

SÉMINAIRE LELONG.

ANALYSE

BERNARD MALGRANGE

Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques

Séminaire Lelong. Analyse, tome 3 (1961), exp. n° 7, p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=SL_1961__3__A6_0

© Séminaire Lelong. Analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES ET LES ENSEMBLES ANALYTIQUES

par Bernard MALGRANGE

1. Rappels sur les anneaux analytiques.

Soit $\underline{\mathbb{R}}\{x_1, \dots, x_n\}$ (resp. $\underline{\mathbb{R}}[[x_1, \dots, x_n]]$) l'anneau des séries à n indéterminées, convergentes au voisinage de 0 (resp. formelles), à coefficients réels. Nous appellerons anneau analytique réel (resp. formel réel) un anneau du type $\underline{\mathbb{R}}\{x_1, \dots, x_n\}/\mathfrak{P}$ (resp. $\underline{\mathbb{R}}[[x_1, \dots, x_n]]/\mathfrak{P}$), où \mathfrak{P} est un idéal de $\underline{\mathbb{R}}\{x_1, \dots, x_n\}$ (resp. $\underline{\mathbb{R}}[[x_1, \dots, x_n]]$). Ces anneaux contiennent de manière canonique un sous-anneau isomorphe à $\underline{\mathbb{R}}$ (les "constantes").

Définitions analogues avec $\underline{\mathbb{C}}$ au lieu de $\underline{\mathbb{R}}$.

Nous allons rappeler rapidement certaines propriétés de ces anneaux, pour lesquelles nous renvoyons à [8] \cup [9] \cup [10] (et, en particulier, à l'appendice de ce dernier article). Certaines propriétés indiquées ici n'y sont mentionnées que dans le cas complexe : le lecteur les étendra immédiatement au cas réel.

1. - Un anneau analytique (resp. formel) A est local (i. e. possède un plus grand idéal \mathfrak{M} , formé de tous les éléments inversibles de A), et noethérien.

On munit A de la structure d'anneau topologique pour laquelle un système fondamental de voisinages de 0 est constitué par les \mathfrak{M}^p ($p \in \underline{\mathbb{N}}$); muni de cette topologie, A est séparé, autrement dit $\bigcap_{p \in \underline{\mathbb{N}}} \mathfrak{M}^p = \{0\}$ (théorème de Krull). Si \mathfrak{P} est un idéal de A , le résultat précédent appliqué à $B = A/\mathfrak{P}$ signifie que \mathfrak{P} est toujours fermé.

2. - Désignons par \hat{A} le complété de A pour la topologie précédente (lorsque $A = \underline{\mathbb{R}}\{x_1, \dots, x_n\}$, on a trivialement $\hat{A} = \underline{\mathbb{R}}[[x_1, \dots, x_n]]$). Si \mathfrak{P} est un idéal de A , son complété $\hat{\mathfrak{P}}$ (i. e. son adhérence dans \hat{A}) est identique à l'idéal $\hat{A}\mathfrak{P}$ de \hat{A} engendré par \mathfrak{P} , puisque \mathfrak{P} est dense dans $\hat{A}\mathfrak{P}$, et que $\hat{A}\mathfrak{P}$ est fermé. D'autre part, si l'on pose $B = A/\mathfrak{P}$, on a $\hat{B} = \hat{A}/\hat{\mathfrak{P}}$.

De là résulte immédiatement que le complété d'un anneau analytique est un anneau formel, et que tout anneau formel est complet. Il en résulte aussi trivialement

que, \mathfrak{P} et \mathfrak{Q} étant deux idéaux de A , on a $(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})^\wedge = \hat{\mathfrak{P}} + \hat{\mathfrak{Q}}$.

3. - \hat{A} est un A -module fidèlement plat, ce qui signifie ceci :

a. Si \mathfrak{P} est un idéal de A , $\hat{A}\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{P}$

b. \hat{A} est un A -module plat ; autrement dit, si l'on a une suite exacte de A -modules $M' \rightarrow M \rightarrow M''$ la suite

$$\hat{A} \otimes_A M' \rightarrow \hat{A} \otimes_A M \rightarrow \hat{A} \otimes_A M''$$

est exacte.

Soit \mathfrak{P} un idéal de A . En appliquant ce dernier résultat à la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathfrak{P} \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{P} \rightarrow 0$$

on trouve que $\hat{\mathfrak{P}}$ (resp. $\hat{A}/\hat{\mathfrak{P}}$) s'identifie canoniquement à $\hat{A} \otimes_A \mathfrak{P}$ (resp. $\hat{A} \otimes_A A/\mathfrak{P}$).

Soit \mathfrak{Q} un autre idéal de A . En appliquant (b) à la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q} \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\delta} A/\mathfrak{P} \oplus A/\mathfrak{Q}$$

[où i désigne l'injection, et δ l'application diagonale $a \rightarrow (a \bmod \mathfrak{P}, a \bmod \mathfrak{Q})$], on trouve le résultat suivant :

$$(\mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q})^\wedge = \hat{\mathfrak{P}} \cap \hat{\mathfrak{Q}}$$

(voir dans [8] une autre démonstration de ce résultat).

4. - Soit A un anneau analytique (réel, par exemple), et a_1, \dots, a_k des éléments de A . Pour toute série convergente $f \in \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_k\}$, on définit de manière évidente l'élément $f(a_1, \dots, a_k)$ de A (et de même avec les anneaux formels f étant cette fois une série formelle). On dit que a_1, \dots, a_k sont analytiquement indépendants si l'application $\mathbb{R}\{x_1, \dots, x_k\} \rightarrow A$ ainsi définie est injective, et l'on définit de même des éléments formellement indépendants d'un anneau formel.

Lorsque A est un anneau analytique intègre, on appelle dimension de A et l'on note $\dim(A)$ le nombre maximum k d'éléments analytiquement indépendants de A . On peut alors trouver $a_1, \dots, a_k \in A$ tels que A soit un $\mathbb{R}\{a_1, \dots, a_k\}$ -module de type fini ("lemme de normalisation"). Si A est réalisé comme un quotient

$\mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\}/\mathfrak{P}$ (\mathfrak{P} , un idéal premier), on peut prendre, en faisant au besoin un changement linéaire de coordonnées :

$$a_j = x_j \pmod{\mathfrak{P}} \quad (1 \leq j \leq k) \quad ,$$

et on peut supposer que $a_{k+1} = x_{k+1} \pmod{\mathfrak{P}}$ engendre le corps des fractions \bar{A} de A sur le corps des fractions \bar{B} de $B = \mathbb{R}\{a_1, \dots, a_k\}$. D'après un lemme élémentaire, tout élément c de \bar{A} entier sur B (en particulier, tout élément de A) s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme suivante :

$$c = \frac{P(a_{k+1})}{\Delta} \quad ,$$

P étant un polynôme de degré $< p = [\bar{A} : \bar{B}]$, à coefficients dans B , et Δ étant le discriminant du polynôme minimal de a_{k+1} sur \bar{B} (lequel polynôme a ses coefficients dans B , puisque B , étant isomorphe à $\mathbb{R}\{x_1, \dots, x_k\}$ est factoriel, donc intégralement clos).

Soit \mathfrak{M} (resp. \mathfrak{N}) l'idéal maximal de A (resp. B). D'après un théorème de Krull la topologie définie sur A par les $\Lambda^n \mathfrak{M}$ induit sur B sa topologie naturelle ; montrons qu'il en est de même pour A ; $A/\Lambda \mathfrak{N}$ est un module de type fini sur $B/\mathfrak{N} \approx \mathbb{R}$, donc un anneau d'Artin ; par conséquent $\Lambda \mathfrak{N}$ est \mathfrak{M} -primaire, et l'on a $\Lambda \mathfrak{N} \supset \mathfrak{M}^r$ pour un entier $r > 0$: d'où le résultat. On en déduit que l'application canonique $\Lambda \otimes_B \hat{B} \rightarrow \hat{A}$ est bijective [10] et (trivialement), que l'application canonique $\hat{B} \rightarrow \hat{A}$ est injective (en fait, les mêmes raisonnements valent pour un couple (A, B) d'anneaux analytiques, avec $A \supset B$ de type fini sur B).

Il en résulte immédiatement que a_1, \dots, a_k sont formellement indépendants dans \hat{A} . Par contre, nous allons démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 1. - Soit \mathfrak{S} un idéal de \hat{A} , avec $\mathfrak{S} \neq \{0\}$. Les $a_j \pmod{\mathfrak{S}}$ ne sont pas formellement indépendants dans \hat{A}/\mathfrak{S} (autrement dit : $\hat{B} \cap \mathfrak{S} \neq \{0\}$).

La démonstration de cette proposition repose sur le résultat suivant, dont la démonstration nous a été communiquée par J.-P. SERRE.

THÉORÈME 1. - Dans les hypothèses précédentes (i. e. A anneau analytique intègre), \hat{A} est un anneau intègre.

On se ramène immédiatement au cas complexe en adjoignant au besoin à \bar{A} une racine i de l'équation $X^2 + 1 = 0$, et en remplaçant A par $A[i]$; dans la

suite, nous supposons donc A analytique complexe, et nous garderons les notations précédentes en y remplaçant \underline{R} par \underline{C} .

On établit alors le théorème 1, par récurrence sur la dimension de A ; pour cela, désignons par (T_k) l'énoncé précédent pour les anneaux de dimension $\leq k$, et par (T'_k) le même énoncé pour les anneaux normaux (i. e. intègres et intégralement clos) de dimension $\leq k$.

a. $(T'_k) \Rightarrow (T_k)$. - Soit D la fermeture intégrale de A (ou, ce qui revient au même, de B) dans \bar{A} . Il est connu (cf. par exemple [2] ou [3]) que D est un anneau analytique, et de même dimension k que A . Comme D est un A -module de type fini, l'application $\hat{A} \rightarrow \hat{D}$ est injective (reprendre le raisonnement fait plus haut pour démontrer que l'application $\hat{B} \rightarrow \hat{A}$ est injective).

D est normal par construction, donc \hat{D} est intègre, et \hat{A} , qui est un sous-anneau de \hat{D} , est intègre.

b. $(T_{k-1}) \Rightarrow (T'_k)$. - On emploie ici une variante d'un raisonnement de ZARISKI [11]. Soit A un anneau analytique intègre de dimension k ; on sait que, \mathfrak{P} étant un idéal premier de A , différent de $\{0\}$, A/\mathfrak{P} est de dimension $\leq k-1$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\hat{A}/\hat{\mathfrak{P}}$ est intègre, donc $\hat{\mathfrak{P}}$ premier (en particulier $\hat{A}/\hat{\mathfrak{P}}$ n'a pas d'éléments nilpotents, i. e. \mathfrak{P} n'est pas ramifié dans \hat{A}).

Supposons A normal, et soit $B = \underline{C}\{a_1, \dots, a_k\}$ un sous-anneau de A , isomorphe à $\underline{C}\{x_1, \dots, x_k\}$, tel que A soit de type fini sur B . En appliquant au couple (A, B) un lemme de NAGATA ([7], paragraphe 4, lemme 3), on trouve que \hat{A} est normal, donc intègre. D'où le théorème.

La démonstration de la proposition 1 est maintenant immédiate. Soit \bar{A} (resp. \bar{B}) le corps des quotients de \hat{A} (resp. \hat{B}); comme $\hat{A} \approx \hat{B} \otimes_B A$, \hat{A} est de type fini sur \hat{B} , donc le sous-anneau $\bar{B}[\hat{A}]$ de \bar{A} engendré par \bar{B} et \hat{A} est un corps; donc $\bar{A} = \bar{B}[\hat{A}]$. Soit \mathfrak{S} un idéal $\neq \{0\}$ de \hat{A} , et soit $f \in \mathfrak{S}$, $f \neq 0$. On a, dans \hat{A} ,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} h \quad \text{avec } g \neq 0, \quad g \in \hat{B}, \quad h \in \hat{A}$$

d'où

$$g = fh \in \mathfrak{S} \quad \text{et} \quad \mathfrak{S} \cap \hat{B} \neq \{0\} \quad .$$

REMARQUE. - On notera que le théorème 1 était nécessaire pour établir le résultat précédent : Soit en effet B un anneau intègre et A un sur-anneau commutatif non intègre de B : il existe toujours un idéal \mathfrak{S} non trivial de A vérifiant $\mathfrak{S} \cap B = \{0\}$ (s'il existe un $b \in B$, $b \neq 0$ qui soit diviseur de 0 dans A , il suffit de prendre pour \mathfrak{S} l'annulateur de b dans A . Sinon, soit $a \in A$ un diviseur de zéro ; il suffit de prendre $\mathfrak{S} = (a)$).

2. Sur les germes de fonctions différentiables.

Désignons par $\underline{\mathbb{R}}\{x_1, \dots, x_n\}$ l'anneau des germes de fonctions (indéfiniment)⁽¹⁾ dérivables au voisinage de 0 dans $\underline{\mathbb{R}}^n$, à valeurs réelles ; si f est un tel germe, nous noterons $\hat{f} \in \underline{\mathbb{R}}[[x_1, \dots, x_n]]$ sa série de Taylor formelle en 0. Il est bien connu que l'application $f \rightarrow \hat{f}$ est surjective, i. e. que toute série formelle est de la forme \hat{f} pour un germe f .

Si g est une fonction dérivable dans un voisinage ouvert de 0 nous noterons g_0 son germe en 0, et g sera appelé "un représentant de g_0 ".

DÉFINITION 1. - Soit E un sous-ensemble de $\underline{\mathbb{R}}^n$ adhérent à 0, et g une fonction dérivable au voisinage de 0. Nous dirons que g (ou : que son germe g_0) a un zéro d'ordre infini en 0 sur E (ou : sur le germe E_0 de E en 0) si, $\forall p \in \underline{\mathbb{N}}$, il existe un voisinage \mathcal{O}_p de 0 et un nombre $C_p > 0$ tels que, dans $E \cap \mathcal{O}_p$, on ait $|g(x)| \leq C_p \|x\|^p$ (ici, et, dans la suite, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans $\underline{\mathbb{R}}^n$).

La propriété précédente ne dépend en fait que de la série de Taylor de f en 0, (puisque une fonction, dont la série de Taylor est nulle en 0, a un zéro d'ordre infini en 0 sur $\underline{\mathbb{R}}^n$) ; l'ensemble des séries formelles provenant de fonctions ayant un zéro d'ordre infini en 0 sur E forme un idéal de $\underline{\mathbb{R}}[[x_1, \dots, x_n]]$ que nous appellerons "idéal formel du germe E_0 " et que nous noterons $\mathfrak{S}(E_0)$.

Supposons maintenant que E soit un ensemble analytique réel au voisinage de 0 ; pour ne pas avoir à écrire constamment des indices, nous poserons $E_0 = V$. Soit $\mathfrak{S}(V) \subset \underline{\mathbb{R}}\{x_1, \dots, x_n\}$ l'idéal analytique de V , i. e. l'ensemble des

⁽¹⁾ Dans la suite, nous omettrons le mot "indéfiniment".

germes de fonctions analytiques en 0 (identifiés à des séries convergentes) nuls sur V . L'objet essentiel de cet exposé est le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - $\widehat{\mathfrak{S}(V)} = \mathfrak{S}(V)$.

[Autrement dit : pour que $f \in \underline{\mathbb{R}}\{x_1, \dots, x_n\}$ ait un zéro d'ordre infini en 0 sur V , il faut et il suffit que l'on ait : $\hat{f} \in \widehat{\mathfrak{S}(V)}$.]

Il suffit d'établir ce résultat lorsque V est (analytiquement) irréductible : soient en effet V_1, \dots, V_p les composantes irréductibles de V ; on a

$$\mathfrak{S}(V) = \mathfrak{S}(V_1) \cap \dots \cap \mathfrak{S}(V_p) \quad ,$$

d'où (paragraphe 1) ;

$$\widehat{\mathfrak{S}(V)} = \widehat{\mathfrak{S}(V_1)} \cap \dots \cap \widehat{\mathfrak{S}(V_p)} \quad ,$$

et aussi évidemment

$$\mathfrak{S}(V) = \mathfrak{S}(V_1) \cap \dots \cap \mathfrak{S}(V_p) \quad ;$$

si le résultat est vrai pour V_1, \dots, V_p , il sera par conséquent vrai pour V .

Supposons donc V irréductible. Dans ce cas $\mathfrak{S}(V)$ est premier, et $A = \underline{\mathbb{R}}\{x_1, \dots, x_n\}/\mathfrak{S}(V)$ est intègre ; soit k la dimension de A (qui, par définition, est égale à la dimension de V) ; on peut supposer (paragraphe 1) que les $a_j = x_j \bmod \mathfrak{S}(V)$, ($1 \leq j \leq k$), sont analytiquement indépendants, et que A est un $\underline{\mathbb{R}}\{a_1, \dots, a_k\}$ -module de type fini (dans la suite, nous poserons $B = \underline{\mathbb{R}}\{a_1, \dots, a_k\}$ et nous écrirons x_1, \dots, x_k au lieu de a_1, \dots, a_k , ce qui n'amènera aucune confusion).

On a évidemment : $\mathfrak{S}(V) \supset \widehat{\mathfrak{S}(V)}$; d'après la proposition 1, pour démontrer qu'on a $\mathfrak{S}(V) = \widehat{\mathfrak{S}(V)}$, il suffit de démontrer le résultat suivant :

$$(A_1) \quad \mathfrak{S}(V) \cap \underline{\mathbb{R}}[[x_1, \dots, x_k]] = \{0\}$$

(Autrement dit : toute fonction $f(x_1, \dots, x_k)$ dérivable au voisinage de 0 ayant un zéro d'ordre infini en 0 sur V a une série de Taylor identiquement nulle).

Avant de transformer cette condition par une projection sur $\underline{\mathbb{R}}^k$, nous allons rappeler quelques propriétés des germes analytiques réels. Conservons les notations précédentes, et posons $a_j = x_j \bmod \mathfrak{S}(V)$ ($k+1 \leq j \leq n$). Pour

$j = k + 1, \dots, n$, il existe un polynôme $P_j \in B[X]$ distingué (i. e. unitaire, les coefficients des termes non-dominants étant nuls à l'origine) et irréductible, tel qu'on ait $P_j(a_j) = 0$; on peut aussi supposer que a_{k+1} engendre le corps des fractions \bar{A} de A sur le corps des fractions \bar{B} de B , et que les P_j sont les polynômes minimaux des a_j sur \bar{B} . Il existe alors des polynômes uniques $Q_j \in B[X]$ ($k + 2 \leq j \leq n$), de degrés $< p = [\bar{A} : \bar{B}] = \deg P_{k+1}$, tels qu'on

ait : $a_j = \frac{Q_j(a_{k+1})}{\Delta}$, Δ désignant le discriminant de P_{k+1} ; on sait enfin que, en dehors de l'ensemble des zéros de Δ , V est représenté par les équations

$$\begin{cases} P_{k+1}(x_{k+1}) = 0 \\ \Delta x_j = Q_j(x_{k+1}) \quad (k + 2 \leq j \leq n) \end{cases}$$

(cf. [3] ou [9]) ; plus précisément : soit W un représentant de V défini dans un ouvert Ω , avec $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$; il existe un ouvert Ω' , avec $0 \in \Omega' \subset \Omega$, dans lequel les équations précédentes ont un sens, et tel que $W \cap \Omega'$ coïncide, avec l'ensemble des solutions de ces équations, sauf peut être sur l'ensemble $\Delta = 0$.

Soit alors \mathcal{U} un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^k , que l'on peut supposer assez petit pour que les coefficients des P_j et des Q_j soient des séries convergentes dans \mathcal{U} et pour que les conditions

$$"(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{U}, P_{k+j}(x_{k+1}; x_1, \dots, x_k) = 0"$$

entraînent

$$"(x_1, \dots, x_n) \in \Omega' " ;$$

désignons par pr la projection de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^k et par D l'ensemble des zéros de Δ dans \mathcal{U} ; on peut supposer, en choisissant convenablement \mathcal{U} , que $\mathcal{U} - D$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, et que chacune d'elles est adhérente à $0[1]$; il est alors clair que $pr(W \cap \Omega')$ contient une telle composante connexe, que nous noterons Γ ; on peut encore supposer que, sur $W \cap \Omega'$, on a $\|x\| \leq C \|pr x\|^\alpha$ avec $C > 0$, $\alpha > 0$ (en vertu des équations $P_{k+j}(x_{k+j}; x_1, \dots, x_k) = 0$ et de majorations élémentaires des zéros d'un polynôme que nous laissons au lecteur).

Soit maintenant f un germe de fonction contenu dans $\mathbb{R}\{\{x_1, \dots, x_n\}\}$, et ne dépendant que de x_1, \dots, x_k , l'inégalité précédente nous montre que f , considéré comme élément de $\mathbb{R}\{\{x_1, \dots, x_k\}\}$, a un zéro d'ordre infini en 0 sur Γ . Pour démontrer (A_1) , nous sommes donc ramenés, en changeant un peu les notations,

à établir le résultat suivant :

(A₂) soient \mathcal{U} un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^k , Φ une fonction analytique réelle dans \mathcal{U} , vérifiant $\Phi(0) = 0$ et non identiquement nulle au voisinage de 0, D l'ensemble des zéros de Φ , et Γ une composante connexe adhérente à 0 de $\mathcal{U} - D$. On a $\mathfrak{I}(\Gamma_0) = 0$.

Autrement dit : tout $f \in \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_k\}$ qui a un zéro d'ordre infini en 0 sur Γ vérifie $\hat{f} = 0$.

Pour démontrer (A₂), nous allons procéder ainsi : nous supposons que la fonction $\Phi(0, \dots, 0, x_k)$ n'est pas identiquement nulle au voisinage de 0, et nous montrerons qu'on a alors,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \frac{\partial^p f}{\partial x_k^p}(0, \dots, 0) = 0.$$

Cela entraînera bien le résultat ; en effet, l'ensemble des droites issues de 0 sur lesquelles Φ n'est pas identiquement nul au voisinage de 0 est un ouvert partout dense dans l'ensemble des droites issues de 0 ; comme, après un changement linéaire de coordonnées, on peut prendre pour axe Ox_k une quelconque de ces droites, il en résultera bien, par un calcul élémentaire que nous laissons au lecteur, que toutes les dérivées de f sont nulles à l'origine, i. e. que $\hat{f} = 0$.

Dans les hypothèses précédentes, on peut supposer, d'après des propriétés classiques des anneaux de séries convergentes, que le germe Φ_0 est sans facteurs multiples, et que c'est un polynôme distingué en x_k . En restreignant au besoin \mathcal{U} , Φ sera alors de la forme

$$\Phi = x_k^p + \sum_{i=1}^{p-1} a_i(x_1, \dots, x_{k-1}) x_k^{p-i}$$

les a_i étant des fonctions analytiques dans \mathcal{U} , avec $a_i(0, \dots, 0) = 0$ ($1 \leq i \leq p-1$), et le discriminant δ de Φ ne sera pas identiquement nul au voisinage de 0.

Posons, pour $x = (x_1, \dots, x_k)$: $x = (x', x_k)$ et pr $x = x'$. Soit \mathcal{U}' un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R}^{k-1} tel que les conditions " $x' \in \mathcal{U}'$, $\Phi(z; x') = 0$ ($z \in \mathbb{C}$)" entraînent $|z| \leq \frac{1}{2}$ et, lorsque z est réel : $(x', z) \in \mathcal{U}$; soient Δ l'ensemble des zéros de δ dans \mathcal{U}' , et \mathcal{V}' un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^{k-1} , relativement compact dans \mathcal{U}' . D'après un

théorème de ŁOJASIEWICZ (cf. [5] ou [6]), il existe $C > 0$ et $\alpha > 0$, tels qu'on ait, $\forall x' \in \mathcal{V}' : |\delta(x')| \geq C d(x', \Delta)^\alpha$, d désignant la distance euclidienne dans \mathbb{R}^{k-1} . Si z^1, \dots, z^p sont les racines de l'équation $\Phi(x', z) = 0$, on aura toujours, pour $x' \in \mathcal{V}' : |z^i - z^j| \leq 1$, et par suite $|z^i - z^j| \geq C d(x', \Delta)^\alpha$.

D'autre part, on peut supposer que $\mathcal{V}' - D$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, toutes adhérentes à $O[1]$; il est alors clair que $\text{pr}(\Gamma)$ contient une de ces composantes connexes, γ ; et, $\forall x' \in \gamma$, $\text{pr}^{-1}(x') \cap \Gamma$ contient un intervalle ouvert $I(x')$, de longueur $\geq C d(x', \Delta)^\alpha$.

Appelons $a(x')$ et $b(x')$ les k -ièmes coordonnées des extrémités de $I(x')$; on peut supposer qu'on a $\Phi(x', a(x')) = 0$, et par suite (majoration élémentaire)

$$(1) \quad |a(x')| \leq C_1 \|x'\|^{\alpha_1} \quad (C_1 > 0, \alpha_1 > 0) \quad ;$$

en diminuant au besoin $I(x')$, et en modifiant convenablement C_1 et α_1 , on peut supposer qu'on a aussi

$$(2) \quad |b(x')| \leq C_1 \|x'\|^{\alpha_1} \quad ,$$

l'inégalité

$$(3) \quad |a(x') - b(x')| \geq C d(x', \Delta)^\alpha$$

restant toujours vérifiée.

LEMME 1. - Dans les hypothèses de (A_2) , il existe une suite x^ℓ de points de Γ tendant vers 0 et des nombres $C_2 > 0$, $\alpha_2 > 0$ tels qu'on ait, $\forall \ell$

$$\|x^\ell\| \leq C_2 d(x^\ell, D)^{\alpha_2} \quad .$$

Ce lemme est évident pour $k = 1$; supposons-le donc vrai pour $k - 1$, et démontrons-le pour k . D'après la formule des accroissements finis, il suffit de trouver une suite x^ℓ de points de Γ tendant vers 0, et vérifiant

$$\|x^\ell\| \leq C_2 |\Phi(x^\ell)|^{\alpha_2} \quad .$$

Par hypothèse de récurrence, il existe une suite (x'^ℓ) de points de γ qui vérifient

$$(4) \quad \|x'^\ell\| \leq C_3 d(x'^\ell, \Delta)^{\alpha_3} \quad (C_3 > 0, \alpha_3 > 0) \quad .$$

Montrons que le milieu x^ℓ de l'intervalle $I(x'^\ell)$ répond à la question ; on a en effet, à cause de (1) et (2) :

$$(5) \quad \|x^\ell\| \leq C_4 \|x'^\ell\|^{\alpha_4} \quad (C_4 > 0, \alpha_4 > 0) \quad .$$

D'autre part, $I(x'^\ell)$ ne contient aucun zéro réel de Φ , donc la distance de x_k^ℓ ($= \frac{a(x'^\ell) + b(x'^\ell)}{2}$) à une racine réelle z de l'équation $\Phi(x'^\ell, z) = 0$ est supérieure à $C d(x'^\ell, \Delta)^\alpha$, d'après (3) ; comme les racines non réelles de cette équation vérifient

$$2|\Im_z| = |z - \bar{z}| \geq C d(x'^\ell, \Delta)^\alpha \quad ,$$

la distance de x_k^ℓ à une telle racine est supérieure à $\frac{C}{2} d(x'^\ell, \Delta)^\alpha$; par suite, en désignant par z^j les racines de cette équation :

$$|\Phi(x^\ell)| = \prod_j |x_k^\ell - z^j| \geq \left(\frac{C}{2}\right)^p d(x'^\ell, \Delta)^{p\alpha} \quad .$$

Donc, d'après (4) et (5)

$$|\Phi(x^\ell)| \geq C_5 \|x^\ell\|^{\alpha_5} \quad (C_5 > 0, \alpha_5 > 0) \quad ,$$

d'où le lemme.

Pour démontrer (A_2) , nous appliquerons ce lemme à δ et γ (au lieu de Φ et Γ , comme dans l'énoncé) : il existe donc une suite (x'^ℓ) de points de γ tendant vers 0 et vérifiant (4). Divisons l'intervalle $I(x'^\ell)$ en n intervalles égaux, dont les extrémités ont pour k -ième coordonnée :

$$a_0(x'^\ell) = a(x'^\ell), \quad a_1(x'^\ell), \quad \dots, \quad a_n(x'^\ell) = b(x'^\ell)$$

et considérons l'expression :

$$\frac{1}{(a_0 - a_1)^n} [f(x'^\ell, a_0) - \binom{n}{1} f(x'^\ell, a_1) + \dots + (-1)^n f(x'^\ell, a_n)]$$

lorsque ℓ tend vers l'infini, cette expression a pour limite $\frac{\partial^n f}{\partial x_k^n}(0)$, d'après

(par exemple) la formule des accroissements finis généralisée ; d'autre part les inégalités (1), (2), (3) et (4), jointes au fait que f a un zéro d'ordre infini

en 0 sur Γ , montrent que cette expression a pour limite 0 : on a donc bien, $\forall n$, $\frac{\partial^n f}{\partial x_k^n}(0) = 0$, ce qui démontre (A_2) et le théorème.

Soient maintenant Ω un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, et E un sous-ensemble analytique de Ω . Pour tout point $a \in \Omega$, désignons par \mathcal{O}_a l'anneau des germes de fonctions analytiques au voisinage de a , et par $\mathfrak{I}_a(E)$ l'idéal de \mathcal{O}_a formé des germes nuls sur E au voisinage de a . Rappelons que, par définition, E est dit cohérent si le faisceau analytique $a \rightarrow \mathfrak{I}_a(E)$ est cohérent [4]. On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - Avec les notations précédentes, supposons que E soit cohérent, et soit f une fonction dérivable dans Ω , nulle sur E . Au voisinage de tout point de Ω , on a : $f = \sum g_i h_i$, les fonctions g_i étant analytiques au voisinage de a et nulles sur E , et les fonctions h_i dérivables.

(La théorie des faisceaux analytiques cohérents permettrait d'ailleurs de donner un énoncé global de ce théorème.)

Etant donné un point $a \in \Omega$, on peut, par définition de la cohérence de E , trouver un voisinage ouvert θ de a , $\theta \subset \Omega$, et des fonctions g_i analytiques dans θ telles que, $\forall b \in \theta$, les germes $(g_i)_b$ engendrent $\mathfrak{I}_b(E)$. Il résulte alors du théorème 2 que, $\forall b \in \theta$, la série de Taylor \tilde{f}_b de f en b est combinaison des $(\tilde{g}_i)_b$ à coefficients séries formelles. D'après un théorème connu [6], il en résulte que f est dans θ , combinaison des g_i à coefficients fonctions dérivables.

C. Q. F. D.

Pour un sous-ensemble analytique E quelconque, le résultat précédent ne sera pas vrai (il me paraît même probable que l'hypothèse de cohérence est nécessaire) : voici un contre-exemple, qui m'a été communiqué par J.-P. SERRE : prenons $\Omega = \mathbb{R}^3$, et prenons pour E le cône d'équation $x_3(x_1^2 + x_2^2) = x_1^3$, qui admet pour génératrice isolée la droite $x_1 = x_2 = 0$. Soit φ une fonction dérivable sur la sphère unité S_2 : $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, nulle sur $S_2 \cap E$, mais ne s'annulant qu'à l'ordre 1 aux points $(0, 0, \pm 1)$. Prenons f défini par

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \exp\left(-\frac{1}{\|x\|^2}\right)$$

il est clair que f est dérivable dans \mathbb{R}^3 , et nulle sur E ; mais, au voisinage de 0 , f n'est pas de la forme $[x_3(x_1^2 + x_2^2) - x_1^3] h$, avec h dérivable puisque f ne s'annule qu'à l'ordre 1 aux points $\neq 0$ de la génératrice isolée.

3. Application aux ensembles analytiques complexes.

Soit V un germe d'ensemble analytique complexe en 0 dans \mathbb{C}^n ; identifions \mathbb{C}^n à \mathbb{R}^{2n} en associant à $z = (z_1, \dots, z_n)$ le point $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ avec $x_j = \operatorname{Re} z_j$, $y_j = \operatorname{Im} z_j$; V peut alors être considéré comme germe analytique-réel. Si V est irréductible en tant que germe analytique complexe, il est irréductible en tant que germe analytique-réel puisque, W étant un représentant de V , il existe un système fondamental de voisinages θ_α de 0 tels que la partie régulière de $W \cap \theta_\alpha$ soit un ouvert connexe et partout dense dans $W \cap \theta_\alpha$ (cf. par exemple [2]). Il en résulte, dans le cas général, que les décompositions en composantes irréductibles de V coïncident, que V soit considéré comme germe analytique-réel ou analytique complexe.

Supposons V irréductible, et soit \mathfrak{S} son idéal "complexe" (i. e. dans $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$), et \mathfrak{S}' son idéal réel (i. e. dans $\mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$), posons $\tilde{\mathfrak{S}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{S}'$; $\tilde{\mathfrak{S}}$ est un idéal de $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$, et c'est l'idéal du complexifié [4] \tilde{V} de V considéré comme germe analytique-réel; évidemment, $\tilde{\mathfrak{S}}$ contient les parties réelles et imaginaires des fonctions de \mathfrak{S} (je ne sais pas s'il est ou non engendré par ces fonctions; il me semble probable que la réponse est positive). En faisant, dans \mathbb{C}^{2n} , le changement de coordonnées: $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$, on déduit de là que un représentant \tilde{W} de \tilde{V} est contenu au voisinage de 0 dans l'ensemble $W \times \bar{W}$ des points (z, ζ) vérifiant $z \in W$, $\zeta \in \bar{W}$, W étant un représentant de V ; or cet ensemble est visiblement irréductible (même raisonnement que plus haut), donc $\tilde{W} = W \times \bar{W}$.

Soit alors E un sous-ensemble analytique complexe d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Examinons à quelle condition E , considéré comme ensemble analytique-réel, est cohérent; pour cela, il faut et il suffit que la condition suivante soit réalisée: pour tout $a \in \Omega$, désignons par \tilde{E}_a le complexifié du germe analytique-réel E_a , et soit F_a un représentant de \tilde{E}_a ; alors, en tout point $b \in \Omega$ assez voisin de a , on a $(F_a)_b = \tilde{E}_b$ (ce fait résulte immédiatement du fait que le faisceau d'un sous-ensemble analytique complexe est cohérent; voir [4]); et la condition précédente est vérifiée en a si elle est vérifiée par les composantes irréductibles de E_a (ou, plus exactement, par des représentants de ces composantes irréductibles) [4]. De là, et des résultats précédents, résulte facilement

que E , considéré comme ensemble analytique réel, est cohérent, si et seulement si la condition suivante est vérifiée : pour tout point $a \in \Omega$, les composantes irréductibles de E en a (i. e. des représentants des composantes irréductibles de E_a) restent irréductibles en tout point $b \in \Omega$ suffisamment voisin de a . Par exemple, cette propriété sera vérifiée en a , si E est normal en a , d'après le "théorème d'Oka" [3]; mais en général, elle ne sera pas vérifiée [par exemple, dans \mathbb{C}^3 , l'ensemble défini par l'équation $z_3(z_1^2 + z_2^2) = z_1^3$ n'est pas cohérent en 0 , lorsqu'on le considère comme ensemble analytique réel; et une construction analogue à celle qui a été faite au paragraphe 2 montre que pour cet ensemble, la propriété énoncée au théorème 3 est fautive].

Voici maintenant une autre application du théorème 2.

THÉORÈME 4. - Soit V un germe analytique complexe en 0 dans \mathbb{C}^n , et soit f un germe de fonction à valeurs complexes sur V , possédant les propriétés suivantes :

1° f est restriction d'un germe F de fonction dérivable au voisinage de 0 dans \mathbb{C}^n .

2° La restriction de f à la partie régulière de V est holomorphe.

Alors, f est restriction d'un germe de fonction holomorphe au voisinage de 0 dans \mathbb{C}^n (i. e. " f est holomorphe sur le germe d'espace analytique V ").

(La condition 2° doit évidemment être interprétée ainsi : soient W un représentant de V , et g une fonction sur W dont le germe en 0 soit égal à f ; alors la restriction de g à la variété des points réguliers de W est holomorphe.)

Démontrons d'abord ce théorème lorsque V est irréductible; dans ce cas, nous conserverons les notations du début du paragraphe 3 : \hat{V} , \mathfrak{S} , etc. L'hypothèse 2°, jointe à la continuité de f , entraîne classiquement [2] que f est méromorphe sur V , i. e. qu'il existe g et $h \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$, avec $h \notin \mathfrak{S}$, tels qu'on ait, sur V : $hf - g = 0$.

Appliquons le théorème 2 à la fonction $hF - g$; on trouve

$$\hat{h}\hat{F} - \hat{g} \equiv 0 \pmod{\hat{\mathfrak{S}}},$$

appelons \hat{F} la série formelle $\in \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ obtenue en faisant $\zeta = 0$ dans le développement $\hat{F}(z, \zeta)$ de F en 0 , et remarquons que, si une série formelle $k(z, \zeta)$ appartient à $\hat{\mathfrak{S}}$, on a $k(z, 0) \in \hat{\mathfrak{S}}$ (en effet, il suffit

d'établir ce résultat lorsque k est une série convergente ; or, dans ce cas, elle s'annule sur $V \times \bar{V}$, donc $k(z, 0)$ s'annule sur V). Faisant $\zeta = 0$ dans la formule précédente, il vient

$$\widehat{hF} - \widehat{g} \equiv 0 \pmod{\widehat{\mathfrak{S}}} .$$

Soit \mathfrak{S} l'idéal $\subset \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ engendré par \mathfrak{S} et h , i. e. $\mathfrak{S} = \mathfrak{S} + (h)$; on a (paragraphe 1) $\widehat{\mathfrak{S}} = \widehat{\mathfrak{S}} + (\widehat{h})$, d'où $\widehat{g} \equiv 0 \pmod{\widehat{\mathfrak{S}}}$; d'après 1, 3 (a), cela entraîne :

$$g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{S}}, \text{ i. e. } \exists \Phi \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}, \quad g - \Phi h \equiv 0 \pmod{\mathfrak{S}} ;$$

sur l'ensemble des points de V qui vérifient $h \neq 0$, donc partout sur V , on a alors $\Phi = F$ (puisque l'ensemble de ces points est dense dans V , cf [2]) ; d'où le résultat.

Passons maintenant au cas général : soient V_1, \dots, V_p les composantes irréductibles de V , et $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_p$ leurs idéaux. Le raisonnement précédent montre qu'il existe $\Phi_1, \dots, \Phi_p \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ tels qu'on ait,

$$\forall j : F - \Phi_j = 0 \text{ sur } V_j .$$

Avec des notations évidentes, on aura, $\forall j$, d'après le théorème 2

$$\widehat{F} - \widehat{\Phi}_j \equiv 0 \pmod{\widehat{\mathfrak{S}}_j}$$

d'où, en faisant $\sigma = 0$:

$$\widehat{F} - \widehat{\Phi}_j \equiv 0 \pmod{\widehat{\mathfrak{S}}_j}$$

et par suite

$$\forall (i, j), \quad \widehat{\Phi}_i - \widehat{\Phi}_j \equiv 0 \pmod{(\widehat{\mathfrak{S}}_i + \widehat{\mathfrak{S}}_j)}$$

et, d'après 1, 3 (a), et la formule $(\mathfrak{S}_i + \mathfrak{S}_j)^\wedge = \widehat{\mathfrak{S}}_i + \widehat{\mathfrak{S}}_j$

$$\Phi_i - \Phi_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{S}_i + \mathfrak{S}_j} .$$

Il est alors élémentaire de montrer qu'il existe $\Phi \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ tel qu'on ait,

$$\forall j, \quad \Phi - \Phi_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{S}_j} ;$$

et il est clair que, sur V , on a $\Phi = F$. D'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRUHAT (F.) et CARTAN (H.). - Sur la structure des sous-ensembles analytiques réels, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 988-990.
 - [2] CARTAN (Henri). - Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, Séminaire Cartan, t. 4, 1951/52 ; Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes, Séminaire Cartan, t. 6, 1953/54.
 - [3] CARTAN (Henri). - Déformation de structures analytiques complexes, Séminaire Cartan, t. 13, 1960/61. - Paris, Secrétariat mathématique (à paraître).
 - [4] CARTAN (Henri). - Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 77-99.
 - [5] ~~YO~~JASIEWICZ (S.). - Sur le problème de la division, Studia Math., t. 18, 1959, p. 87-136.
 - [6] MALGRANGE (Bernard). - Division des distributions, I-IV., Séminaire Schwartz, t. 4, 1959/60, exposés 21-25.
 - [7] NAGATA (Masayoshi). - A general theory of algebraic geometry over Dedekind domains, I., Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 78-116.
 - [8] SAMUEL (Pierre). - Algèbre locale. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Mémorial des Sciences mathématiques, 123).
 - [9] SAMUEL (Pierre). - Algèbre locale et ensembles analytiques, Séminaire Lelong : Analyse, t. 1, 1957/58, exposé n° 2 (non multigraphié).
 - [10] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 1-42.
 - [11] ZARISKI (Oscar). - Sur la normalité analytique des variétés normales, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 2, 1950, p. 161-163.
-