

SÉMINAIRE LELONG.

ANALYSE

PAUL J. KOOSIS

Les sous-espaces intérieurement compacts de $L_2(0, \infty)$

Séminaire Lelong. Analyse, tome 2 (1958-1959), exp. n° 9, p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=SL_1958-1959__2__A6_0

© Séminaire Lelong. Analyse

(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-

Séminaire d'ANALYSE
(P. LELONG)

17 février 1959

Année 1958/59

-:-:-

LES SOUS-ESPACES INTÉRIEUREMENT COMPACTS DE $L_2(0, \infty)$

par Paul J. KOOSIS

1. Notations et définitions.

Pour $f \in L_2(0, \infty)$ et $h > 0$, f^h désigne la fonction définie par

$$f^h(x) = \begin{cases} f(x+h), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

T_h est la transformation de $L_2(0, \infty)$ en lui-même déterminée par $T_h f = f^h$.

DÉFINITION. - Un sous-espace E de $L_2(0, \infty)$ est dit intérieurement compact si :

- 1° $T_h E \subset E$ pour tout $h > 0$,
- 2° Pour chaque $h > 0$, T_h est complètement continue comme application linéaire de E en lui-même.

Remarquons que les sous-espaces de $L_2(0, \infty)$ engendrés par des exponentielles réelles qui ont été étudiés par L. SCHWARTZ sont des exemples de sous-espaces intérieurement compacts.

Notre problème est de déterminer tous les sous-espaces intérieurement compacts de $L_2(0, \infty)$.

2. Résultats préliminaires.

LEMME (dû à P. LAX). - Les fonctions non-identiquement nulles appartenant à un sous-espace E intérieurement compact ne s'annulent sur aucun sous-intervalle, si petit qu'il soit, de $(0, \infty)$.

(Soit en effet $a > 0$, et soit E le sous-espace de E formé des g identiquement nulles sur $[0, a]$; alors $T_a : E \rightarrow E$ est une isométrie. E aura donc un nombre de dimensions fini, soit N . Si $f \in E$ et $f = 0$ sur $[0, 2a]$, ses translatées $f = f^0, f^1, \dots, f^N$ avec $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_N = a$

appartiendront à H ; il existera donc une relation linéaire entre elles. De cette relation, on déduit facilement par récurrence que $f = 0$ identiquement).

COROLLAIRE. - Soit E un sous-espace intérieurement compact de $L_2(0, \infty)$ et soit f_n une suite de fonctions de E . La convergence des f_n dans $L_2(0, \infty)$ équivaut à la convergence dans $L_2(0, a)$, $a > 0$.

COROLLAIRE. - Soit E un sous-espace intérieurement compact, et soit $a > 0$. Les restrictions des $f \in E$ à $[0, a]$ ne forment pas une famille totale dans $L_2(0, a)$.

DÉFINITION. - Soit $\Lambda = \{(\lambda_n, p_n + 1)\}$, les λ_n étant des nombres complexes avec $\Re \lambda_n > 0$, et les p_n étant des entiers ≥ 0 . Par $L_2(\Lambda)$ nous désignerons le sous-espace de $L_2(0, \infty)$ engendré par les monômes exponentiels $x^r e^{i\lambda_n x}$, $r = 0, \dots, p_n$; $n = 1, 2, \dots$

Des résultats ci-dessus on déduit, par les méthodes connues de la théorie des fonctions moyenne-périodiques, (voir KOOSIS [1]):

THÉORÈME 1. - Tout sous-espace intérieurement compact E est un $L_2(\Lambda)$ avec

$$\sum_1^{\infty} (p_n + 1) \Im \lambda_n / |\lambda_n|^2 < \infty.$$

Ensuite, une application facile du lemme de Riemann-Lebesgue donne :

THÉORÈME 2. - $L_2(\Lambda)$ avec $\Lambda = \{(\lambda_n, p_n + 1)\}$ n'est un sous-espace intérieurement compact que si $\Im \lambda_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$.

3. Caractérisation des $L_2(\Lambda)$ qui sont intérieurement compacts.

Soit $h > 0$, et soit T_h^* l'adjointe de la transformation T_h de $E = L_2(\Lambda)$ en lui-même. Si P est la projection de $L_2(0, \infty)$ sur E , T_h^* est donnée par la formule $T_h^* f = P f_h$, où $f_h(x) = f(x - h)$. Evidemment, T_h est complètement continue si et seulement si T_h^* l'est, mais on a plus : en effet, la formule ci-dessus pour T_h^* permet de l'étendre de façon qu'elle devienne une application de tout l'espace $L_2(0, \infty)$ dans E , et l'on voit que, pour que T_h soit complètement continue, il faut et il suffit que T_h^* ainsi étendue le soit. Les raisonnements qui suivent se rapportent non aux T_h , mais uniquement aux T_h^* , l'extension indiquée étant supposée faite. Ils reposent sur une formule particulière pour $\|T_h^* f\|$, qu'on peut obtenir par deux procédés différents ; soit par la théorie

des déterminants, (cf. KOOSIS [2]), soit en utilisant la théorie des fonctions analytiques, procédé plus simple (cf. LAX [3]). On a :

$$\|T_h^* f\| = \sup_{g \in L_2(0, \infty)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda h} f(\lambda) \widehat{g}(\lambda)}{B(\lambda)} d\lambda .$$

$$\|g\| = 1$$

La norme est prise dans l'espace $L_2(0, \infty)$; pour $g \in L_2(0, \infty)$, $\widehat{g}(\lambda)$ est sa transformée de Fourier

$$\widehat{g}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{i\lambda x} g(x) dx ;$$

et $B(\lambda)$ est le produit de Blaschke

$$B(\lambda) = \prod_1^{\infty} \left(\frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda - \bar{\lambda}_n} \cdot \frac{\bar{\lambda}_n}{\lambda_n} \right)^{p_n+1} .$$

L'expression de $B(\lambda)$ dans les deux travaux cités plus haut est incorrecte, le facteur $\bar{\lambda}_n/\lambda_n$ y étant omis.

Cet oubli n'influe pas sur les raisonnements faits.

On déduit de cette formule le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - $L_2(\Lambda)$ avec $\Lambda = \{(\lambda_n, p_n + 1)\}$ n'est intérieurement compact que si $|B(is + t)| \rightarrow 1$, $t \rightarrow \pm \infty$, uniformément pour $0 \leq s \leq c$, c arbitraire.

Supposons enfin un $L_2(\Lambda)$ avec Λ satisfaisant aux conclusions des théorèmes 2 et 3. Dans ces conditions, on montre que, dans la formule ci-dessus, on peut remplacer l'intégrale de $-\infty$ à ∞ par une intégrale prise le long d'un chemin empruntant une parallèle à l'axe réel d'ordonnée positive quelconque quand $x \rightarrow -\infty$, et quand $x \rightarrow +\infty$.

On a alors :

THÉORÈME 4. - Soit $E = L_2(\Lambda)$ avec $\Lambda = \{(\lambda_n, p_n + 1)\}$. E sera intérieurement compact dès que

a. $\bigcup \lambda_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$

b. $B(is + t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \pm \infty$, uniformément pour $0 \leq s \leq c$, c arbitraire.

REMARQUE. - Si (a) est satisfait, il faut et il suffit que (b) le soit aussi, pour qu'on ait :

$$\sum_1^{\infty} \frac{(p_n + 1) \Im \lambda_n}{|\lambda_n - t|^2} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \pm \infty.$$

On arrive ainsi au résultat principal :

THÉOREME 5. - Chaque sous-espace intérieurement compact de $L_2(0, \infty)$ est un $L_2(\Lambda)$ où $\Lambda = \{(\lambda_n, p_n + 1)\}$ remplit les conditions

1° $\Im \lambda_n \rightarrow \infty$;

2° $\sum_1^{\infty} \frac{(p_n + 1) \Im \lambda_n}{|\lambda_n - t|^2} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \pm \infty.$

D'autre part, chaque $L_2(\Lambda)$, avec un Λ satisfaisant à (1°) et à (2°), est intérieurement compact.

Remarquons que les conditions nécessaires et suffisantes pour que les transformations $T_h : E \rightarrow E$ soient complètement continues, pour tous les h assez grands, sont voisines : (1°) reste la même et (2°) est remplacée par

$$\limsup_{t \rightarrow \pm \infty} \sum_1^{\infty} \frac{(p_n + 1) \Im \lambda_n}{|\lambda_n - t|^2} < \infty.$$

Le fait que les deux conditions du théorème 5 sont suffisantes a été d'abord trouvé par l'auteur à partir de la formule donnée plus haut ; en revanche, P. LAX a, le premier, montré la nécessité de la deuxième, et cela par une méthode tout à fait différente. La nécessité de cette condition résulte de la même formule, comme l'auteur l'a établi postérieurement.

Remarquons enfin qu'il résulte du théorème 5 que la somme directe de deux sous-espaces intérieurement compacts est intérieurement compacte.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KOOSIS (Paul J.). - On functions which are mean periodic on a half-line, Comm. pure and appl. Math., t. 10, 1957, p. 133-149.
- [2] KOOSIS (Paul J.). - Interior compact spaces of functions on a half-line, Comm. pure and appl. Math., t. 10, 1957, p. 583-615.
- [3] LAX (P. D.). - Remarks on the preceding paper, Comm. pure and appl. Math., t. 10, 1957, p. 617-622.