

SÉMINAIRE LELONG.

ANALYSE

BERNARD MALGRANGE

Sur les équations de convolution

Séminaire Lelong. Analyse, tome 2 (1958-1959), exp. n° 15, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SL_1958-1959__2__A10_0

© Séminaire Lelong. Analyse

(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES ÉQUATIONS DE CONVOLUTION

par Bernard MALGRANGE

Je me propose essentiellement de donner une démonstration simplifiée du théorème suivant, que j'ai établi dans ma thèse [5] :

THÉOREME 1. Soit, dans R^n , μ une distribution à support compact [7]. L'ensemble des distributions f vérifiant $\mu * f = 0$ est engendré (topologiquement) par les exponentielles-polynômes qu'il contient.

1. Réduction du problème.

NOTATIONS. - $x = (x_1, \dots, x_n)$ désigne le point courant de R^n ;
 $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, avec $\zeta_j = \xi_j + i \eta_j$ le point courant de C^n ;
 $x \zeta = \sum x_j \zeta_j$.

Soient $\mu \in \mathcal{E}'$ une distribution à support compact sur R^n et $\hat{\mu}(\zeta) = \int \mu(x) e^{-ix\zeta} dx$ (dx = mesure de Lebesgue sur R^n) sa transformée de Fourier ; $\hat{\mu}(\zeta)$ est une fonction holomorphe de $\zeta \in C^n$. Nous allons montrer que le théorème 1 résulte du lemme suivant (c'est une amélioration de la proposition 4, chapitre 2, de [5] ; elle a été proposée par J.-P. KAHANE dans [3]) :

LEMME fondamental. - Soient P un polynôme et ν une distribution $\in \mathcal{E}'$ telle que $\hat{\nu}(\zeta)/\hat{\mu}(\zeta)$ n'ait pas de pôles dans C^n ; il existe $\nu_P \in \mathcal{E}'$ tel que :

$$(P\mu) * \nu = \mu * \nu_P .$$

(Ce lemme sera démontré au paragraphe 2).

Supposons, en effet $\mu \neq 0$ (sinon le théorème est trivial), et soit ν' une fonction indéfiniment dérivable à support compact orthogonale à toutes les exponentielles-polynômes φ vérifiant $\mu * \varphi = 0$; et désignons par ν la symétrique de ν' par rapport à l'origine. D'après le théorème de Hahn-Banach, tout revient à prouver que l'on a $\langle \nu, f \rangle = 0$ pour tout f vérifiant $\mu * f = 0$. comme la même égalité sera encore vraie pour les translatées de f , il revient

au même de prouver que l'on a $\nu * f = 0$. Pour cela, nous utiliserons le fait élémentaire suivant (dont on trouvera une démonstration, par exemple dans [5], Introduction) :

L'hypothèse faite sur ν' est équivalente à l'hypothèse suivante :
 $\hat{\nu}(\zeta)/\hat{\mu}(\zeta)$ n'a pas de pôles dans \mathbb{C}^n .

Appliquons maintenant le lemme fondamental ; pour tout polynôme P , on a

$$(P\mu) * \nu * f = \nu_P * \mu * f = 0 .$$

Posons $g = \nu * f$; d'après l'égalité précédente, le résultat découlera du lemme suivant :

LEMME 1. - L'ensemble des distributions g vérifiant, pour tout polynôme P , l'équation $(P\mu) * g = 0$, est réduit à $\{0\}$.

Par régularisation il suffit de montrer que l'ensemble V des fonctions indéfiniment dérivables vérifiant les mêmes équations est réduit à $\{0\}$. Or, V possède les propriétés suivantes :

a. V est un sous-espace fermé invariant par translation de l'espace \mathcal{C} des fonctions indéfiniment dérivables (évident).

b. V est un idéal (pour la multiplication ordinaire) de \mathcal{C} : en effet, V étant fermé, il suffit de montrer qu'il est invariant pour la multiplication par les polynômes ; pour établir ce point, il suffit de montrer que l'ensemble des équations $(P\mu) * g = 0$ équivaut à l'ensemble des équations $\mu * (Pg) = 0$; or, ce dernier point résulte facilement de l'application récurrente de la formule :

$$x_j(\mu * g) = (x_j\mu) * g + \mu * (x_j g)$$

De (a) et (b) résulte que l'on a nécessairement $V = \mathcal{C}$ ou $V = \{0\}$; comme $\mu \neq 0$, on a $V \neq \mathcal{C}$, donc $V = \{0\}$, ce qui démontre le lemme et le théorème.

2. Démonstration du lemme fondamental.

Commençons par rappeler un lemme classique (en le précisant un peu) :

LEMME 2. - Étant donnés deux nombres $\alpha > 0$, A et B , on peut trouver $C > 0$ et $D > 0$ tels que toute fonction holomorphe f de $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant :

$$f(0) = 1 ; |f(\lambda)| \leq A e^{B|\lambda|}$$

possède les propriétés suivantes :

Soient λ_j les zéros de f , rangés par valeur absolue croissante (j entier

> 0), et

$$f(\lambda) = e^{a\lambda} \prod (1 - \lambda/\lambda_j) e^{\lambda/\lambda_j}$$

le développement en produit canonique de f ; on a :

- a. $p/|\lambda_p| \leq C$ pour tout p .
- b. $|a| \leq D$.

La seconde inégalité résulte immédiatement de la formule $a = f'(0)$; pour démontrer la première, appliquons l'inégalité de Poisson-Jensen : si dans le disque ouvert de rayon r , f a q zéros $\lambda_1, \dots, \lambda_q$, on a :

$$\left| \frac{r^q}{\lambda_1 \dots \lambda_q} \right| \leq \max_{|\lambda|=r} \left| \frac{f(\lambda)}{f(0)} \right| \leq Ae^{Br}$$

La même inégalité subsiste évidemment si l'on enlève au premier membre des facteurs r/λ_j ($j \leq q$) ou si l'on y ajoute des facteurs r/λ_j ($j > q$) ; pour tout entier p , on a donc

$$\frac{r^p}{|\lambda_1 \dots \lambda_p|} \leq Ae^{Br}$$

et a fortiori :

$$\frac{r^p}{|\lambda_p|^p} \leq Ae^{Br}$$

En choisissant $r = p/B$, on obtient le résultat cherché.

Le lemme suivant est une variante d'un résultat dû à L. SCHWARTZ [8].

LEMME 3. Etant donné quatre nombres > 0 , A, A', B, B' , il existe $A'' > 0$ tel que tout couple f, g de fonctions entières de λ vérifiant :

$$|f(\lambda)| \leq Ae^{B|\lambda|} ; |g(\lambda)| \leq A'e^{B'|\lambda|} ; f(0) = 1 ; g(\lambda)/f(\lambda) \text{ sans pôles,}$$

vérifie aussi :

$$\left| \frac{f'(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda)} \right| \leq A''(1 + |\lambda|^2) e^{B'|\lambda|}$$

Posons en effet $f(\lambda) = e^{a\lambda} \prod (1 - \lambda/\lambda_j) e^{\lambda/\lambda_j}$; on a :

$$\frac{f'(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda)} = ag(\lambda) + g(\lambda) \sum (1/(\lambda - \lambda_j) + 1/\lambda_j)$$

la série qui figure au second membre étant absolument convergente pour $\lambda \neq \lambda_j$;
une transformation immédiate permet d'écrire :

$$\frac{f'(\lambda) g(\lambda)}{f(\lambda)} = a g(\lambda) - \lambda g(\lambda) \sum \frac{1}{\lambda_j^2} + \lambda^2 \sum \frac{g(\lambda)}{\lambda_j^2 (\lambda - \lambda_j)}$$

C et D ayant la même signification qu'au lemme précédent,

- le premier terme du second membre est majoré par $D |g(\lambda)|$ (évident) ;
- le second est majoré par $C_1 |\lambda g(\lambda)|$, avec $C_1 = C \sum 1/j^2$ (évident) ;
- le troisième est majoré par $C_1 |\lambda|^2 \max_{|\lambda' - \lambda| < 1} |g(\lambda')|$

(en vertu de l'inégalité élémentaire suivante, cas particulier de Poisson-Jensen :
si α est un zéro de g , on a : $|\frac{g(\lambda)}{\lambda - \alpha}| \leq \max_{|\lambda' - \lambda| < 1} |g(\lambda')|$), et le lemme résulte aussitôt de ces majorations.

LEMME 3 bis. - Même énoncé, en remplaçant partout $\zeta \lambda$ par λ .

(Même démonstration).

Démontrons maintenant le lemme fondamental ; par récurrence, il suffit de **prouver** que, pour $j = 1, \dots, n$, il existe $\nu_j \in \mathcal{E}'$ vérifiant :

$$(x_j \mu) * \nu = \mu * \nu_j$$

en posant $\hat{\mu} = M$, $\hat{\nu} = N$, cela revient à démontrer :

$$\frac{\partial M}{\partial \zeta_j} \frac{N}{M} \in \mathcal{E}'$$

d'après le théorème de Paley-Wiener, cela équivaut à la propriété suivante :

$\frac{\partial M}{\partial \zeta_j} \frac{N}{M}$ est une fonction entière de type exponentiel, à croissance polynomiale

dans le domaine réel.

Un raisonnement facile de régularisation (que nous omettrons) montre que l'on peut supposer, par exemple, que ν est une fonction intégrable et, par conséquent, qu'il existe $A' > 0$ et $B' > 0$ tels que

$$|N(\zeta)| \leq A' e^{B' |\gamma|} \quad (|\zeta|^2 = \sum |\zeta_j|^2 ; |\gamma|^2 = \sum |\gamma_j|^2)$$

Par ailleurs M est de type exponentiel, donc il existe A et B tels que

$$|M(\zeta)| \leq A e^{B|\zeta|}.$$

Supposons (en faisant au besoin une translation pour nous ramener à ce cas) que l'on a : $M(0) \neq 0$; en multipliant au besoin M par une constante, on peut supposer $M(0) = 1$; pour tout vecteur complexe ζ , avec $|\zeta| = 1$, posons

$$f_{\zeta}(\lambda) = M(\lambda\zeta) \quad \text{et} \quad g_{\zeta}(\lambda) = N(\lambda\zeta) \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \quad ;$$

appliquons le lemme 3 bis à f_{ζ} et g_{ζ} ; après quelques transformations évidentes, on trouve :

pour tout $\zeta \in \mathbb{C}^n$:

$$\left| \sum_j \zeta_j \frac{\partial M}{\partial \zeta_j}(\zeta) \frac{N(\zeta)}{M(\zeta)} \right| \leq A^n |\zeta| (1 + |\zeta|^2) e^{B|\zeta|}$$

Par conséquent, $\sum \zeta_j \frac{\partial M}{\partial \zeta_j} \frac{N}{M}$ est de type exponentiel.

Appliquons maintenant le lemme 3 à f_{ζ} et g_{ζ} , pour ζ réel (en nous restreignant aux λ réels) ; on trouve, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\left| \sum_j \xi_j \frac{\partial M}{\partial \xi_j}(\xi) \frac{N(\xi)}{M(\xi)} \right| \leq A^n |\xi| (1 + |\xi|^2)$$

Par conséquent, $\sum \xi_j \frac{\partial M}{\partial \xi_j} \frac{N}{M}$ est à croissance polynomiale dans le domaine

réel, donc est dans \mathcal{E}' .

Recommençons les opérations précédentes en changeant d'origine : pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $M(a) \neq 0$, on aura :

$$\sum (\zeta_j - a_j) \frac{\partial M}{\partial \zeta_j} \frac{N}{M} \in \mathcal{E}'$$

et, par conséquent, pour $j = 1, \dots, n$: $\frac{\partial M}{\partial \zeta_j} \frac{N}{M} \in \mathcal{E}'$ ce qui démontre le lemme fondamental.

3. Compléments.

a. Le "théorème des supports" ⁽¹⁾. - Pour prouver, dans la démonstration précédente, que les $\frac{\partial M}{\partial \zeta_j} \frac{N}{M}$ sont de type exponentiel, on aurait pu, à la place du lemme 3 bis,

utiliser le théorème classique suivant, dû à LINDELÖF (au moins lorsque $n = 1$; l'extension à n quelconque est facile ; voir, par exemple [5]) : une fonction

(1) Ce point ne figurait pas dans l'exposé oral.

entière, quotient de deux fonctions de type exponentiel est elle-même de type exponentiel.

Cependant, par la méthode employée ici, nous obtenons le résultat plus précis suivant (qui ne peut pas être obtenu par le théorème de Lindelöf : les majorations du type d'un quotient qui seraient nécessaires, sont fausses) :

Premier complément au lemme fondamental. - L'enveloppe convexe du support de ν_P est contenue dans celle de ν .

Pour démontrer ce point, il suffit de traiter le cas où $P = x_j$; or, supposons que ν soit une fonction intégrable (cas auquel on peut se ramener par régularisation), ayant son support dans une boule de rayon B' centrée à l'origine ; alors, N sera de type exponentiel $\ll B'$; mais la démonstration du lemme fondamental montre aussitôt que

$$\hat{\nu}_j = i \frac{\partial M}{\partial \xi_j} \frac{N}{M}$$

est aussi de type exponentiel $\ll B'$; d'après le théorème de Paley-Wiener, ν_j a encore son support dans la boule de centre 0 et de rayon B' ; par translation (dans l'espace des x), on obtient : toute boule contenant le support de ν contient le support de ν_j ; d'où le résultat ⁽²⁾.

Remarquons maintenant que le complément précédent est aussi une conséquence immédiate du théorème suivant.

THÉORÈME (des supports) 2. - Soient μ et σ deux distributions à support compact. L'enveloppe convexe du support de $\mu * \sigma$ est égale à la somme (algébrique) des enveloppes convexes des supports de μ et σ (voir [4] et [9]).

Ici, nous allons, au contraire, donner une démonstration très simple du théorème 2 à partir des résultats précédents :

Supposons que μ soit une fonction continue (cas auquel on peut se ramener par régularisation) ; pour tout point $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mu(a) \neq 0$, on peut trouver (théorème de Weierstrass) une suite de polynômes $P_{a,j}$ tels que les $P_{a,j} \mu$ convergent vers δ_a (masse + 1 en a) dans \mathcal{E}' faible : posons $\mu * \sigma = \nu$, et appliquons les résultats précédents : il existe une suite $\nu_{a,j}$ de distributions $\in \mathcal{E}'$ telles que :

- i. L'enveloppe convexe du support de $\nu_{a,j}$ est contenue dans celle de $\nu = \mu * \sigma$.

⁽²⁾ Le raisonnement précédent, et l'idée d'introduire un lemme 3 bis au lieu d'utiliser le théorème de Lindelöf, sont dûs à J.-P. KAHANE.

$$\text{ii. } (P_{a,j} \mu) * \nu = \mu * \nu_{a,j} ; \text{ d'ou } (P_{a,j} \mu) * \sigma = \nu_{a,j} * \sigma .$$

En passant à la limite, on obtient ceci : pour tout a tel que $\mu(a) \neq 0$, l'enveloppe convexe de $\delta_a * \sigma$ est contenue dans celle de $\mu * \sigma$; comme (par définition du support de μ), l'enveloppe convexe fermée des a est égale à l'enveloppe convexe du support de μ , on obtient finalement :

(enveloppe convexe du support de μ) + (enveloppe convexe du support de σ) \subset (enveloppe convexe du support de $\mu * \sigma$).

L'inclusion opposée étant triviale, le théorème 2 est démontré.

b. Étude de certaines équations avec second membre. - Je me bornerai ici à quelques brèves indications ; rappelons d'abord quelques définitions utilisées dans [5] : pour $s \in \mathbb{R}$, \mathcal{K}^s désigne l'espace des distributions φ à support compact "s fois L^2 -dérivables" c'est à dire vérifiant :

$$\|\varphi\|_s^2 = \int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < +\infty$$

et \mathcal{L}^s désigne l'espace des distributions f telles que, pour tout α indéfiniment dérivable à support compact, on ait $\alpha f \in \mathcal{K}^s$.

On a alors :

Deuxième complément au lemme fondamental. - Dans les hypothèses du lemme fondamental, il existe une constante k (dépendant de μ et P) telle que l'hypothèse supplémentaire : $\nu \in \mathcal{K}^s$ entraîne : $\nu_P \in \mathcal{K}^{s-k}$.

(Il suffit, pour le voir, de reprendre la démonstration donnée au paragraphe 2).

En raisonnant comme dans [5], chapitre 2, paragraphe 3, on obtient alors :

THÉORÈME 3. - Soient $\mu \in \mathcal{L}'$ et P un polynôme ; il existe $k'(\mu, P)$ tels que, pour tout $g \in \mathcal{L}^s$, il existe $f \in \mathcal{L}^{s-k'}$ vérifiant :

$$\mu * f = (P\mu) * g .$$

EXEMPLE. - Prenons pour μ une somme finie de distributions à supports ponctuels : $\mu = \sum D_j \delta_{a_j}$, les a_j étant des points distincts de \mathbb{R}^n , et les D_j des opérateurs différentiels $\neq 0$ à coefficients constants, il existe certainement un polynôme P_j tel que $P_j \mu = \delta_{a_j}$ (évident). On retrouve alors un théorème de L. EHREMPREIS [1] (en particulier, le fait que μ possède une solution élémentaire).

REMARQUE 1. - En modifiant un peu le raisonnement cité, on voit que l'on peut

prendre $k'(\mu, P) = k(\mu, P)$.

REMARQUE 2. - Il serait très intéressant d'obtenir la meilleure valeur possible pour $k(\mu, P)$. Il me semble très probable que, quels que soient μ et P , tout nombre > 0 convient ; et même (sinon en général, du moins dans des cas assez étendus), $k = 0$. Il est facile de voir que ce dernier résultat équivaudrait à l'inégalité suivante : pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, il existe $C(\mu, P, K) > 0$ tel que, pour tout φ indéfiniment dérivable à support dans K , on ait :

$$\|(P\mu) * \varphi\|_0 \leq C \|\mu * \varphi\|_0$$

Lorsque μ est un polynôme différentiel (i. e. une distribution à support l'origine), cette inégalité a été démontrée par L. HÖRMANDER [2]. Ce résultat a été étendu récemment par l'auteur aux μ sommes finies de distributions à support ponctuel [6] (ce qui améliore le théorème de L. EHRENPRES dont il a été question plus haut).

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] EHRENPRES (Leon). - Solution of some problems of division, Amer. J. of Math., t. 77, 1955, p. 286-292.
- [2] HÖRMANDER (Lars). - On the theory of general partial differential operators, Acta Math., t. 94, 1955, p. 160-248.
- [3] KAHANE (J.-P.). - Cours professé au Tata Institute. - Bombay, 1957.
- [4] LIONS (J.-L.). - Supports dans la transformation de Laplace, J. Anal. math. Jérusalem, t. 2, 1952-53, p. 369-380.
- [5] MALGRANGE (Bernard). - Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-56, p. 271-355. (Thèse Sc. math. Paris. 1955).
- [6] MALGRANGE (Bernard). - Sur une inégalité de F. Trèves, Math. Z., t. 72, 1959, p. 184-186.
- [7] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, 2e éd. - Paris, Hermann, 1957 (Act. scient. et ind., n° 1091).
- [8] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques, Annals of Math., t. 48, 1947, p. 857-929.
- [9] TITCHMARSH (E. C.). - Introduction to the theory of Fourier integrals, 2e éd. - Oxford, Clarendon Press, 1948.