Paul Malliavin

Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts

Séminaire Lelong. Analyse, tome 2 (1958-1959), exp. n° 17, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1958-1959__2__A12_0>

IMPOSSIBILITÉ DE LA SYNTHÈSE SPECTRALE SUR LES GROUPES ABÉLIENS NON COMPACTS

par Paul MALLIAVIN

Soit G un groupe abélien localement compact, $\mathcal{L}_1(G)$ l'espace des fonctions sommables pour la mesure de Haar muni du produit de composition ; $\mathcal{L}_1(G)$ est alors une algèbre de Banach.

On dit que la synthèse spectrale est possible sur G si tout idéal fermé de $\mathcal{L}_1(G)$ est l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent. Si G est compact, la synthèse spectrale résulte du théorème de Peter-Weyl. On sait d'autre part que la synthèse spectrale n'est pas toujours possible : cela résulte d'un contre-exemple de L. Schwartz [6] donné pour R_3. On se propose ici d'étendre ce resultat à un groupe abélien non compact arbitraire.

G' notera le groupe dual de G, $\langle g , g' \rangle$ l'application de $G \times G'$ dans les nombres complexes du module 1 définie par les caractères. Si $f \in \mathcal{L}_1(G)$ alors sa transformée de Fourier sera notée $f'(g') = \int f(g) \langle g , g' \rangle \, dg$. On notera de même si h est une fonction définie sur G' sa transformée de Fourier sur G par $h'(g) = \int h(g') \langle -g , g' \rangle \, dg'$. Si $k \in \mathcal{L}_1(G')$ on notera par

$$||k||'_p = ||k'||_p \qquad (p = 1 , + \infty)$$

Le spectre $\sigma(f)$ de $f \in \mathcal{L}_1(G)$ est la partie fermée de G' définie par $\sigma(f) = \overline{\{g' \in G' ; \; f'(g') \neq 0\}}$. Si $h \in \mathcal{L}_\infty(G)$ on appelle $h^\perp$ l'ensemble des $f \in \mathcal{L}_1(G)$ tels que $f * h = 0$. Le spectre $\sigma(h)$ de h est défini par : complémentaire de $\sigma(h) = \bigcup_{f \in h^\perp} \sigma^0(f)$.

En transformant par dualité la définition de la synthèse spectrale on obtient l'énoncé bien connu.

(P) <u>Si la synthèse spectrale est possible sur</u> G, <u>alors</u> $a \in \mathcal{L}_1(G)$ $b \in \mathcal{L}_\infty(G)$, $\sigma(b) \subset a'^{-1}(0)$, <u>entraînent</u> $\int_G a\bar{b} = 0$.

Les contre-exemples construits mettront cette dernière propriété en défaut.

1. Nous allons ramener le problème au cas de groupes discrets.

1.1. Supposons que G contienne un sous-groupe discret K et que la synthèse spectrale ne soit pas possible sur K, alors elle ne l'est pas sur G.

En effet notons par i l'injection de $K \longrightarrow G$, alors par dualité $i' : G' \longrightarrow K'$ l'application étant sur.

A tout $a \in \mathcal{L}_1(K)$, associons la mesure $d\mu_a$ composée de masses ponctuelles qui est l'image par i de la mesure a. Choisissons a et $b \in \mathcal{L}_\infty(K)$ mettant la proposition (P) en défaut. Soit W un voisinage symétrique de zéro dans G tel que $(2W) \cap K = 0$. Soit f la fonction caractéristique de W. Alors on a

$$f * d\mu_a = \alpha \in \mathcal{L}_1(G) , \quad f * d\mu_b = \beta \in \mathcal{L}_\infty(G) .$$

$$\int_G \alpha \bar{\beta} = (f * f(0)) \int_K a\bar{b} = (\text{mesure } W) \int_K a\bar{b} = 0 .$$

D'autre part on voit aisément que $\alpha'^{-1}(0) \supset i'^{-1}(a'^{-1}(0))$, et que $\sigma(\beta) \subset i'^{-1}(\sigma(b))$. Si a et b mettent la proposition (P) en défaut il en sera alors de même de α et β.

1.2. Soit G un groupe abélien localement compact, H un sous-groupe compact de G, alors si la synthèse spectrale est impossible sur $M = G/H$, elle est impossible sur G.

En effet si p désigne l'homorphisme de G sur M, alors si $\ell \in \mathcal{L}_1(M)$, $\ell(p(g)) \in \mathcal{L}_1(G)$, on pourra ainsi identifier $\mathcal{L}_1(M)$ à une sous-algèbre de $\mathcal{L}_1(G)$. Définissons une projection de $\mathcal{L}_1(G)$ sur $\mathcal{L}_1(M)$ en posant

$$f^0_{(g)} = \int_H f(g+h)dh .$$

Alors si $k \in \mathcal{L}_1(M)$, $k * f = k * f^0$ quel que soit $f \in \mathcal{L}_1(G)$.

Cette formule implique que tout idéal de $\mathcal{L}_1(M)$ est un idéal dans $\mathcal{L}_1(G)$. Par suite si la syntèse est impossible dans $\mathcal{L}_1(M)$, elle le sera dans $\mathcal{L}_1(G)$.

1.3. Si la synthèse spectrale est impossible sur les groupes discrets infinis, elle le sera également sur tout groupe abélien non compact.

Ceci resulte de 1.1 et de 1.2 et du résultat suivant de Pontrjagin [5] : pour tout groupe abélien localement compact G, on peut trouver un sous-groupe

G_1, tel que G/G_1 soit discret, G_1 étant la somme directe d'un espace euclidien R_n et d'un groupe compact K (Cf. [5], p. 161).

LEMME. - Soit G un groupe discret, $\varphi(g') \in \mathcal{L}_\infty(G')$ telle que $\varphi(g')$ soit réelle et que $\|\varphi\|_1' < \infty$. Alors si

$$I = \int_0^{+\infty} \|e^{iu\varphi}\|_\infty' \, u\,du < \infty ,$$

la synthèse spectrale est impossible sur G.

Preuve : Notons par F l'espace des fonctions $h(t)$ réelles telles que $\hat{h}(u) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-itu} dt$ vérifie $\hat{h} \in \mathcal{L}_1(R)$ alors on a

$$h(\varphi(g')) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu\varphi(g')} \hat{h}(u) du$$

quel que soit $g' \in G'$.

Soit $\mathcal{E}_1$ l'espace des distributions à support compact, dérivées premières de mesures. Alors, si $T \in \mathcal{E}_1$, on peut construire une suite $h_n \in F$ telle que h_n converge vers T dans $\mathcal{E}_1$, $|\hat{h}_n(u)| < B(|u| + 1)$. Alors

$$\|h_n(\varphi)\|_\infty' < 2B(I + 1) .$$

Soit $g \in G$, après une interversion d'intégration légitime puisque G' est compact, on a

$$\lim_{n=\infty} (h_n(\varphi))' (g) = \lim_{n=\infty} \int \hat{h}_n(u) du \int e^{iu\varphi(g')} \langle -g, g' \rangle dg' ,$$

la seconde intégrale étant majorée par $\|e^{iu\varphi}\|_\infty'$ le second membre converge, par suite $(h_n(\varphi))'$ converge faiblement dans $\mathcal{L}_\infty(G)$ vers une fonction b.

Notons E le support de T, alors h_n a pu être pris ayant son support dans E_ε, $\sigma(h_n) \subset \varphi^{-1}(E_\varepsilon)$ et h_n convergeant faiblement vers b, $\sigma(b) \subset \varphi^{-1}(E)$.

Calculons, α étant un nombre réel fixé ci-dessous,

$$\int_G (\varphi - \alpha)' \bar{b} = \lim_{n=\infty} \int_G (\varphi - \alpha)' \overline{(h_n(\varphi))'} = \lim \int_{G'} (\varphi - \alpha)\, h_n(\varphi)$$

$$= \lim_n \int (\xi - \alpha)\, h_n(\xi)\, d\mu(\xi)$$

où $d\mu$ est l'image de la mesure de Haar sur G' par l'application $g' \to \varphi(g')$. La transformée de Fourier de $d\mu$ s'écrit $(e^{iu\varphi})'(0)$; par suite $\hat{d\mu}(\xi) = m(\xi)d\xi$, où $\int d\mu = \int m(\xi)d\xi = 1$. On prendra α tel que $m(\alpha) \neq 0$. On a

$$\int(\varphi - \alpha)' \,\bar{b} = \langle(\xi - \alpha)\, m(\xi) \,,\, T\rangle .$$

D'autre part, prenons pour T la dérivée de la mesure de Dirac placée en α, le second membre est $-m(\alpha) \neq 0$. Prenant $a = (\varphi - \alpha)'$, on a mis en défaut la proposition (P).

J.-P. KAHANE et KATZNELSON dans les travaux résumés dans [2] avaient pris un point de vue dual en minorant la croissance à l'infini de fonctions de la forme

$$\| \exp[iu\varphi(g')] \|'_1 .$$

3. Nous allons chercher des développements, g étant fixé, de $\exp(iv \operatorname{Im}\langle g , g'\rangle)$.

Nous noterons par $r(g)$ l'ordre de g c'est-à-dire le plus petit entier positif tel que $ng = 0$ $(2 \leq r(g) \leq +\infty)$. On a

3.1. $$\exp(iv \operatorname{Im}\langle g , g'\rangle) = \sum_{m=1}^{r} P_{m,r}(v) \langle mg , g'\rangle .$$

En effet, notons par Γ le sous-groupe engendré par g. Developpons en "série" de Fourier sur Γ' la fonction $\exp(iv \operatorname{Im}\langle g , \gamma'\rangle) = h(\gamma')$. Cette fonction s'écrira $\sum_{m=1}^{r} P_m(v) \langle mg , \gamma'\rangle$, les P_m étant donnés par les formules de Fourier :

$$P_m(v) = \frac{1}{r} \sum_{\gamma' \in \Gamma'} \langle -mg , \gamma'\rangle \exp(iv \operatorname{Im}\langle g , \gamma'\rangle) .$$

Γ' est le groupe des racines r-ièmes de l'unité d'où

$$r\, P_m(v) = \sum_{\ell=1}^{r} \exp\left(iv \sin\frac{2\pi\ell}{r}\right) \exp\left(-\frac{2i\pi m\ell}{r}\right) .$$

En particulier $|P_m(v)| < 1$ quel que soit v réel.

Utilisant l'identité $\exp(iv \sin\lambda) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{ni\lambda} J_n(v)$, où J_n est la fonction de Bessel d'ordre n, et intervertissant l'ordre des sommations, on obtient :

3.2. $$P_{m,r}(v) = \sum_{s \equiv m} J_s(v) .$$

La congruence $s \equiv m$ étant prise modulo r. De 3.2 et de propriétés classiques des fonctions de Bes el, on déduit que :

Etant donné $\eta > 0$, $R > 0$, on peut déterminer d tel que

3.3. $\sum_{|m|>d} |P_{m,r}(v)| < \eta$ quels que soient v , $|v| < R$, et r , $2 \leq r \leq +\infty$.

(L'inégalité $|m| > d$ signifiant que la classe d'équivalence modulo r de m n'a aucun point dans le segment $[-d , +d]$) .

On peut trouver $\delta > 0$ et $\rho < 1$ tels que

3.4. $|P_{m,r}(v)| < \rho$ quels que soient m , v , $\delta < v < 2\delta$, et r , $2 \leq r \leq +\infty$.

4. Nous noterons par $r(G) = \sup r(g)$ et nous distinguerons les trois cas suivants :

$r(G) < +\infty$,

$r(G) = +\infty$ tandis que $r(g) < +\infty$ pour tout $g \in G$.

Il existe $g_0 \in G$ tel que $r(g_0) = +\infty$.

Un système $g_1 \ldots g_N$ est linéairement indépendant si quels que soient les entiers $n_k \sum_1^N n_k g_k = 0$ entraîne $n_k g_k = 0$.

4.1. __Si__ $r(G) < +\infty$, __alors__ G __possède une infinité d'éléments linéairement indépendants.__

Sinon il existerait q éléments linéairement indépendants g , g_2 , g_q tels que notant par $H_p = \left\{ g \in G \ ; \ pg = \sum_1^q n_k g_k \right\}$ alors $\bigcup_{p=1}^{r} H_p = G$. H_1 comporte au plus r^q éléments ; montrons que H_s fini $s < t$ entraîne H_t fini. Sinon il existerait une infinité d'éléments g_m de H_t correspondant aux mêmes entiers n_k dans le second membre. La différence $g_{m_0} - g_m$ serait telle que $t(g_{m_0} - g_m) = 0$, donc $g_{m_0} - g_m \in \bigcup_{s<t} H_s$ qui comporterait ainsi une infinité d'éléments ; donc chaque H_t , et par suite G , serait fini, ce qui est impossible, G n'étant pas compact.

4.2. __Si__ $r(G) < +\infty$, __la synthèse spectrale est impossible sur__ G .

PREUVE. - Soit g_k un système infini linéairement indépendant d'éléments de G . Posons

$$\varphi(g') = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \operatorname{Im} \langle g_k , g' \rangle \ .$$

Alors

$$e^{iu\varphi(g')} = \prod \sum P_{m,r_k} (k^{-2}u) \langle mg_k , g' \rangle$$

$$= \sum_{\theta} \langle \sum_k \theta(k) g_k , g' \rangle \prod P_{\theta(k),r_k} (k^{-2}u)$$

où $\Theta(k)$ est une fonction à valeurs entières nulles sauf un nombre fini de valeurs et $0 \leqslant \Theta(k) < r_k$.

L'indépendance linéaire des g_k implique que

$$\| e^{iu\varphi(g')} \|'_{\infty} = \sup_{\Theta} \left| \prod_{k=1}^{\infty} P_{\Theta(k), r_k} (k^{-2} u) \right| .$$

Ce produit se majore, utilisant 3.4 et posant $N(v)$ = nombre de valeurs de k telles que $\delta < k^{-2}u < 2\delta$, par,

$$\exp ((-\log \rho) N(u)) = \exp (-\rho_1 u^{1/2}) \quad \text{où } \rho_1 > 0 ,$$

d'où le lemme 2 est satisfait.

5. Envisageons maintenant le cas où $r(G) = +\infty$ bien que tous ses éléments soient d'ordre fini. Il existe alors une suite $g_n \in G$ tels que $r(g_n)$ soit une suite croissante tendant vers l'infini. Nous allons extraire par le procédé diagonal une suite convenable des g_n : g_k^0 sera la suite de tous les g_n ; supposant la suite g_k^{q-1} construite, nous déterminerons g_k^q de la manière suivante :

Soit $\gamma(u)$ une fonction croissante tendant vers $+\infty$ déterminée plus loin ; posons $R_q = \sup \{ u \,;\, \gamma(u) \leq q \}$.

Soit $\eta_{q,k}$ une suite telle que le produit infini

5.1. $$\prod_{k \geqslant q} (1 + 2\eta_{q,k}) < 1 + e^{-R_q^{1/2}}$$

Soit $d_q(k)$ une suite croissante d'entiers déterminés de telle sorte que

$$\sum_{|m| > d} | P_{m,r}(v) | < \eta_{q,k} \quad \text{quels que soient } m \text{ , } r \text{ et } v \text{ vérifiant } |v| \leq R_q$$

ce qui est possible en vertu de 3.3. Ceci étant la suite g_k^q sera une suite extraite de g_k^{q-1} de telle sorte que $r(g_k^q) > 2d_q(k) \prod_{q \leq j < k} r(g_j^q)$ pour tous les $k > q$.

On notera par g_k la suite diagonale g_k^k ; on a alors quels que soient q et $k > q$

5.2. $$r(g_k) > 2d_q(k) \prod_{q \leq s < k} r(g_s)$$

Ces inégalités entraînent que $\sum_{k=q}^{N} n_k g_k = 0$ où $|n_k| < 2d_q(k)$ implique $n_k = 0$.

Par suite si l'on développe le produit

$$\prod_{k \geq q} \left(\sum_{|m| \leq d} P_{m,r} (k^{-2}u) \operatorname{Im} \langle g_k , g' \rangle \right) = \psi_q(g')$$

on obtient une série trigonométrique dans laquelle chaque exponentielle est obtenue une fois et une seule d'où

5.3. $$\|\psi_q(g')\|'_\infty = \sup \left| \prod_{k \geq q} P_{m,r} (k^{-2} u) \right|$$

Envisageons maintenant

5.4. $$\exp [iu \sum_{k \geq q} k^{-2} \langle g_k , g' \rangle] = \psi_q(g') + \chi(g') .$$

On a en vertu de (5.1.) et de 3.3 si $|u| < R_q$ $\|\chi(g')\|_\infty < e^{-R_q^{1/2}}$ et a fortiori $\|\chi(g')\|'_\infty < e^{-R_q^{1/2}}$.

D'autre part

$$\|\exp [iv \operatorname{Im} \langle g_0 , g' \rangle]\|'_1 = \sum |P_{m,r}(v)| < 2\sum_0^{+\infty} | J_m(v)| < (4e|v| + 2)$$

d'où

5.5 $$\|\exp [iu \sum_{k < q} k^{-2} \operatorname{Im} \langle g_k , g' \rangle]\|'_1 < (4eu + 2)^q \quad u > 0 .$$

Posons

$$\varphi(g') = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \operatorname{Im} \langle g_k , g' \rangle$$

on a, en vertu de 5.3 , 5.4 et 5.5. et en tenant compte que $u < R_q$

$$\|\exp [iu \varphi(g')]\|'_\infty < (4eu + 2)^{\gamma(u) + 1} (e^{-u^{1/2}} + \delta(u))$$

où

$$\delta(u) = \sup_{m,r} \prod_{k \geq \gamma(u)} |P_{m,r}(k^{-2} u)| .$$

Prenons par exemple $\gamma(u) = \log (u+1)$; évaluons le produit infini en utilisant toujours 3.4 , on obtient:

5.6. $$\log \|\exp [iu \varphi(g')]\|'_\infty = - \rho_1 u^{1/2} + O(\log^2 u) \quad \text{où} \quad \rho_1 > 0 ;$$

le lemme 2 est ainsi satisfait et la synthèse spectrale est impossible sur G .

6. Reste à envisager le cas où il existe dans G un élément d'ordre infini soit g_0 . Il suffit de transcrire 5 pour obtenir le résultat : on prend $g_k = \lambda_k g_0$ où λ_k est une suite d'entiers construite par le procédé diagonal de telle sorte que $\lambda_k > 2 \sum_{q \leq j < k} \lambda_j d_q(j)$ quels que soient q et $k > q$.

La série

$$\varphi(g') = \sum k^{-2} \operatorname{Im} \langle \lambda_k g_0 , g' \rangle$$

satisfait alors à l'évaluation 5.6.

La démonstration de l'impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes discrets infinis est ainsi achevée .

7. On peut se proposer de rechercher dans Z_n un contre-exemple sous forme d'un polynôme. Soit $\varphi(x) = \sum \alpha_k \sin x_k$ où $x = (x_1 \dots x_n)$; supposons qu'il existe au moins 7 $\alpha_k \neq 0$ (en particulier $n \geq 7$) alors

$$\| \exp [iu\, Q(x)] \|'_\infty = \sup \left| \prod_{k=1}^{n} J_{\theta(k)} (\alpha_k u) \right|$$

$\theta(k)$ prenant des valeurs entières. On sait que ([1] page 107, formule (10)) ,

$$J_n(v) = 0 \, (v^{-1/3}) \quad \text{uniformément en } n \text{ d'où}$$

$$\| \exp [iu\, Q(x)] \|'_\infty = 0 \, (u^{-7/3})$$

$Q(x)$ satisfait ainsi au lemme 2 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] ERDELYI (A.). - Asymptotic expansions. - New York, Dover Publications, 1956.

[2] KAHANE (Jean-Pierre). - Fonctions qui opèrent dans les algèbres de transformées de Fourier de suites, de fonctions ou de mesures sommables, Séminaire P. Lelong, t. 2, 1958/59, exposé 5.

[3] MALLIAVIN (Paul). - Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale dans une algèbre de fonctions presque périodiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 1756-1759.

[4] MALLIAVIN (Paul). - Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur une droite, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 2155-2157.

[5] PONTRJAGIN (L.). - Topological groups. - Princeton, Princeton University Press, 1946.

[6] SCHWARTZ (Laurent). - Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 227, 1948, p. 424-426.