Paul Malliavin

Fonctions de type exponentiel minimum ayant des zéros donnés

Séminaire Lelong. Analyse, tome 2 (1958-1959), exp. n° 8, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1958-1959__2__A5_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire d'ANALYSE
(P. LELONG)
Année 1958/59
-:-:-:-

3 février 1959

FONCTIONS DE TYPE EXPONENTIEL MINIMUM AYANT DES ZÉROS DONNÉS

par Paul MALLIAVIN

Etant donnée une fonction entière $f(z)$ de type exponentiel (c'est-à-dire telle que $\lim\sup |z|^{-1} \log|f(z)| < \infty$) quelle est "la plus petite croissance" que peut avoir cette fonction lorsque l'on se donne une partie de l'ensemble de ses zéros ?

Rappelons que la croissance des fonctions de type exponentiel $f(z)$ est étudiée en introduisant la fonction $h(\varphi) = \lim\sup r^{-1} \log|f(re^{i\varphi})|$. L'enveloppe de la droite $x \cos\varphi + y \sin\varphi - h(\varphi) = 0$ est une courbe convexe Γ, appelée indicateur diagramme de $f(z)$. Γ est l'enveloppe convexe des singularités de la transformée de Borel $F(Z) = \int_0^\infty f(z)\, e^{-Zz} dz$ de f. Si Γ' désigne une courbe homologue à Γ et située dans le complémentaire de Γ on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} F(Z)\, e^{zZ}\, dZ$$

Le problème que l'on étudiera est le suivant : Λ désignant une suite de nombres reels, déterminer la plus petite valeur que peut avoir la longueur de la projection de Γ sur l'axe imaginaire (bien entendu $f \neq 0$). CARLEMAN [1] a montré que

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geqslant 2\pi \limsup_{t = \infty} \frac{\lambda(t)}{\log t} ,$$

où $\lambda(t) = \sum \lambda^{-1}$, $\lambda < t$, $\lambda \in \Lambda$.

Cette inégalité n'est pas la meilleure possible. Posons $k_a(t) = \frac{a}{\pi} \log t - \lambda(t)$

Alors W. J. H. FUCHS [2] a montré que si $\lambda - \lambda' > h > 0$, $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, $\lambda \neq \lambda'$ et si $\liminf k_a(t) = -\infty$, alors $h(\frac{\pi}{2}) - h(-\frac{\pi}{2}) \geqslant 2a$.

Ce resultat est le meilleur possible pour les fonctions de type exponentiel holomorphes dans le demi-plan. Pour les fonctions entières cette évaluation n'est pas la meilleure possible. RUBEL a donné dans [7] une condition nécessaire et suffisante pour que, Λ étant une partie des entiers, toute fonction s'y annulant vérifie $h(\frac{\pi}{2}) - h(\frac{\pi}{2}) \geqq 2\pi$. Dans [6] on donne l'évaluation exacte de l'ordre de croissance cherché. On a les énoncés :

THÉORÈMES .

A. Si $f(z)$ est une fonction entière de type exponentiel telle que

$$|f(iy)| < Ae^{a|y|} \quad , \text{ avec } \quad f(\Lambda) = 0$$

Posons
$$\delta(k_a) = \limsup_{x \to \infty} \, [k_a(x) - \inf_{x' \geq x} k_a(x')]$$

Alors si
$$\delta(k_a) = \infty, \text{ on a } \quad f(z) \equiv 0 \ .$$

B. Inversement si $\delta(k_a) < \infty$, on peut construire $f(z) \not\equiv 0$ satisfaisant aux hypothèses de (A) .

On peut donner de (A) la forme plus générale suivante :

A'. Soit $f(z)$ fonction entière de type exponentiel telle que $f(\Lambda) = 0$,

$$\log |f(iy)\, f(-iy)| < 2\pi\, yq(y) + O(1) \quad \text{pour} \quad y > 0$$

où q est une fonction vérifiant $xq'(x) = O(1)$. Posons :

$$k_q(t) = \int_1^t q(u) \; u^{-1} \, du - \lambda(t)$$

Alors si $\delta(k_q) = \infty$, $f(z)$ est identiquement nul .

La preuve de A' dépend des lemmes suivants :

LEMME 1. - Soit $f(z)$ une fonction entière de type exponentiel, avec $f(0) = 1$. Posons

$$M(x) = x^{-1} \log |f(x)|$$

$$M_\alpha = M \times \alpha = \int M(\tfrac{x}{t})\, \alpha(t) \, \frac{dt}{t}$$

où α est une fonction bornée à support compact. Alors

$$M_\alpha(x) = O(1) \ .$$

Ce lemme s'obtient aisément en appliquant la formule de Carleman à $y > 0$, et à 2 demi-cercles $|z| = R$, $|z| = kR$ et en utilisant le fait que $M(x) < O(1)$.

La fonction sous-harmonique $\log|f(z)|$ peut être représentée dans le demi-plan $x > 0$ par la somme d'un potentiel de Green de masses négatives portées par les zéros et d'un potentiel de double couche porté par la frontière. Balayant ces masses sur l'axe $x > 0$, on obtient que $\log|f(x)|$ est égal à un potentiel de Green d'une masse portée par $x > 0$, soit

$$(1) \qquad M(x) = \frac{\log f(x)}{x} = \int_0^\infty \left[\log\left|\frac{1 + xt^{-1}}{1 - xt^{-1}}\right| - 2xt^{-1}\right] dm(t) + A$$

où A est une constante. L'expression explicite de m se calcule [5], on obtient

$$(2) \qquad dm = d\rho - d\lambda - d\sigma$$

où $d\sigma$ est une mesure positive obtenue en balayant les masses relatives aux zéros $\notin \Lambda$ et où $d\rho$ est la mesure balayée de la double couche portée par $x = 0$. On a $t\,d\rho = B * C$ où

$$(3) \qquad 2C(y) = y^{-1} \log|f(iy)\, f(-iy)| \quad , \quad B = kt^2(t^2 + 1)^{-2} \quad ,$$

k étant une constante numérique > 0. Une intégration par partie de (1) donne $M(x) = \text{V. P.} \int_0^\infty 1(xt^{-1})\, m(t)\, t^{-1}\, dt$ où

$$1(t) = t^{-1}\left[\log\left|\frac{1 - t}{1 + t}\right| + \frac{2t}{t^2 - 1}\right]$$

On a le lemme taubérien :

LEMME 2. - Soit $M = 1 * m$; si $M_\chi(x) = O(1)$, alors $m(x) = O(1)$

Pour obtenir ce lemme on calcule la transformée de Mellin L de 1 :

$$L(u) = \frac{u}{1 - u} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} u \quad ;$$

$L(u) \neq 0$ si u est imaginaire pur. On ne peut pas appliquer toutefois le théorème taubérien de Wiener, $\lim_{x=\infty} 1 * m$ n'existant pas. On procède directement, l'identité élémentaire $L(u)\, L(1 - u) = 1$ donne que $\tilde{1}(t) = \frac{2}{\pi} t^{-1}\, 1(t^{-1})$ est le noyau inverse de 1 d'où

$$m * \alpha * \alpha' = \tilde{1}_\alpha * M_{\alpha'} = O(1)$$

ce qui avec la condition $dm < d\rho$ entraine le lemme 2 ; l'énoncé A' résulte alors de l'évaluation suivante de

(4) $$\rho(t) = \int_1^t q(u)\, u^{-1}\, du + O(1)$$

En effet on aurait alors en vertu de (2) $m = k_q - \sigma + O(1)$ d'où d'après le lemme 2

(5) $$k_q = \sigma + O(1)$$

σ étant une fonction croissante, $\delta(k_q) < \infty$. (4) s'établit en remarquant que l'on a

$$\Delta = \rho(t) - \int_1^t q(u)\, u^{-1}\, du = \int_1^t \frac{dx}{x} \int_1^\infty [q(\frac{x}{a}) + q(ax) - 2q(x)]\, B(a)\, \frac{da}{a} + \rho\ (1)$$

ou en faisant le changement de variable $x = e^{\xi}$

$$O(1) + \Delta = \int_0^\tau \int_0^\infty [\gamma(\xi - \alpha) + \gamma(\xi + \alpha) - 2\gamma(\xi)]\ \beta(\alpha)\, d\alpha$$

D'où posant

$$\Gamma(\tau) = \int_0^\tau \gamma(\xi)\, d\xi$$

$$\Delta + O(1) = \int_0^{+\infty} [\Gamma(\xi - \alpha) + \Gamma(\xi + \alpha) - 2\ \Gamma(\xi)]\ \beta(\alpha)\, d\alpha < \max|\Gamma''| \int_0^\infty \alpha^2 \beta(\alpha)\, d\alpha$$

ce qui avec les hypothèses faites sur q en (A') établit (4) .

<u>Preuve de B.</u> - Remarquons d'abord que l'on a la réciproque de (5) suivante :

Si $\delta(k_a) < \infty$ on peut trouver une fonction $\sigma(x)$ croissante telle que $k_a = \sigma + O(1)$.

Pour construire une fonction entière il sera commode de remplacer le balayage du noyau de Green du demi-plan par celui du noyau de Weierstrass $\log |1 - z^2 t^{-2}|$. On obtient :

LEMME 3. - Soit $T_\theta = \log |1 + u^2 e^{2i\theta}|$ <u>alors</u> $D * T_{\frac{\pi}{2}} = T_0$ où $D = \frac{2}{\pi} \frac{u}{u^2 + 1}$

Cette factorisation résulte d'un simple calcul des transformées de Mellin. Le noyau D est moins commode que le noyau B introduit en (3) : il n'est pas sommable pour la mesure dt . Ceci nécessitera de raisonner d'abord sur des mesures à support compact, puis de passer à la limite.

Notons par Λ' la suite $\left\{ n\frac{a}{\pi} \right\}_{n=1}^{\infty}$, et par Λ'' une suite $\subset \Lambda'$ telle que $\sigma(x) = \lambda''(x) + O(1)$. On a

$$S(x) = \lambda'(x) - \lambda(x) - \lambda''(x) = O(1) \quad .$$

Soient Λ_R l'intersection de Λ avec l'intervalle $[0\ ,\ R]$ et Λ''_R la suite définie par $\lambda''_R(x) = \lambda''(x)$ pour $x \leqslant R$, et par $\lambda''_R(x) - \lambda''_R = \lambda'(x) - \lambda'(R)$ pour $x > R$. Alors $|S_R(x)| = |\lambda'(x) - \lambda_R(x) - \lambda''_R(x)| < K$ quel que soit R et $dS_R = 0$ si $x > R$. Posons $dn_R(t) = -\, td\ S_R(t)$ et soit $g_R = D * dn_R$. On a

$$g_R(u) = \int_0^{\infty} \frac{u}{t}\ \frac{t^2}{t^2+u^2}\ dn_R(t) = u\int_0^{\infty} S_R(t)d\,[\frac{t^2}{t^2+u^2}] - u\ S_R(R)$$

d'où $|g_R(u)| < 2\ K\ u$.

Posons

$$m_R(t) = \int_0^t\ [2Ku - g_R(u)]\ u^{-1}\ du\ ,$$

et soit $f_R(z)$ la fonction entière définie par le produit de Weierstrass

$$\log|f_R(z)| = \int_0^{\infty} |\log\ 1 + z^2\ t^{-2}|\ d[m_R(t)] + \int_0^{\infty} \log|1 - z^2\ t^{-2}|\ td(\lambda_R(t) + \lambda''_R(t))\ .$$

En utilisant le fait que g_R est la balayée sur l'axe imaginaire de $td(\lambda' - \lambda''_R - \lambda_R)$, on a :

$$\log|f_R(iy)| < \int \log|1 + y^2\ t^{-2}|\ td\ \lambda'_R(t) + 2\ \log|y|$$

Le premier produit n'est autre que $\log|\sin \frac{a}{\pi}\, y| - \log\ |y|$ d'où

$$\log|f_R(iy)| < \log\ \sin \frac{a}{\pi}\, y + \log|y|\ .$$

Faisons tendre $R \to \infty$; les $f_R(z)$ forment une famille normale dont on extrait une suite convergeant vers $f(z)$ qui vérifie $|f(iy)| < A\ e^{a|y|}(|y| + 1)$.

En ajoutant un point α à Λ , ce qui ne change pas le fait que $\delta(k_a) < \infty$, et considérant $f_1(z) = (z - \alpha)^{-1}\ f(z)$ on obtient la fonction cherchée.

Application : Théorème de Müntz pour les bandes. - Soit Λ une suite de nombres réels donnés, alors dans quel cas $e^{-\lambda Z}$ est complète pour la convergeance uniforme sur tout compact dans l'eapace des fonctions, holomorphes dans la bande $|\mathrm{Im}\ Z| < a$, continues sur sa fermeture. Ce problème a été envisagé par CARLEMAN [1] J. P. KAHANE [3] , LEONT'EV [4] .

On a la condition nécessaire et suffisante :
$e^{-\lambda Z}$ est complète si et seulement si $\delta(k_a) = \infty$.

La preuve dépend des remarques suivantes : si $e^{-\lambda Z}$ n'est pas complète il existe une mesure à support compact μ, orthogonale aux $e^{-\lambda Z}$. Posant $f(z) = \int e^{-z Z} d\mu(Z)$ on obtient une fonction satisfaisant aux hypothèses de (A) donc nulle si $\delta(k_a) = \infty$. μ est alors orthogonale à toutes les exponentielles donc à toutes les fonctions holomorphes. Inversement si $\delta(k_a) < \infty$ on peut construire une fonction $f(z)$ vérifiant $f(\Lambda) = 0$ et $|f(iy)| < \frac{e^{a|y|}}{y^2 + 1}$ (il suffit d'ajouter les points $+1$ et -1 à Λ et de diviser par $z^2 - 1$). La transformée de Borel $F(Z)$ de $f(z)$ est continue sur les droites $|\text{Im } Z| = a$. Soit R un rectangle dont deux côtes sont portés par ces droites $|\text{Im } Z| = a$ et qui contient l'indicateur diagramme, alors la restriction à $\dot{R}$ de $F(Z)\, dZ$ est une mesure orthogonale à $e^{-\lambda Z}$.

REMARQUE. - Si l'on considère l'espace de Banach des fonctions holomorphes dans $|\text{Im } Z| < a$, nulles à l'infini, le problème de fermeture de $e^{-\lambda Z}$ est différent. On a l'énoncé (dû à W. J. H. FUCHS) :

$e^{-\lambda Z}$ <u>est complète si et seulement si</u> $\liminf k_a(x) = -\infty$

La raison de cette simplification est que l'on doit considérer des fonctions f holomorphes dans le demi-plan au lieu de fonctions entières et que pour ces fonctions le lemme 1 ne vaut plus.

Si $a = 0$, la fermeture pour la convergence compacte et pour la convergence uniforme coïncident, elles ont lieu si et seulement si $\lim \lambda(x) = +\infty$. On retrouve ainsi un résultat connu [cf L. SCHWARTZ [8]].

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARLEMAN (Torsten). Über die Approximation der analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen, Arkiv för Mat., Astr. och Fys., t. 17, 1922-23, n° 9, p. 1-30.

[2] FUCHS (W. H. J.). - A generalization of the Carlson's theorem, J. London math. Soc., t. 21, 1946, p. 106-110.

[3] KAHANE (Jean-Pierre). - Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 5, 1953-54, p. 39-130.

[4] LEONT'EV (A. F.). - Rjady polinomov Dirikle i ikh obobščnija (Séries de polynômes de Dirichlet et leurs applications), Trudy mat. Inst. imeni V. A. Steklova, t. 39, 1951, 214 p.

[5] MALLIAVIN (Paul). - Sur la croissance radiale d'une fonction méromorphe, Illinois J. Math., t. 1, 1957, p. 259-296.

[6] MALLIAVIN (Paul) and RUBEL (L. A.). - On entire function of exponential minimum type with given zeros, Illinois J. Math., 1959 (à paraître).

[7] RUBEL (L. A.). - Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions, Trans. Amer. math. Soc., t. 83, 1956, p. 417-429.

[8] SCHWARTZ (Laurent). - Approximation d'une fonction quelconque par des sommes d'exponentielle imaginaires, Ann. Fac. Sc. Univ. Toulouse, Série 4, t. 6, 1943, p. 111-176 .