p_2}}{p_2!}\frac{\partial^{p_1-1+p_2-1}}{\partial s_1^{p_1-1}\ \partial s_2^{p_2-2}}\left[\frac{\partial^2(v_1^{p_1}\ v_2^{p_2}\ \psi)}{\partial s_1\ \partial s_2} - \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial v_1^{p_1}}{\partial s_1}\ v_2^{p_2}\ \psi\right)\right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial s_1}\ \left(v_1^{p_1}\ \frac{\partial v_2^{p_2}}{\partial s_2}\ \psi\right) + p_1\ p_2\ \frac{\partial(v_1\ ,\ v_2)}{\partial(s_1\ ,\ s_2)}\ v_1^{p_1-1}\ v_2^{p_2-1}\ \psi\right]$$

où la somme figurant à l'intérieur du crochet peut s'écrire

$$v_1^{p_1}\ \frac{\partial v_2^{p_2}}{\partial s_1}\ \frac{\partial\psi}{\partial s_2} + \frac{\partial v_1^{p_1}}{\partial s_2}\ v_2^{p_2}\ \frac{\partial\psi}{\partial s_1} + v_1^{p_1}\ v_2^{p_2}\ \frac{\partial^2\psi}{\partial s_1\ \partial s_2} \qquad ;$$

on obtient ainsi le troisième terme figurant dans la formule de Stieltjes. En groupant les termes qui restent, on obtient naturellement les deux premiers termes de la formule de Stieltjes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LERAY (Jean). - Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy, III), Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 81-180.

[2] NORGUET (François). - Dérivées partielles et résidus de formes différentielles sur une variété analytique complexe, Séminaire Lelong : Analyse, t. 2, 1958/59, n° 10, 24 p.

[3] NORGUET (François). - Sur la théorie des résidus, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 2057-2059.

[4] NORGUET (François). - Une formule de Taylor pour les formes différentielles extérieures sur les variétés analytiques complexes, Bericht über den 5. Österreichischen Mathematikerkongress [1960. Innsbrück], Nachr. Österr. math. Gesellschaft, t. 15, 1961, n° 66 (Sondernummer), p. 39.

[5] NORGUET (François). - Séries de Taylor pour les intégrales de formes différentielles sur les variétés analytiques complexes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 252, 1961, p. 1264-1266.

[6] POINCARÉ (Henri). - Sur les résidus des intégrales doubles, Acta Math., t. 9, 1887, p. 321-380.