Séminaire Lelong.
Analyse

Mary Weiss

**Un théorème sur les séries lacunaires de puissances**

*Séminaire Lelong. Analyse*, tome 3 (1961), exp. nº 2, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1961__3__A2_0>

# UN THÉORÈME SUR LES SÉRIES LACUNAIRES DE PUISSANCES

par Mme Mary WEISS

DÉFINITION. - Une série lacunaire trigonométrique est une série

$$S(x) = \sum_1^\infty (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) = \sum_1^\infty \rho_k \cos(n_k x + \alpha_k)$$

où $n_{k+1}/n_k > q > 1$ .

Un des premiers à considérer de telles séries fut WEIERSTRASS, et son exemple d'une fonction continue non différentiable était une série lacunaire trigonométrique. Dès lors, ces séries ont été employées pour donner des exemples dans l'analyse. Elles possèdent des propriétés précises.

Pour les séries lacunaires trigonométriques, on a les résultats suivants :

(1) Si $\sum \rho_k^2 < \infty$ alors $S(x)$ converge presque partout (p. p.) ;

(2) Si $\sum \rho_k^2 = \infty$ alors $S(x)$ diverge p. p. (plus précisément $S(x)$ n'est sommable par aucune méthode linéaire dans aucun ensemble de mesure positive).

Puisque toutes les séries trigonométriques pour lesquelles $\sum \rho_k^2 < \infty$ sont des séries de Fourier, et puisque toutes les séries de Fourier sont sommables par le procédé d'Abel p. p., on a pour les séries lacunaires le corollaire suivant :

(3) $S(x)$ est une série de Fourier si et seulement si $\sum \rho_k^2 < \infty$ .

Dans quelles conditions une série lacunaire converge-t-elle partout dans un intervalle ? La convergence absolue de la série des coefficients est une condition suffisante, et il est intéressant à noter qu'elle est aussi une condition nécessaire dans ce cas.

(4) Si $S(x)$ , série lacunaire, converge partout dans un intervalle alors $\sum_1^\infty \rho_k < \infty$ .

Au sujet des valeurs que $S(x)$ peut avoir dans son ensemble de convergence, nous avons le curieux résultat suivant :

(5) Si $\sum \rho_k = \infty$ et $\rho_k \to 0$ , alors $S(x)$ converge vers toute valeur réelle.

Il est intéressant de remarquer que si $\sum \rho_k^2 = \infty$ alors $S(x)$ converge seulement dans un ensemble de mesure zéro, mais sur cet ensemble elle prend toutes les valeurs.

De plus, ces séries donnent lieu à des théorèmes qui sont les analogues des théorèmes de la théorie des Probabilités, comme la loi de Gauss-Laplace et la loi du logarithme itéré, conformément au principe général que les séries lacunaires se conduisent comme des séries de variables indépendantes aléatoires. Nous pouvons comparer les propriétés (1) et (2) au théorème de Kolmogorov sur la convergence des variables indépendantes aléatoires.

Si au lieu de séries trigonométriques, on étudie des séries de puissances, c'est-à-dire des séries $S(x) = \sum_1^\infty C_k e^{in_k x}$ , où $n_{k+1}/n_k > q > 1$ , l'équivalent de (5) est alors l'énoncé suivant, conjecturé par PALEY, et établi dans [2] :

THÉORÈME. - Si $S(x) = \sum_1^\infty C_k e^{in_k x}$ où $n_{k+1}/n_k > q > 1$ satisfait $C_k \to 0$ , $\sum |C_k| = \infty$ , alors pour chaque $Z$ complexe, il y a un $y \in (0 , 2\pi)$ tel que

$$\sum_1^\infty C_k e^{in_k y} = Z \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE


[1] ZYGMUND (A.). - Trigonometric series, t. I., II., 2nd edition. - Cambridge, at the University Press, 1959.

[2] WEISS (Mary). - Concerning a theorem of Paley on lacunary power series, Acta Math., t. 102, 1959, p. 225-238.