SÉMINAIRE LELONG.
ANALYSE

MARTIN ZERNER

Équations aux dérivées partielles dont les solutions sont indéfiniment dérivables (hypoellipticité)

Séminaire Lelong. Analyse, tome 2 (1958-1959), exp. n° 12, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1958-1959__2__A8_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire d'ANALYSE
(P. LELONG)
Année 1958/59
-:-:-:-

10 mars 1959

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DONT LES SOLUTIONS SONT INDÉFINIMENT DÉRIVABLES (HYPOELLIPTICITÉ)

par Martin ZERNER

On appelle hypoelliptiques les équations qui possèdent la propriété connue sous le nom de lemme de WEYL pour les équations elliptiques : les solutions (y compris les solutions faibles ou solutions distributions) sont des fonctions indéfiniment dérivables sur tout ouvert où le second membre est indéfiniment dérivable.

Dans sa thèse [1] HÖRMANDER a donné une caractérisation des opérateurs hypoelliptiques à coefficients constants, caractérisation qu'il a étendue dans un article récent [3] aux systèmes. C'est ce résultat que nous allons exposer ici en utilisant une méthode complètement différente de celle d'Hörmander, méthode qui a été introduite par MALGRANGE [5] pour le cas des équations à coefficients variables. Les démonstrations sont ainsi grandement simplifiées et nous les donnons de façon assez complète de sorte que cet exposé puisse servir d'introduction à l'étude des différents mémoires cités.

Notations. - La variable x parcourra l'espace vectoriel réel à ν dimensions, ξ l'espace dual et $\zeta = \xi + i\eta$ le complexifié de ce dual. P étant un polynôme, $P(D)$ désignera l'opérateur différentiel obtenu en remplaçant dans P l'indéterminée par $i\frac{\partial}{\partial x}$. On posera encore :

$$\alpha = (\alpha_1 , \dots , \alpha_\nu) , |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_\nu , \alpha ! = \alpha_1 ! \dots \alpha_\nu !$$

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_\nu^{\alpha_\nu}$$

$$P^{(\alpha)} (\xi) = (\partial/\partial\xi)^\alpha P(\xi) .$$

Enfin nous dirons que P est hypoelliptique si l'équation $P(D)u = 0$ est hypoelliptique. V désignera l'ensemble analytique complexe des zéros de P.

Nous étudierons les quatre conditions :

(H) P est hyoelliptique.

(I) Tout sous-ensemble de V, dont la projection sur le sous-espace imaginaire pur est bornée, est borné.

(II) $P(\xi)$ ne s'annule pas en dehors d'un compact et $\forall\ \xi_0$

$$P(\xi + \xi_0)/P(\xi) \longrightarrow 1 \quad (\xi \longrightarrow \infty)$$

(III) $\alpha \neq (0, \dots, 0) \Longrightarrow \quad P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \longrightarrow 0 \quad (\xi \longrightarrow \infty)$

Nous démontrerons successivement :

A : (H) $\Longrightarrow$ (I)
B1 : (I) $\Longrightarrow$ (II)
B2 : (II) $\Longrightarrow$ (III)
C : (III) $\Longrightarrow$ (H)

A. Nous utiliserons (H) sous une forme affaiblie : il existe un ouvert borné Ω tel que $u \in L^2(\Omega)$ et $P(D)u = 0$ sur Ω entraînent que u est indéfiniment dérivable sur Ω.

En particulier, Ω' étant un ouvert d'adhérence contenue dans Ω $u \in H^1(\Omega')$, espace des fonctions de carré sommable sur Ω' ainsi que leurs dérivées premières, on munit cet espace de la norme dont le carré est la somme des carrés des normes $L^2(\Omega')$ de u et de ses dérivées premières. Le noyau de P dans $L^2(\Omega)$ étant fermé est un espace de Hilbert, lequel est, nous venons de le voir muni d'une application dans $H^1(\Omega')$. Le graphe de cette application est fermé car elle est continue quand on munit $H^1(\Omega')$ de la topologie induite par $\mathcal{D}'$. Il existe donc une constante C telle que, pour toute $u \in L^2(\Omega)$ vérifiant $P(D)u = 0$:

$$\int_{\Omega'} \left(|u|^2 + \sum \left| \frac{\partial u}{\partial x^i} \right|^2 \right) \leq C \int_{\Omega} |u|^2$$

Dans cette inégalité nous pouvons faire $u = e^{-i\zeta x}$ pourvu que $\zeta \in V$; ce qui donne :

$$(1 + |\xi|^2) \int_{\Omega'} e^{2\eta x}\, dx \leq C \int_{\Omega} e^{2\eta x}\, dx$$

Pour tout compact K de R il existe deux constantes > 0 : m, M telles que $\eta \in K$ entraîne :

$$\int_{\Omega'} e^{2\eta x}\, dx \geqslant m \qquad \int_{\Omega} e^{2\eta x}\, dx \leq M$$

d'où $(1 + |\zeta|^2) \leq \frac{MC}{m}$ ce qui implique (I) .

B_1 . On peut toujours se ramener au cas $\xi_0 = (1 , 0 , \dots , 0)$ par un changement de coordonnées.

Considérons alors $P(\xi)$ comme un polynôme en ξ^1 et soient $\tau_k(\xi^2 , \dots , \xi^\nu)$ ses racines. On peut écrire :

$$P(\xi) = a\prod_k (\xi^1 - \tau_k)$$

$$P(\xi + \xi_0) = a\prod_k (\xi^1 + 1 - \tau_k)$$

$$\frac{P(\xi + \xi_0)}{P(\xi)} = \prod_k (1 + \frac{1}{\xi^1 - \tau_k})$$

Quel que soit le nombre positif M il existe A tel que $|\xi| \geq A$ entraîne $|\xi^1 - \tau_k| \geq M$. En effet il existe B tel que $P(\zeta) = 0$ et $\mathrm{Im}(\zeta) \leq M$ impliquent $\mathrm{Re}(\zeta) \leq B$; on peut alors prendre $A = B + M$. C'est dire que chacun des facteurs de $P(\xi + \xi_0)/P(\xi)$ tend vers 1 quand ξ tend vers l'infini.

B_2. Cette démonstration repose sur le

LEMME. - Etant donné un polynôme $P(\xi)$, il existe un nombre fini de vecteurs réels θ_i tels que les polynômes $P(\xi + \theta_i)$ forment une base de l'espace vectoriel engendré par P et ses dérivées.

D'après la formule de Taylor :

$$P(\xi + \theta_i) = \sum_\alpha \frac{\theta_i^\alpha}{\alpha!} P^{(\alpha)}(\xi)$$

ce qui montre en particulier que $P(\xi + \theta_i)$ fait partie de l'espace vectoriel engendré par P et ses dérivées. Dans la combinaison linéaire $\sum_i t^i P(\xi + \theta_i)$ le coefficient de $P^{(\alpha)}/\alpha!$ est $\sum_i t^i \theta_i^\alpha$, et est, pour chaque α , une forme en t . Montrons donc qu'on peut choisir des θ réels de sorte que ces formes soient indépendantes : Si elles ne le sont pas c'est qu'il existe des constantes non nulles c_α telles que pour tous les i :

$$\sum c_\alpha \theta_i^\alpha = 0$$

mais c'est là un polynôme en θ_i de sorte qu'on pourra toujours adjoindre de nouveaux θ tels que l'égalité n'ait plus lieu. Le lemme est démontré.

On peut donc écrire :

$$P^{(\alpha)}(\xi) = \sum_i t^i P(\xi + \theta_i) ;$$

l'étude des parties principales montre alors que $\sum t^i = 0$, or :

$$P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) = \sum t^i P(\xi + \theta_i)/P(\xi) \longrightarrow \sum t_i \quad \text{d'après (II)}$$

C. Nous aurons besoin de quelques définitions et résultats d'analyse fonctionnelle.

Fonction-poids : cette expression désignera une fonction continue, strictement positive, majorée et minorée par des fractions rationnelles.

Espaces $\mathcal{D}^f$, $\mathcal{D}^{P,s}$: f étant une fonction-poids $\mathcal{D}^f$ désignera le sous-espace de $\mathcal{S}'$ formé des distributions T dont la transformée de Fourier est une fonction $\hat{T}$ telle que l'intégrale $\int |\hat{T}|^2 f(\xi)\, d\xi$ converge. $\mathcal{D}^f$ est un espace de Hilbert muni de la norme égale à la racine carrée de cette intégrale.

Nous écrirons pour simplifier $\mathcal{D}^{P,s}$ dans le cas où

$$f(\xi) = (1 + |P|^2)\ (1 + \xi^2)^s \text{ , et } \mathcal{D}^s \text{ au lieu de } \mathcal{D}^{1,s} .$$

Remarquons que s'il existe une constante positive C telle que $Cf \geq g$ alors $\mathcal{D}^f \subset \mathcal{D}^g$ avec une topologie plus fine. D'autre part $u \in \mathcal{D}^{P,s}$ équivaut aux deux conditions $u \in \mathcal{D}^s$ et $P(D)u \in \mathcal{D}^s$.

Nous supposerons désormais que tous les polynômes P considérés satisfont à la condition (III) . Alors $\mathcal{D}^{P,s}$ est stable pour la multiplication par les fonctions de $\mathcal{D}$. En effet le fait est connu pour $\mathcal{D}^s$ (voir des démonstrations dans SCHWARTZ [7] p. 13 et MALGRANGE [5] pp. 289-90 , SCHWARTZ note $\mathcal{H}^s$ l'espace que nous appelons $\mathcal{D}^s$) .

La formule de Leibniz peut s'écrire :

$$P(D)(\varphi u) = \sum_\alpha D^\alpha \varphi\ P^{(\alpha)}(D)u/|\alpha| \,!$$

et les $P^{(\alpha)}(D)u$ sont dans $\mathcal{D}^s$ d'après (III) et l'égalité de Parseval.

L'espace $\mathcal{L}^{P,s}$ est l'espace des distributions "localement dans $\mathcal{D}^{P,s}$" de façon précise : T est dans $\mathcal{L}^{P,s}$ si et seulement si, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$,

φT est dans $\mathcal{D}^{P,s}$ (cet espace est muni d'une topologie naturelle que nous n'aurons pas à utiliser ici).

LEMME 1. - Pour tout $\alpha \neq (0, \ldots, 0)$, il existe deux nombres strictement positifs m_α, σ_α tels que

a. $$|P^{(\alpha)}(\xi)|^2 \ (1+\xi^2)^{\sigma_\alpha} \leqslant m_\alpha (1 + |P(\xi)|^2)$$

b. quel que soit s, $u \in \mathcal{L}^{P,s}$ entraîne $P^{(\alpha)}(D)u \in \mathcal{L}^{s+\sigma_\alpha}$.

a. Considérons le système de deux équations polynomiales à coefficients réels ;

$$(S) \left| \begin{array}{l} \xi^2 = \rho^2 \\ 1 + |P(\xi)|^2 - M|P^{(\alpha)}(\xi)|^2 = 0 \end{array} \right.$$

où nous prenons $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^\nu)$ comme inconnue et ρ et M sont des paramètres. D'après un théorème de Tarski, il existe un certain nombre de systèmes :

$$(S_j) \left| \begin{array}{l} F_{jk} = 0 \\ F'_{jk} \geqslant 0 \end{array} \right.$$

où les F, F' sont des polynômes en ρ, M et tels qu'il soit nécessaire et suffisant pour que (S) ait une solution que l'un au moins des (S_j) soit satisfait (voir SEIDENBERG [8], Théorème 3 et n° 6 remarque b).

Posons maintenant :

$$\mu(\rho) = \inf_{|\xi|=\rho} (1 + |P(\xi)|^2)/|P^{(\alpha)}(\xi)|^2 ,$$

cette borne inférieure étant sûrement atteinte, $M = \mu(\rho)$ satisfait à un des (S_j). De plus, il annule au moins un des premiers membres de ce (S_j), car s'il n'y a que des inégalités, une au moins n'est plus satisfaite pour $M < \mu(\rho)$. Soient G le produit des premiers membres ainsi annulés (pour plusieurs (S_j) s'il y a lieu) et H le polynôme qui a les mêmes facteurs irréductibles que G mais avec la multiplicité un. Alors pour ρ assez grand, les racines de $H(M, \rho) = 0$ sont des fonctions continues sans valeur commune et $\mu(\rho)$ étant continue est une de ces fonctions. $\mu(\rho)$ possède donc un développement de Puiseux qui commence sûrement par un terme en ρ^a avec $a > 0$ d'après (III).

b. Soit $u \in \mathcal{L}^{P,s}$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, on a $\varphi u \in \mathcal{D}^{P,s}$ donc d'après (a) $P^{(\alpha)}(D)(\varphi u) \in \mathcal{D}^{s+\sigma_\alpha}$. Alors ψ étant une fonction quelconque de $\mathcal{D}$, nous pouvons prendre φ égale à un sur le support de ψ d'où il résultera $\psi P^{(\alpha)}(D)(\varphi u) = \psi P^{(\alpha)}(D)u$ ce qui achève la démonstration.

Soient Ω un ouvert, u une distribution sur Ω telle que $P(D)u = f$, f fonction indéfiniment dérivable sur Ω. Pour tout ouvert ω relativement compact dans Ω, il existe un nombre réel s tel que sur ω, $u \in \mathcal{L}^{P,s}$. Il suffit donc de démontrer ceci : si $u \in \mathcal{L}^{P,s}$ et si Pu est indéfiniment dérivable sur un ouvert, u est indéfiniment dérivable sur cet ouvert.

Or nous démontrerons le résultat suivant, qui est plus précis : $u \in \mathcal{L}^{P,s}$ et $P(D)u \in \mathcal{L}^{t}$ sur un ouvert entraînent $u \in \mathcal{L}^{P,t}$ sur cet ouvert (rappelons que $\mathcal{L}^{P,t} \subset \mathcal{L}^{t}$). Il est une conséquence du :

LEMME 2. - Il existe un nombre strictement positif σ ne dépendant que de P, tel que (sur tout ouvert) $u \in \mathcal{L}^{P,s}$, $P(D)u \in \mathcal{L}^{t}$ et $s + \sigma \leq t$ entraînent $u \in \mathcal{L}^{P,s+\sigma}$.

Nous poserons $\sigma = \inf(\sigma_\alpha)$. Soient u satisfaisant aux hypothèses du lemme et $\varphi \in \mathcal{D}$. On a (formule de Leibniz) :

$$P(D)(\varphi u) = \varphi P(D)u + \sum_{|\alpha|>0} D^\alpha \varphi \ P^{(\alpha)}(D)u/|\alpha| \ !$$

Le premier terme est dans $\mathcal{D}^{t}$ par hypothèse, les autres dans $\mathcal{D}^{s+\sigma}$ d'après le lemme 1(b), donc $P(D)(\varphi u) \in \mathcal{D}^{s+\sigma}$.

Il nous reste encore à démontrer que φu est aussi dans $\mathcal{D}^{s+\sigma}$. Il existe un α tel que $P^{(\alpha)}(D)$ soit une constante non nulle, ce qui entraîne, d'après le lemme 1(a), que $|P| \geqslant 1$ en dehors d'un certain compact K.

Soit $\hat{v}$ la transformee de Fourier de φu (c'est donc une fonction analytique de ξ). $\int_K |\hat{v}|^2 \ (1 + \xi^2)^{s+\sigma} d\xi$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un compact. Quant à $\int_{\complement K} |\hat{v}|^2 \ (1 + \xi^2)^{s+\sigma} d\xi$, elle est majorée par $\int |\hat{v}|^2 \ (1 + \xi^2)^{s+\sigma} |P|^2 \, d\xi$ dont la convergence est assurée par la première partie de la demonstration du lemme.

<u>Systèmes d'équations.</u> - $\mathcal{P}$ sera un polynôme dont les coefficients sont des matrices (m, n), P_k un déterminant d'ordre m qu'on peut en extraire, V désignera l'ensemble complexe des points ζ tels que $\mathcal{P}(\zeta)$ soit de rang strictement inférieur à m, c'est donc l'ensemble des zéros de l'idéal engendre

par lès P_k. Nous aurons encore besoin des notations suivantes : $\mathcal{P}_k$ est la matrice (m , m) de déterminant P_k extraite de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}_k$ la matrice des cofacteurs de $\mathcal{P}_k$ (donc $\mathcal{Q}_k . \mathcal{P}_k = P_k I$).

(I) <u>est encore une condition nécessaire et suffisante d'hypoellipticité.</u>

<u>Nécessaire</u> : Il suffit de remarquer que $\zeta \in V$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'existe un vecteur constant u_0 tel que $e^{-i\zeta x}u_0 = u$ soit solution de $\mathcal{P}(D)u = 0$ et ensuite de raisonner exactement comme dans le cas d'une seule équation.

<u>Suffisante</u> : On s'appuie sur un résultat récent de géométrie algébrique (LECH [4])

Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de polynômes. ζ étant un point de C^n, appelons $d(\zeta, P)$ (resp. $d(\zeta, \mathfrak{J})$) la distance de ζ à la variété des zéros de P (resp. de $\mathfrak{J}$) Alors il existe $R \in \mathfrak{J}$ et une constante strictement positive C telle que pour tout point ξ réel :

$$d(\xi , R) \geqslant C \; d(\xi , \mathfrak{J}) .$$

On va appliquer ce théorème à l'idéal $\mathfrak{J}$ engendré par les P_k ; remarquons d'abord que si $\mathcal{P}(D)u$ est indéfiniment dérivable, $P_k(D)u = \mathcal{Q}_k(D)\ \mathcal{P}_k(D)u$ est aussi indéfiniment dérivable et par suite $R(D)u$ est indéfiniment dérivable de même. Mais le théorème de Lech montre justement que R vérifie la condition (I) donc est hypoelliptique et u est indéfiniment dérivable.

<u>Cas des coefficients variables.</u> - L'hypoellipticité est connue pour une assez large classe d'opérateurs à coefficients variables (HÖRMANDER [2], MALGRANGE [5], MIZOHATA et HAMADA [6]). Mais la condition trouvée n'est pas suffisante, en particulier elle n'est pas stable pour les changements de variables. HÖRMANDER l'appelle hypoellipticité formelle.

Comme nous l'avons déjà dit, l'exposé que nous venons de donner dans le cas des coefficients constants suit la méthode de Malgrange. Pour le passage aux coefficients variables, le resultat essentiel est le suivant ([5] lemme III.1.3 p. 297).

Soit $P(x , D)$ un operateur différentiel tel que, pour tout a, $P(a , D)$ soit un opérateur à coefficients constants hypoelliptique et qu'existe un opérateur hypoelliptique à coefficients constants P_0 tel que pour tout a :

$$m \leq (1 + |P(a , \xi)|^2)/(1 + |P_0(\xi)|^2) \leq M$$

(m , M constantes > 0 pouvant dépendre de a) , un tel opérateur est dit formellement hypoelliptique. K étant un compact, appelons $\mathcal{H}_K^{P,s}$ le sous-espace fermé de $\mathcal{D}^{P,s}$ formé des distributions de cet espace dont le support est contenu dans K . Alors, quel que soit $s \geqslant 0$, tout point a possède un voisinage compact A tel que l'application $u \longrightarrow P(x , D)u$ soit un monomorphisme de $\mathcal{H}_A^{P_0,s}$ dans $\mathcal{H}_A^s$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (Lars). - On the theory of general partial differential operators, Acta Math., t. 94, 1955, p. 161-248.

[2] HÖRMANDER (Lars). - On interior regularity of solutions of partial differential equations, Comm. pure and appl. Math., t. 11, 1958.

[3] HÖRMANDER (Lars). - Differentiability properties of solutions of systems of differential equations, Arkiv för Mat., t. 3, 1954-58, p. 527-535.

[4] LECH (C.). - A metric result about the zeros of a complex polynomial ideals, Arkiv för Mat., t. 3, 1954-58, p. 543-554.

[5] MALGRANGE (Bernard). - Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 283-306.

[6] MIZOHATA (S.) et HAMADA (Y.). - Hypoellipticité, Proc. Japan Acad., t. 34, 1958, p. 482-486.

[7] SCHWARTZ (Laurent). - Ecuaciones diferenciales parciales elipticas. - Bogota, Universidad nacional de Colombia, 1956.

[8] SEIDENBERG (A.). - A new decision method for elementary algebra, Annals of Math., Series 2, t. 60, 1954, p. 365-374.