SÉMINAIRE LELONG.
ANALYSE

JEAN-PIERRE KAHANE

Fonctions qui opèrent dans les algèbres de transformées de Fourier de suites, de fonctions ou de mesures sommables

Séminaire Lelong. Analyse, tome 2 (1958-1959), exp. nº 5, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1958-1959__2__A2_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire d'ANALYSE
(P. LELONG)
Année 1958/59
-:-:-:-

13 janvier 1959

FONCTIONS QUI OPÈRENT DANS LES ALGÈBRES DE TRANSFORMÉES DE FOURIER DE SUITES, DE FONCTIONS OU DE MESURES SOMMABLES

par Jean-Pierre KAHANE

1. Définitions et notations.

On désigne :

- par T , R , Z , le cercle, la droite et la suite des entiers,
- par $A(T)$ l'algèbre des fonctions (à valeurs complexes) définies sur T , dont la série de Fourier est absolument convergente,
- par $A(Z)$ l'algèbre des coefficients de Fourier (complexes) des fonctions sommables sur T ,
- par $A(R)$ l'algèbre des transformées de Fourier des fonctions sommables sur R
- par $B(Z)$ l'algèbre des suites de coefficients de Fourier-Stieltjes des mesures sur T ,
- par $B(R)$ l'algèbre des transformées de Fourier-Stieltjes des mesures bornées ("sommables") sur R ,
- par $A_r(T)$ etc., $B_r(Z)$ etc. l'ensemble des éléments réels de $A(T)$ etc., $B(Z)$ etc.

Les algèbres ci-dessus sont des algèbres normées complètes, quand on prend pour normes, respectivement, la somme des modules des coefficients de Fourier, la norme L^1 de la cotransformée de Fourier, ou la masse totale de la cotransformée de Fourier.

On dit qu'une fonction F (à valeur complexe), définie sur une partie D du plan complexe, "opère" dans $A(T)$ etc. si, pour chaque $f \in A(T)$ etc., à valeur dans D , $F(f) \in A(T)$.

2. Conditions suffisantes pour que F opère.

Cas de $A(T)$. - Il suffit que F soit analytique sur D (théorème de Wiener-Lévy [8]). Il suffit même que $F(x + iy)$ soit analytique en x et y sur D (ŠILOV, ARENS-CALDERON, WOELBROECK [1]).

Cas de $A(R)$. - Mêmes conditions, avec $0 \in D$ et $F(0) = 0$.

Cas de $A(Z)$. - Il suffit que $F(0) = 0$ et que F soit analytique en 0 (très facile).

Cas de $B(R)$ et $B(Z)$.- Il suffit que $F(x + iy)$ soit une fonction entière en x et y (immédiat).

Dans [8], P. LÉVY pose le problème de caractériser les fonctions qui opèrent. On a tenté d'abord d'améliorer les résultats ci-dessus, quitte à ne faire opérer F que sur des sous-classes de $A(T)$ etc. [3], [9]). Puis on a tenté d'obtenir des conditions nécessaires.

3. Conditions nécessaires connues avant juillet 1958.

Dans [3], [4], [10], [11] on prouve notamment que $F(x) = |x|$ n'opère pas dans $A(T)$, $A(R)$, $A(Z)$, et que toute fonction F opérant dans $A(Z)$ est lipschitzienne au voisinage de l'origine.

Dans [5] on prouve que la condition d'analycité ne peut être remplacée, dans le théorème de Wiener-Lévy, par la condition d'appartenance à une classe non-analytique de fonctions indéfiniment dérivables. On prouve aussi la proposition :

(P) : Si F est une fonction périodique de variable réelle, et si pour chaque $f \in A_r(T)$, les normes $\|F(f + t)\|$ sont uniformément bornées, F est analytique.

Cette proposition, un peu modifiée, a été utile pour la solution définitive du problème de Paul LÉVY.

4. Caractérisation des F opérant dans $A(T)$.

Suivant une idée de HELSON (théorème de Baire), KATZNELSON a montré [7] que toute F définie sur un intervalle ouvert réel I, et opérant dans $A(T)$, est analytique sur I. Plus généralement [2], toute F définie sur un compact convexe D du plan, et opérant dans $A(T)$, est analytique sur D. Nous donnons la démonstration du théorème de Katznelson sous la forme simplifiée, et généralisable à $F(x + iy)$, que lui a donnée RUDIN.

On s'appuie sur la proposition, que nous vérifierons ensuite,

(P') : Si G est une fonction 2π-périodique de variable réelle, et que, pour $\|f\| \leq 2\pi$, $\|G(f)\|$ est uniformément borné, G est analytique.

On peut supposer que I contient 0, et que $F(0) = 0$.

Soit A' l'idéal des fonctions $\in A_r(T)$, nulles en 0. F définit un operateur $f \to F(f)$ de A' dans A', qui est de la première classe de Baire ; en effet,

$$F(f(t)) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(f)\, e^{int}$$

l'opérateur $f \to a(f)$ étant visiblement (par formule de Fourier) continu. Donc l'opérateur F admet un point de continuité dans A', soit f_0 ; il est borné dans une boule $\mathcal{B}(f_0 , \varepsilon)$ de A'. Il existe une $f_1 \in \mathcal{B}(f_0 , \varepsilon/2)$ qui s'annule sur un intervalle J (assez voisin de 0) ne contenant pas 0. Soit $A_r(J)$ l'idéal de $A_r(T)$ constitué des fonctions à support dans J ; si $\varphi \in A_r(J)$, $F(\varphi) = F(f_1 + \varphi) - F(f_1)$, donc F est un opérateur borné dans la boule $\mathcal{B}(0 , \varepsilon/2)$ de $A_r(J)$. On en déduit que F est borné dans une boule $\mathcal{B}(0 , \varepsilon')$ de $A_r(T)$; en posant $F(\frac{\varepsilon}{10} \sin x) = G(x)$ et en appliquant (P') on voit que F est analytique en 0.

On verra plus loin la démonstration de (P').

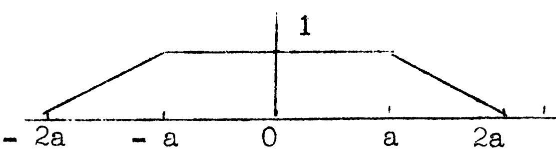
5. Caractérisation des F opérant dans $A(Z)$.

Dans [2] est donnée une nouvelle demonstration du théorème précédent évitant le recours au theorème de Baire et s'appliquant à $A(Z)$. On montre que toute F définie sur l'axe réel au voisinage de 0 et opérant dans $A(Z)$ est analytique en 0 (évidemment $F(0) = 0$). Plus généralement, toute F définie au voisinage de 0 dans un angle $\theta_1 \leq \arg (x + iy) \leq \theta_2$ et opérant dans $A(Z)$ est analytique en x et y au voisinage de 0.

On s'appuie sur la proposition suivante, où $C_r(Z)$ désigne l'algèbre obtenue en adjoignant une unité à $A_r(Z)$, c'est-à-dire $f \in C_r(Z) \Leftrightarrow f = f_1 + t$ avec $f_1 \in A_r(Z)$, t constante réelle ($C_r(Z)$ est sous-algèbre de $B_r(Z)$) :

(P") : Si G est une fonction périodique de variable réelle telle que, pour $f \in C_r(Z)$ et $\|f\| \leq 1$, on a $G(f) \in C_r(Z)$ et $\|G(f)\|$ uniformément borné, G est analytique.

Quitte à poser $F(\frac{\varepsilon}{10} \sin x) = G(x)$, il suffit de montrer que pour un $\varepsilon > 0$, l'opérateur $f \to F(f)$ est borné dans la boule $\mathcal{B}(0 , \varepsilon)$ de $C_r(Z)$. S'il n'en était pas ainsi, il existerait une suite $f_j \in C_r(Z)$, telle que $\|f_j\| < 2^{-j}$ et $\|F(f_j)\| > 1$. Désignons par V_a (a : entier) la suite linéaire sur les intervalles $(-\infty , -2a)$, $(-2a , -a)$, $(-a , a)$, $(a , 2a)$, $(2a , \infty)$, égale à 0 en $2a$ et $-2a$, et à 1 en a et $-a$; on a les propriétés suivantes (de LA VALLÉE POUSSIN)



1° pour tout $f \in B(Z)$, $\varliminf_{a \to \infty} \|V_a f\| \geq \|$ d'après HELLY)

2° pour tout $f \in B(Z)$, $\|V_a f\| \leq 3 \|f\|$ (car $\|V_a\| \leq 3$).

D'après 1°, on peut choisir a_j de façon que $\|V_{a_j} F(f_j)\| > \frac{1}{2}$. Or

$$V_{a_j} F(f_j) = V_{a_j} F(V_{2a_j} f_j)$$

D'après 2° , $\|V_{2a_j} f_j\| \leqslant 3.2^{-j}$ et $\|F(V_{2a_j} f_j)\| > \frac{1}{6}$. On translate $V_{2a_j} f_j$ sur un intervalle $[\alpha_j , \beta_j]$ tel que $\alpha_{j+1} > 2\beta_j$; soit φ_j la suite obtenue : on a encore $\|\varphi_j\| \leqslant 3.2^{-j}$ et $\|F(\varphi_j)\| > \frac{1}{6}$, $\varphi_j \in A_r(Z)$. La considération de $\varphi = \sum_1^\infty \varphi_j$ et de $F(\varphi) = \sum_1^\infty F(\varphi_j)$ aboutit à une contradiction et le résultat est demontré, sous réserve de la vérification de (P") .

5. Caractérisation des F opérant dans B(Z) .

Dans [2] on montre que toute F définie sur la droite réelle et opérant dans B(Z) est une fonction entière. De même, toute F définie dans le plan et opérant dans B(Z) est une fonction entière de x et de y .

La démonstration s'appuie sur la proposition

(P"') : Si G est périodique, et que l'opérateur $f \to G(f)$ de $B_r(Z)$ dans B(Z) soit borné sur toute boule $\|f\| \leqslant r$, G est entière.

Montrons que si F opère dans $B_r(Z)$ l'opérateur $f \to F(f)$ est borné sur toute boule de $B_r(Z)$. Sinon en effet, il existe un r et des $f_j \in B_r(Z)$ tels que $\|f_j\| < r$ et $\|F(f_j)\| \to \infty$. Quitte à remplacer f_j par $V_{2a_j} f_j$ comme dans le cas de A(Z) , on peut supposer f_j à support fini, c'est-à-dire

$$\hat{f}_j(t) = \sum_{-N_j}^{N_j} a_n e^{int} . \text{ On pose}$$

$$\hat{\varphi}_j(t) = \sum_{-N_j}^{N_j} a_n e^{i(m_j n + \lambda_j)t}$$

et on construira les m_j et λ_j de façon qu'existe une suite $\varphi \in B_r(Z)$ égale à φ_j sur la suite d'indices $S_j = \{nm_j + \lambda_j\}$, $(-2N_j \leqslant n \leqslant 2N_j)$; alors la restriction à S_j de $F(\varphi)$ est $F(\varphi_j)$, et le fait que $\|F(\varphi_j)\| \to \infty$ entraine $F(\varphi) \notin B(Z)$.

Pour construire les m_j et les λ_j , on raisonne par dualité : on les choisit tels que, pour tous les polynômes $\hat{Q} = \sum \hat{Q}_j$ (Q_j à support dans S_j) , on ait équivalence des normes $\|Q\|_\infty$ et $\sum \|Q_j\|_\infty$. Cela est possible de façon élémentaire. Alors les φ_j définissent une forme linéaire sur l'espace des Q (à cause de la 2e norme) prolongeable en une forme linéaire sur l'espace des fonctions continues (à cause de la 1^{re}), ce qui définit φ. En posant $F(r \sin x) = G(x)$, on voit d'après (P''') (qui reste à démontrer) que F est une fonction entière.

Comme corollaire, on a un résultat de SCHREIDER : quel que soit z complexe, il existe un caractère de l'algèbre $B(Z)$ qui applique au moins un elément de $B_r(Z)$ en z (sinon, $F(x) = (x - z)^{-1}$ opèrerait).

On en déduit facilement que, si $F(x + iy)$, définie dans le plan, opère dans l'algèbre de Gelfand de $B(Z)$, F est une fonction entière de $x + iy$.

6. Démonstration de (P').

On se borne à la démonstration de (P') (pour celles de (P'') et (P''') , voir [2] .

Si G est 2π-périodique, on a $G(x) = \sum \gamma_n e^{inx}$, $\sum |\gamma_n| < \infty$, il suffit de montrer qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma_n < e^{-\varepsilon n}$ pour tout n.
Pour tout t, on a

$$\gamma_n e^{inf(t)} = \int G(f(t) + x) e^{inx} dx$$

et si $\|G(f + x)\| < B$, pour tout x, il est aisé de voir que

$$|\gamma_n| \|e^{inf}\| < B .$$

Il suffit de montrer que $\sup_{\|f\| \leq r} \|e^{if}\| = e^r$ (on a évidemment $\leqslant$).

On utilise le lemme suivant : quand $\lambda \to \infty$ par valeurs entières,

$$\|h(t)\ g(\lambda t)\| \to \|h\|\ \|g\| .$$

On peut ainsi, quel que soit N donné, construire $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ de façon que, si $f(x) = \frac{r}{N}(\cos \lambda_1 x + \dots + \cos \lambda_N x)$, on ait $\|e^{if}\|$ arbitrairement voisin de $\left\|e^{i\frac{r}{N}\cos x}\right\|^N$. Or, pour $\alpha > 0$,

$$\|e^{i\alpha \cos x}\| = \|1 + i\alpha + \dots\| > 1 + \alpha - \|\dots\| > 1 + \alpha - O(\alpha)$$

$(\alpha \to 0)$ donc $\left\|e^{i\frac{r}{N}\cos x}\right\|^N$ est, par choix de N, arbitrairement voisin de e^r.

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARENS (R.) and CALDERON (A.P.). - Analytic functions of several Banach algebra elements, Annals of Math., Series 2, t. 62, 1955, p. 204-216.

[2] HELSON (H.) et KAHANE (J.P.) . - Sur les fonctions opérant dans les algèbres de transformées de Fourier de suites ou de fonctions sommables, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 626-628.

[3] KAHANE (Jean-Pierre). - Sur les fonctions sommes de séries trigonométriques absolument convergentes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 240, 1955, p. 36-37.

[4] KAHANE (Jean-Pierre). - Sur un problème de Littlewood, Kon. nederl. Akad. Wetensch., Proc. , Series A : Math. Sc. , t. 60, 1957, p. 268-271.

[5] KAHANE (Jean-Pierre) . - Sur un théorème de Wiener-Lévy, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 1949-1951.

[6] KAHANE (J.-P) et RUDIN (W.). - Caractérisation des fonctions qui opèrent sur les coefficients de Fourier-Stieltjes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 773-775.

[7] KATZNELSON (Yitzhak). - Sur les fonctions opérant sur l'algèbre des séries de Fourier convergentes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 404-406.

[8] LÉVY (Paul) . - Sur la convergence absolue des séries de Fourier, Comp. Math., t. 1, 1934-35, p. 1-14.

[9] MARCINKIEWICZ (J.) . - Sur la convergence absolue des séries de Fourier, Math. Cluj, t. 16, 1940, p. 66-73.

[10] RUDIN (Walter). - Non-analytic functions of absolutely convergent Fourier series, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 41, 1955, p. 238-240.

[11] RUDIN (Walter). - Transformation des coefficients de Fourier, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, p. 638-640.