François Norguet

Notions sur la théorie des catégories et l'algèbre homologique

Séminaire Lelong. Analyse, tome 1 (1957-1958), exp. nº 9, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1957-1958__1__A5_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire d'ANALYSE

(P. LELONG)

Année 1957/58

-:-:-:-

4 février 1958

(texte revu en décembre 1958)

NOTIONS SUR LA THÉORIE DES CATÉGORIES ET L'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

par François NORGUET

Le but de cet exposé est de présenter la théorie des catégories comme cadre pour l'algèbre homologique, cadre elle-même pour la théorie des faisceaux et des espaces annelés, qui sera exposée ultérieurement. En fait, la théorie des catégories est celle d'une structure algébrique très générale, qui, particularisée par l'adjonction progressive d'axiomes spéciaux, devient un cadre naturel pour la formalisation de telle théorie mathématique préalablement choisie. Ayant en vue spécialement la formalisation de l'algèbre homologique, on dirige l'axiomatisation vers ce but particulier, en mentionnant toutefois le point d'insertion de la théorie des catégories locales. Une axiomatisation de cette dernière, entreprise de façon un peu différente , a été exposée par M. C. EHRESMANN [3] ([1]). Certaines notions, introduites au cours de l'axiomatisation des catégories exactes, sont également nécessaires si l'on veut construire un cadre formel pour une théorie topologique ; mais il faut prendre alors des axiomes plus faibles (cf. [4], [6] et [7]). L'axiomatique introduite ici pour les catégories exactes est plus faible que celle généralement adoptée (cf. par exemple [1]) ; d'où la nécessité de généraliser la notion de suite exacte et celle d'homologie, ainsi que les diagrammes classiques sur l'homologie des complexes (cf. [2], diagrammes (1') et (2'), p. 59). On a cru bon d'énumérer toutes les propriétés utiles, à mesure qu'elles résultent des axiomes énoncés, et bien qu'elles en résultent presque toujours de manière évidente ; cela permet de contrôler à chaque instant la portée des axiomes. On donne la définition d'une catégorie abélienne, et celles relatives aux foncteurs. Pour les notions de catégorie duale, de produit direct et de somme directe, on renvoie au mémoire récent [5] de A. GROTHENDIECK. L'exposé se termine par la définition des catégories additives, des catégories abéliennes et des foncteurs dérivés. Le lecteur trouvera dans le mémoire cité de A. GROTHENDIECK un exposé de l'algèbre homologique dans les catégories abéliennes.

([1]) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie, placée à la fin de l'exposé.

I. Axiomatique des catégories.

Définitions fondamentales. Notion d'homologie.

1. Notions générales sur les catégories.

a. Classe munie d'une loi de composition. - Dans une classe C, munie d'une loi de composition partiellement définie $(f, g) \longrightarrow f.g$, on appelle unité tout élément e tel que : $e.f = f$ et $g.e = g$ lorsque ces produits sont définis. Si le produit $e.e'$ de deux unités est défini, alors $e = e'$.

b. Définition. - Une catégorie C est une classe munie d'une loi de composition partiellement définie $(f, g) \longrightarrow f.g$, appelée produit, satisfaisant aux axiomes suivants :

i. associativité : si $(f.g).h$ est défini, $f.(g.h)$ est défini et égale $(f.g).h$; si $f.(g.h)$ est défini, $(f.g).h$ est défini.

ii. si $f.g$ et $g.h$ sont définis, $(f.g).h$ est défini.

iii. pour tout f de C, il existe des unités $e_f^!$ et e_f telles que $e_f^!.f$ et $f.e_f$ soient définis.

Les éléments d'une catégorie sont appelés morphismes ; les unités sont parfois appelées objets ou morphismes identiques.

c. Propriétés.

i. Pour tout f de C, $e_f^!$ (resp. e_f) est déterminé de façon unique, et est appelé unité à gauche (resp. à droite) de f.

ii. Pour que $g.f$ soit défini, il faut et il suffit que $e_g = e_f^!$.

iii. Si $f.g$ est défini $e_{f.g}^! = e_f^!$ et $e_{f.g} = e_g$.

d. Les classes $H_C(f, g)$ et les applications canoniques.

i. Si e et e' sont deux unités de C, $H_C(e, e')$ désigne la classe des éléments x de C tels que le produit $e'.x.e$ soit défini ; on suppose désormais que $H_C(e, e')$ est toujours un ensemble. Si f, g sont deux éléments de C, $H_C(f, g)$ désigne l'application de l'ensemble $H_C(e_f^!, e_g)$ dans l'ensemble $H_C(e_f, e_g^!)$ qui, à un élément x de $H_C(e_f^!, e_g)$, fait correspondre l'élément $g.x.f$ de $H_C(e_f, e_g^!)$.

ii. Chaque triple (e, e', e'') d'unités détermine une application canonique :

$$\varphi_{e,e',e''} : H_C(e, e') \times H_C(e', e'') \longrightarrow H_C(e, e'') : (f, g) \longrightarrow g.f .$$

REMARQUE. - La condition ci-dessus définit l'application considérée, lorsque $H_C(e\ ,\ e') \times H_C(e'\ ,\ e'')$ est non vide ; si cette classe est vide, $\varphi_{e,e',e''}$ est déterminée de façon précise comme application vide (de la classe vide dans $H_C(e'\ ,\ e''))$.

iii. Tout couple $(f\ ,\ g)$ de morphismes détermine deux applications canoniques :

$$\varphi_{f,g} : H_C(e'_f\ ,\ e_g) \to H_C(e_f\ ,\ e_g) : x \to x.f$$

$$\varphi'_{f,g} : H_C(e'_f\ ,\ e_g) \to H_C(e'_f\ ,\ e'_g) : x \to g.x\ ,$$

restrictions de

$$\varphi_{e_f,e'_f,e_g} \text{ à } \{f\} \times H_C(e'_f\ ,\ e_g)$$

et de

$$\varphi_{e'_f,e_g,e'_g} \text{ à } H_C(e'_f\ ,\ e_g) \times \{g\}\ .$$

iv. Tout morphisme f détermine deux applications canoniques :

$$\varphi_f = \varphi_{f,f} : H_C(e'_f\ ,\ e_f) \to H_C(e_f\ ,\ e_f) : x \to x.f$$

$$\varphi'_f = \varphi'_{f,f} : H_C(e'_f\ ,\ e_f) \to H_C(e'_f\ ,\ e'_f) : x \to f.x\ .$$

Toute classe $H_C(e\ ,\ e)$ contient une seule unité e ; on appellera noyau d'une application φ d'une classe dans $H_C(e\ ,\ e)$, et on désignera par $n(\varphi)$, l'image réciproque de e par cette application.

2. Morphismes possédant des propriétés particulières.

a. Morphismes inversibles.

DÉFINITIONS. - f est dit inversible à gauche (resp. à droite) si $n(\varphi_f)$ (resp. $n(\varphi'_f)$) est non vide ; si f est inversible à gauche (resp. à droite), les éléments de $n(\varphi_f)$ (resp. $n(\varphi'_f)$) sont appelés inverses à gauche (resp. à droite) de f ; f est dit inversible, ou encore est appelé isomorphisme, s'il est inversible simultanément à droite et à gauche ; si f est inversible, les éléments de $n(\varphi_f) \cap n(\varphi'_f)$ sont appelés inverses de f .

PROPRIÉTÉS.

i. Pour que x soit inverse à gauche (resp. à droite) de f , il faut et il suffit que $x.f = e_f$ (resp. $f.x = e'_f$) .

ii. Si x est inverse, à gauche ou à droite, de f , $e'_x = e_f$ et $e_x = e'_f$.

iii. Pour que x soit inverse à gauche (resp. à droite) de f , il faut et il suffit que f soit inverse à droite (resp. à gauche) de x .

iv. Si $f.g$ est défini, et si f et g sont inversibles, à droite ou à gauche, $f.g$ l'est aussi ; si x (resp. y) est inverse, à droite ou à gauche, de f (resp. g) , $y.x$ est défini, et est inverse, à droite ou à gauche, de $f.g$.

v. Si f est inversible, il admet un seul inverse à gauche et un seul inverse à droite, qui sont égaux.

DÉFINITIONS. - On appelle groupoïde à gauche (resp. à droite) une catégorie dont tous les éléments sont inversibles à gauche (resp. à droite), groupoïde une catégorie dont tous les éléments sont inversibles, groupe un groupoïde ayant une seule unité.

b. <u>Monomorphismes et épimorphismes</u>.

DÉFINITIONS. - f est appelé : monomorphisme (resp. épimorphisme), si $\varphi'_{g,f}$ (resp. $\varphi_{f,g}$) est, pour tout g , une injection ; bimorphisme, s'il est en même temps monomorphisme et épimorphisme.

PROPRIÉTÉS.

i. Pour que f soit un monomorphisme (resp. épimorphisme), il faut et il suffit que $f.x' = f.x''$ (resp. $x'.f = x''.f$) entraîne $x' = x''$.

ii. Si $g.f$ est un monomorphisme (resp. épimorphisme), f (resp. g) est un monomorphisme (resp. épimorphisme).

iii. Si $g.f$ est un bimorphisme, f est un monomorphisme et g un épimorphisme.

iv. Si f et g sont des monomorphismes (resp. des épimorphismes), et si $g.f$ est défini, c'est un monomorphisme (resp. un épimorphisme).

v. Tout morphisme inversible à gauche (resp. à droite) est monomorphisme (resp. épimorphisme); tout isomorphisme un bimorphisme.

vi. Pour que f soit un isomorphisme, il faut et il suffit que $\varphi_{f,g}$ et $\varphi'_{g,f}$ soient, pour tout g , des bijections.

vii. Pour que f soit un isomorphisme, il faut et il suffit qu'il soit un monomorphisme inversible à droite (resp. un épimorphisme inversible à gauche).

c. Effacements injectifs et projectifs.

DÉFINITIONS.

i. Un morphisme m est appelé effacement injectif (resp. projectif) si c'est un monomorphisme (resp. épimorphisme) et si, pour tout morphisme g tel que $m.g$ (resp. $g.m$) soit défini et tout monomorphisme (resp. épimorphisme) f ayant même unité à droite (resp. à gauche) que g, il existe un morphisme x tel que $m.g = x.f$ (resp. $g.m = f.x$).

ii. Un objet est dit injectif (resp. projectif) s'il est un effacement injectif (resp. projectif).

PROPRIÉTÉS.

i. Si m est un effacement injectif (resp. projectif), et si y est un monomorphisme (resp. épimorphisme), $m.y$ et $y.m$ sont des effacements injectifs (resp. projectifs).

ii. En particulier, un monomorphisme (resp. épimorphisme), dont l'unité à gauche ou à droite est un objet injectif (resp. projectif), est un effacement injectif (resp. projectif).

3. Relations de préordre et relations d'équivalence.

a. Relations de préordre dans C.

DÉFINITIONS. - Si f et g sont deux morphismes de C, la relation $g \subset f$ (resp. $g < f$) équivaut à l'existence d'un monomorphisme (resp. épimorphisme) x tel que $g = f.x$ (resp. $g = x.f$). On désigne par $\bar{\Phi}(f)$ (resp. $\bar{\Psi}(f)$) la classe des morphismes g tels que $g \subset f$ (resp. $g < f$).

PROPRIÉTÉS.

i. Les relations $\subset$ et $<$ sont des relations de préordre, que nous appellerons monopréordre et épipréordre de C ; cela signifie que : $h \subset g$ et $g \subset f$ entraînent $h \subset f$, et que tout f vérifie $f \subset f$, pour la relation $\subset$ par exemple.

ii. Si f est un monomorphisme, et si $g \subset f$, alors g est un monomorphisme et le monomorphisme x tel que $g = f.x$ est déterminé de façon unique ; si f est un épimorphisme et si $g < f$, alors g est un épimorphisme et l'épimorphisme x, tel que $g = x.f$, est déterminé de façon unique.

iii. Si g est un épimorphisme et si $g \subset f$, alors f est un épimorphisme ; si g est un monomorphisme et si $g < f$, alors f est un monomorphisme.

iv. Si f est un monomorphisme (resp. épimorphisme), g un épimorphisme (resp. monomorphisme), et si $g \subset f$ (resp. $g < f$), alors f et g sont des bimorphismes.

v. Pour que f soit un monomorphisme (resp. un épimorphisme), il faut et il suffit que l'on ait $f \subset e_f$ (resp. $f < e_f$).

vi. Pour que f soit inversible à droite (resp. à gauche), il faut et il suffit que $e_f^! \subset f$ (resp. $e_f < f$).

vii. Si $h.g$ et $h.f$ sont définis, et si $g \subset f$, alors $h.g \subset h.f$; de même, si $g.k$ et $f.k$ sont définis, et si $g < f$, alors $g.k < f.k$.

viii. Si $h.g \subset h.f$, et si h est un monomorphisme, alors $g \subset f$; si $g.k < f.k$ et si k est un épimorphisme, alors $g < f$.

ix. $g \subset f$ équivaut à $\Phi(g) \subset \Phi(f)$, la seconde inclusion étant une inclusion de classes.

De même, $g < f$ équivaut à $\Psi(g) \subset \Psi(f)$.

x. $\Phi(g.f) = g.\Phi(f)$, et $\Psi(g.f) = \Psi(g).f$.

b. Relations d'équivalence dans C.

DÉFINITIONS. – Deux morphismes f et g seront dits monoéquivalents (resp. épi-équivalents) s'il existe un isomorphisme x tel que $g = f.x$ (resp. $g = x.f$).

PROPRIÉTÉS.

i. Pour que deux monomorphismes f et g soient monoéquivalents, il faut et il suffit qu'ils vérifient $g \subset f$ et $f \subset g$; pour que deux épimorphismes f et g soient épiéquivalents, il faut et il suffit qu'ils vérifient $g < f$ et $f < g$. Lorsqu'on parlera de monomorphismes (resp. d'épimorphismes) équivalents, il s'agira de monomorphismes (resp. d'épimorphismes) mono-équivalents (resp. épiéquivalents) ; pour les bimorphismes, il faudra toujours préciser de quelle équivalence il s'agit.

ii. Pour que f soit un isomorphisme, il faut et il suffit que f et $e_f^!$ soient monoéquivalents (resp. que f et e_f soient épiéquivalents).

iii. Si $h.f$ et $h.g$ sont définis, et si f et g sont monoéquivalents, alors $h.f$ et $h.g$ le sont aussi ; de même, si $f.k$ et $g.k$ sont définis, et si f et g sont épiéquivalents, $f.k$ et $g.k$ le sont aussi.

iv. Si $h.g$ et $h.f$ sont monoéquivalents, et si h est un monomorphisme, alors g et f sont monoéquivalents ; si $g.k$ et $f.k$ sont épiéquivalents, et si k est un épimorphisme ; alors g et f sont épiéquivalents.

v. Pour que les monomorphismes f et g soient monoéquivalents, il faut et il suffit que $\Phi(f) = \Phi(g)$; pour que les épimorphismes f et g soient épiéquivalents, il faut et il suffit que $\Psi(f) = \Psi(g)$.

DÉFINITION. - Deux morphismes f et g seront dits isomorphes s'il existe deux isomorphismes x et y tels que $g = y.f.x$.

PROPRIÉTÉ. - Pour que deux unités e et e' soient isomorphes, il faut et il suffit que $\mathrm{Hom}(e , e')$ contienne un isomorphisme.

c. Union et intersection de morphismes. Catégories locales.

PROPRIÉTÉ et DÉFINITION. - Soient f et g deux morphismes ; s'il existe un morphisme x, vérifiant $f \subset x$ et $g \subset x$, et tel que les relations $f \subset y$ et $g \subset y$ entraînent $x \subset y$, ce morphisme est défini à une monoéquivalence près ; on écrit alors $x = f \cup g$.

PROPRIÉTÉS. - $f \cup g = g \cup f$; $f \subset f \cup g$; $f = f \cup f$; $f \cup (g \cup h) = (f \cup g) \cup h$

PROPRIÉTÉ et DÉFINITION. - Soient f et g deux morphismes ; s'il existe un morphisme x, vérifiant $x \subset f$ et $x \subset g$, et tel que les relations $y \subset f$ et $y \subset g$ entraînent $y \subset x$, ce morphisme est défini à une monoéquivalence près ; on écrit alors $x = f \cap g$.

PROPRIÉTÉS. - $f \cap g = g \cap f$; $f \cap g \subset f$; $f = f \cap f$; $f \cap (g \cap h) = (f \cap g) \cap h$

PROPRIÉTÉS. - $(f \cap g) \cup h \subset (f \cup h) \cap (g \cup h)$

$(f \cup g) \cap h \supset (f \cap h) \cup (g \cap h)$

REMARQUE. - L'étude et l'axiomatisation de l'union et de l'intersection des morphismes conduit à la notion de catégorie locale, qui ne sera pas développée dans cet exposé.

4. Catégories exactes.

a. Axiome de l'image.

AXIOME E1. - Pour tout morphisme f, il existe un monomorphisme x et un épimorphisme y, tels que :

i. $f = x.y$

ii. si le monomorphisme x' et l'épimorphisme y' vérifient $f = x'.y'$, alors $x' \subset x$ et $y' < y$.

COROLLAIRE. - Le monomorphisme x et l'épimorphisme y, satisfaisant à l'axiome E1, sont déterminés, le premier à une monoéquivalence près, le second à une épiéquivalence près ; x étant choisi, y lui est cependant associé de façon unique.

NOTATION. - On pose, pour tout f, $I(f) = x$, $E(f) = y$, $I(f)$ et $E(f)$ étant respectivement un monomorphisme et un épimorphisme définis à des équivalences près, appelés respectivement image et coimage de f, l'un étant toutefois déterminé de façon unique quand l'autre a été choisi.

PROPRIÉTÉS.

i. Les conditions : f est un monomorphisme, $I(f) = f$, $E(f) = e_f$, sont équivalentes.

ii. Les conditions : f est un épimorphisme, $I(f) = e'_f$, $E(f) = f$, sont équivalentes.

iii. Si f est un bimorphisme, f et e'_f sont monoéquivalents, f et e_f sont épiéquivalents ; il en résulte que <u>tout bimorphisme est un isomorphisme</u> ; donc il y a identité entre les notions de bimorphisme et d'isomorphisme.

iv. Si g est un monomorphisme, $I(g.f) = g.I(f)$ et $E(g.f) = E(f)$;

Si f est un épimorphisme, $I(g.f) = I(g)$ et $E(g.f) = E(g).f$.

v. $I(I(f)) = I(f)$, $E(E(f)) = E(f)$, $I(E(f)) = E(I(f)) = e_{I(f)} = e'_{E(f)}$.

vi. Si f et g sont isomorphes, $I(f)$ et $I(g)$ sont isomorphes, $E(f)$ et $E(g)$ sont isomorphes.

b. <u>Axiome des morphismes nuls.</u>

AXIOME E2. - Toute classe $H_C(e\ ,\ e')$ contient un élément, noté $0_{e,e'}$, appelé morphisme nul, et C contient une unité, notée o, appelée objet nul, tels que :

i. Pour tout morphisme f de $H_C(e\ ,\ e')$, $\varphi_{e,e',e''}(f\ ,\ 0_{e',e''}) = 0_{e,e''}$ (c'est-à-dire $0_{e',e''}.f = 0_{e,e''}$).

ii. Pour tout morphisme f de $H_C(e', e'')$, $\varphi_{e,e',e''}(0_{e,e'}, f) = 0_{e,e''}$ (c'est-à-dire $f.0_{e,e'} = 0_{e,e''}$) .

iii. Quelle que soit l'unité e , $0_{o,e}$ est un monomorphisme, et $0_{e,o}$ est un épimorphisme.

iv. $0_{o,o} = o$.

NOTATION. - On écrira parfois $0_{f,g}$ pour $0_{e'_f,e_g}$; lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre, on négligera les indices.

PROPRIÉTÉS.

i. Pour toute unité e , $H_C(o , e)$ contient le seul élément $0_{o,e}$, et $\mathrm{Hom}(e , o)$ contient le seul élément $0_{e,o}$; en particulier, $H_C(o , o)$ contient le seul élément o .

ii. Pour tout couple (e' , e) d'unités, $0_{e',e} = 0_{o,e}.0_{e',o}$; il en résulte que $I(0_{e',e}) = 0_{o,e}$ et $E(0_{e',e}) = 0_{e',o}$.

iii. Si f est un monomorphisme, $f.x = 0$ entraîne $x = 0$.

Si f est un épimorphisme, $x.f = 0$ entraîne $x = 0$.

c. <u>Axiome du noyau.</u>

AXIOME E3. - Pour tout morphisme f , il existe un monomorphisme x tel que :

i. $f.x = 0$ (c'est-à-dire $f.x = 0_{e_x,e'_f}$) .

ii. si y est un monomorphisme tel que $f.y = 0$, alors $y \subset x$.

COROLLAIRE. - Le monomorphisme x , satisfaisant à l'axiome E3, est déterminé à une monoéquivalence près.

NOTATION. - On le désigne par $N(f)$, que l'on appelle noyau de f , ce noyau étant déterminé à une monoéquivalence près.

PROPRIÉTÉS.

i. Les conditions suivantes sont équivalentes : $N(f) = 0_{o,f}$; si y est un monomorphisme vérifiant $f.y = 0$, alors $y = 0$.

ii. Si f est un monomorphisme, $N(f) = 0_{o,f}$.

iii. $N(0_{e',e}) = e'$

iv. Quels que soient f et g, $N(f) \subset N(gf)$; si g est un monomorphisme, $N(f) = N(g.f)$. Si f est un monomorphisme, $f.N(g.f) \subset N(g)$.

v. $N(N(f)) = 0_{o,N(f)}$, $N(I(f)) = 0_{o,I(f)}$, $I(N(f)) = N(f)$,

$$N(E(f)) = N(f) \ , \quad E(N(f)) = e_{N(f)} .$$

vi. Si f et g sont isomorphes, $N(f)$ et $N(g)$ sont isomorphes.

vii. Pour que $g.f = 0$, il faut et il suffit que $I(f) \subset N(g)$.

viii. Si f et y sont des morphismes vérifiant $f.y = 0$, alors il existe un morphisme z et un seul, tel que $y = N(f).z$.

ix. Si $g.f$ est défini, et si $N(f)$ et $N(g)$ sont nuls, alors $N(g.f)$ est nul.

DÉFINITION.

On appelle monomorphisme faible tout morphisme f tel que $N(f) = 0$.

d. Axiome du conoyau.

AXIOME E4. - Pour tout morphisme f, il existe un épimorphisme x tel que :

i. $x.f = 0$;

ii. si y est un épimorphisme tel que $y.f = 0$, alors $y < x$.

COROLLAIRE. - Le morphisme x, satisfaisant à l'axiome E4, est déterminé à une épiéquivalence près.

NOTATION. - On le désigne par $Q(f)$, que l'on appelle conoyau de f, ce conoyau étant déterminé à une épiéquivalence près.

PROPRIÉTÉS.

i. Les conditions suivantes sont équivalentes : $Q(f) = 0_{f,o}$; si y est un épimorphisme vérifiant $y.f = 0$, alors $y = 0$.

ii. Si f est un épimorphisme, $Q(f) = 0_{f,o}$.

iii. $Q(0_{e',e}) = e$.

iv. Quels que soient f et g, $Q(g) \prec Q(g.f)$; si f est un épimorphisme,

$Q(g) = Q(g.f)$. Si g est un épimorphisme, $Q(g.f).g \prec Q(f)$.

v. $Q(Q(f)) = 0_{Q(f),o}$, $Q(I(f)) = Q(f)$, $I(Q(f)) = e^!_{Q(f)}$,

$Q(E(f)) = 0_{E(f),o}$, $E(Q(f)) = Q(f)$,

$I(f) \subset N(Q(f))$, $E(f) \prec Q(N(f))$.

vi. Si f et g sont isomorphes, $Q(f)$ et $Q(g)$ sont isomorphes.

vii. Pour que $g.f = 0$, il faut et il suffit que $E(g) \prec Q(f)$.

viii. Si f et y sont des morphismes vérifiant $y.f = 0$, alors il existe un morphisme z et un seul, tel que $y = z.Q(f)$.

ix. Si $g.f$ est défini, et si $Q(f)$ et $Q(g)$ sont nuls, alors $Q(g.f)$ est nul.

DÉFINITIONS.

i. On appelle épimorphisme faible tout morphisme f tel que $Q(f) = 0$.

ii. Une catégorie est dite faiblement exacte si elle satistait aux axiomes E1, E2, E3, E4, ce qu'on supposera jusqu'à la fin de 4.

e. Notions de quotients et d'homologie.

DEFINITIONS. - Si deux monomorphismes f et g vérifient $g \subset f$, il existe un monomorphisme x , et un seul, tel que $g = f.x$; on appelle monoquotient de f par g , et on désigne par f/g , l'épimorphisme $Q(x)$. Si deux épimorphismes f et g vérifient $g \prec f$, il existe un épimorphisme x , et un seul, tel que $g = x.f$; on appelle épiquotient de f par g , et on désigne par $f//g$, le monomorphisme $N(x)$.

PROPRIÉTÉS. - Pour tout morphisme f , $Q(f) = e^!_f/I(f)$, $N(f) = e_f//E(f)$.

PROPRIÉTÉS et DÉFINITION. - Si le couple de morphismes (f , g) vérifie $g.f = 0$, $I(f)$ et $N(g)$ vérifient $I(f) \subset N(g)$, $E(g)$ et $Q(f)$ vérifient $E(g) \prec Q(f)$; il existe un monomorphisme x et un épimorphisme z , déterminés chacun à un isomorphisme près, tels que $I(f) = N(g).x$ et $E(g) = z.Q(f)$; alors les quotients $N(g)/I(f) = Q(x)$ et $Q(f)//E(g) = N(z)$ sont déterminés à un isomorphisme près ; il existe un morphisme $H(f , g)$, déterminé à un isomorphisme près, tel que la relation suivante soit vérifiée à un isomorphisme près :

$$Q(f).N(g) = N(z).H(f\ ,\ g).Q(x)\ ,$$

c'est-à-dire :

$$Q(f).N(g) = (Q(f)//E(g)).H(f\ ,\ g).(N(g)/I(f))\ ;$$

$H(f\ ,\ g)$ est appelé morphisme d'homologie du couple $(f\ ,\ g)$.
En particulier, $H(0\ ,\ f) = e_{N(f)}$, et $H(f\ ,\ 0) = e'_{Q(f)}$ pour tout morphisme f.

PROPRIÉTÉ. - Les quatre relations : $H(f\ ,\ g) = 0$, $N(g) \subset N(Q(f))$, $Q(f) < Q(N(g))$, $Q(f).N(g) = 0$, sont équivalentes.

DÉFINITION. - Une suite $(f_i)_{\alpha < i < \beta}$ (*) de morphismes est dite exacte lorsque l'une des quatre conditions équivalentes qui suivent est vérifiée, pour tout indice i vérifiant $\alpha < i < \beta - 1$:

$$f_{i+1}.f_i = 0 \ \text{ et } \ H(f_i\ ,\ f_{i+1}) = 0 \quad , \quad f_{i+1}.f_i = 0 \ \text{ et } \ Q(f_i).N(f_{i+1}) = 0$$

$$I(f_i) \subset N(f_{i+1}) \subset N(Q(f_i)) \quad , \quad E(f_{i+1}) < Q(f_i) < Q(N(f_{i+1}))\ .$$

PROPRIÉTÉS.

i. Pour que la suite $(0\ ,\ f)$ soit exacte, il faut et il suffit que $N(f) = 0$.

ii. Pour que la suite $(f\ ,\ 0)$ soit exacte, il faut et il suffit que $Q(f) = 0$.

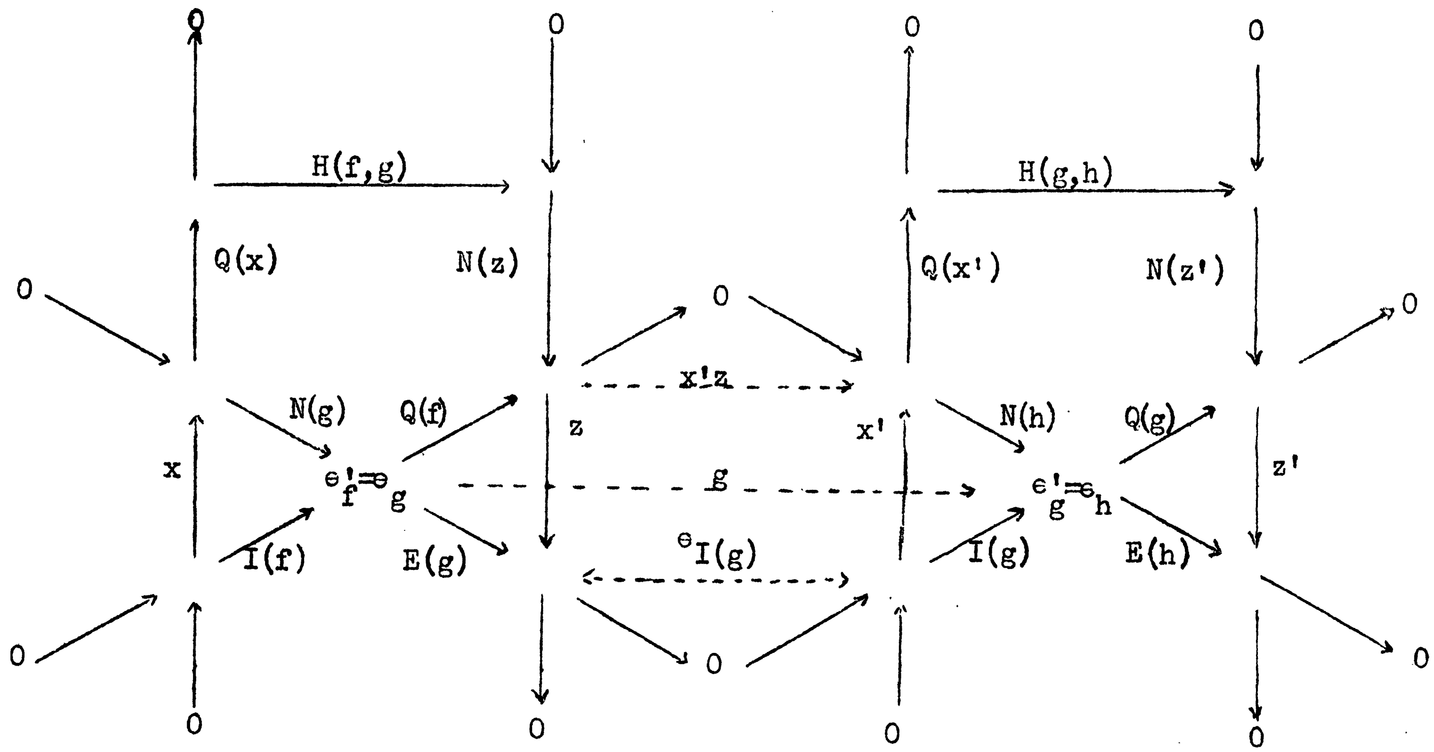
iii. Pour tout morphisme f, les suites $(f\ ,\ Q(f)\ ,\ 0)$ et $(0\ ,\ N(f)\ ,\ f)$ sont exactes, ainsi que les suites $(0\ ,\ I(f)\ ,\ Q(f)\ ,\ 0)$ et $(0\ ,\ N(f)\ ,\ E(f)\ ,\ 0)$.

iv. Considérons une suite $(f\ ,\ g\ ,\ h)$, telle $g.f = 0$ et $h.g = 0$; alors soit z l'épimorphisme tel que $E(g) = z.Q(f)$, et x' le monomorphisme tel que $I(g) = N(h).x'$; le produit $x'.z$ est défini, et la suite $(0\ ,\ N(z)\ ,\ x'.z\ ,\ Q(x')\ ,\ 0)$ est exacte (on le vérifie aisément à l'aide de la condition $Q(f_i).N(f_{i+1}) = 0$).

DIAGRAMMES. - A chaque couple $(f\ ,\ g)$ tel que $g.f = 0$ correspond le diagramme commutatif représenté ci-dessous, dans lequel chaque suite de morphismes alignés est exacte ; à droite du diagramme correspondant au couple $(f\ ,\ g)$ est représenté celui qui correspond au couple $(g\ ,\ h)$ tel que $h.g = 0$; des connections relient les deux diagrammes, et donnent naissance à une suite exacte supplémentaire qui est redressée au-dessous de la figure.

(*)
$- \infty \leq \alpha \leq + \infty$

$- \infty \leq \beta \leq + \infty$.



$$0 \longrightarrow \quad \xrightarrow{N(z)} \quad \xrightarrow{x'z} \quad \xrightarrow{Q(x')} \quad \longrightarrow 0$$

DÉFINITIONS.

i. On appelle complexe une suite $k = (k_i)_{\alpha < i < \beta}$ de morphismes, telle que, pour tout indice i vérifiant $\alpha < i < \beta - 1$, $k_{i+1} \cdot k_i = 0$.

ii. Si $k = (k_i)_{\alpha < i < \beta}$ est un complexe, on appelle i-ième morphisme d'homologie de k le morphisme $H_i(k)$ défini par les conditions suivantes :

$H_i(k) = H(k_{i-1} , k_i)$ pour $\alpha + 1 < i < \beta$,

$H_i(k) = H(0 , k_i)$ pour $\alpha < i < \alpha + 2$,

$H_i(k) = H(k_{i-1} , 0)$ pour $\beta - 1 < i < \beta + 1$.

iii. Soit e une unité de C ; on appelle résolution de e , un complexe $(0 , f , k_i)_{0 \leq i < +\infty}$, tel que $f.e$ soit défini, et que la suite $(0 , f , k_i)_{0 \leq i < +\infty}$ soit exacte ; la résolution est dite injective si les unités à droite des k_i , $0 \leq i < +\infty$, sont injectives.

f. Catégories exactes.

AXIOME E5. - Pour tout morphisme f , $N(Q(f)) \subset I(f)$ et $Q(N(f)) < E(f)$.

DÉFINITION. - Une catégorie est dite exacte si elle est faiblement exacte et satisfait à l'axiome E5.

PROPRIÉTÉS. - Dans une catégorie exacte :

i. Pour tout morphisme f , $N(Q(f)) = I(f)$ et $Q(N(f)) = E(f)$ (resp. à une monoéquivalence et à une épiéquivalence près, évidemment).

ii. Pour tout couple de morphismes (f , g) , les conditions $I(f) = N(g)$, $E(g) = Q(f)$, $Q(f).N(g) = 0$, $H(f , g) = 0$ sont équivalentes.

iii. Pour qu'une suite $(f_i)_{\alpha < i < \beta}$ de morphismes soit exacte, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes : $I(f_i) = N(f_{i+1})$, $E(f_{i+1}) = Q(f_i)$, $Q(f_i).N(f_{i+1}) = 0$, $H(f_i , f_{i+1}) = 0$ soit réalisée pour tout i vérifiant $\alpha < i < \beta - 1$.

iv. Les trois conditions suivantes sont équivalentes : f est un monomorphisme, $N(f) = 0_{o,f}$, la suite $(0 , f)$ est exacte.

v. Les trois conditions suivantes sont équivalentes : f est un épimorphisme, $Q(f) = 0_{f,o}$, la suite $(f , 0)$ est exacte.

vi. Les trois conditions suivantes sont équivalentes : f est un isomorphisme, $Q(f) = 0_{f,o}$ et $N(f) = 0_{o,f}$, la suite $(0 , f , 0)$ est exacte.

vii. Pour que la suite $(0 , f , g , 0)$ soit exacte, il faut et il suffit que : $f = N(g)$ et $g = Q(f)$.

viii. Pour que la suite $(f , x , 0)$ soit exacte, il faut et il suffit que $x = Q(f)$. Pour que la suite $(0 , x , f)$ soit exacte, il faut et il suffit que $x = N(f)$.

ix. Les morphismes $N(f)$, $E(f)$, $I(f)$, $Q(f)$, associés à tout morphisme f , à une mono- ou épiéquivalence près, vérifient les conditions suivantes : $I(f).E(f) = f$, et les suites $(0 , I(f) , Q(f) , 0)$, $(0 , N(f) , E(f) , 0)$ sont exactes ; ces conditions les déterminent à une mono- ou épiéquivalence près.

5. Premiers exemples de catégories.

a. Catégorie des ensembles et de leurs applications. - On la désigne par C_e ; c'est une catégorie locale.

b. Catégorie des espaces topologiques et de leurs applications continues. - On la désigne par C_t ; c'est une catégorie locale.

c. Catégorie des modules sur un anneau donné A . - On la désigne par $C_{m,A}$; c'est une catégorie exacte. En particulier, on désigne par C_g la catégorie des groupes abéliens.

d. Catégorie des anneaux. - On la désigne par C_a ; c'est une catégorie faiblement exacte.

II. Construction de catégories à partir de catégories données.

1. Construction de catégories à partir de deux catégories données. Catégorie des morphismes de foncteurs de C dans C' .

a. Notion de foncteur

DÉFINITION. - Soient C et C' deux catégories ; un foncteur covariant (resp. contravariant) de C dans C' est une application T de C dans C' , telle que

i. Si $g.f$ est défini dans C , $T(g).T(f)$ (resp. $T(f).T(g)$) est défini dans C' et égale $T(g.f)$.

ii. Si e est une unité dans C , $T(e)$ est une unité dans C' .

PROPRIÉTÉS.

i. Si T est covariant, $T(e_f) = e_{T(f)}$ et $T(e'_f) = e'_{T(f)}$

Si T est contravariant, $T(e_f) = e'_{T(f)}$ et $T(e'_f) = e_{T(f)}$.

ii. La classe $T(C)$ des images des éléments de C est une catégorie relativement au produit défini par $T(g).T(f) = T(g.f)$ (resp. $T(f).T(g) = T(g.f)$) si T est covariant (resp. contravariant) lorsque $g.f$ est défini dans C .

iii. Si T applique biunivoquement dans C' la classe des unités de C , $T(C)$ est une sous-catégorie de C' .

b. Notion de morphisme de foncteurs.

DÉFINITION. - Soient C et C' deux catégories, S et T deux foncteurs covariants de C dans C' ; on appelle morphisme du foncteur S dans le foncteur T une application Γ de C dans C' , telle que : si $g.f$ est défini dans C , $\Gamma(g).S(f)$ et $T(g).\Gamma(f)$ sont définis dans C' , et $\Gamma(g.f) = \Gamma(g).S(f) = T(g).\Gamma(f)$

PROPRIÉTÉS.

i. Un foncteur covariant S de C dans C' est un morphisme du foncteur S en lui-même.

ii. $e'_{\Gamma(f)} = T(e'_f)$ et $e_{\Gamma(f)} = S(e_f)$.

iii. Si e est une unité dans C , $e'_{\Gamma(e)} = T(e)$ et $e_{\Gamma(e)} = S(e)$.

iv. Si Γ est une application de la classe des unités de C dans C' , telle que $e'_{\Gamma(e)} = T(e)$ et $e_{\Gamma(e)} = S(e)$ pour toute unité e de C et $\Gamma(e'_f).S(f) = T(f).\Gamma(e_f)$ pour tout morphisme f de C (S et T étant des foncteurs covariants de C dans C'), alors il existe un morphisme de S dans T , et un seul, coïncidant avec Γ sur la classe des unités de C , et défini par

$$\Gamma(f) = \Gamma(e'_f).S(f) = T(f).\Gamma(e_f)$$

pour tout morphisme f de C .

c. <u>Catégorie</u> $F(C , C')$ <u>des morphismes de foncteurs covariants de</u> C <u>dans</u> C' .

Une application Γ de C dans C' appartient à $F(C , C')$ si elle est un morphisme d'un foncteur covariant S de C dans C' , dans un foncteur covariant T de C dans C' . Soient Γ et Γ' deux éléments de $F(C , C')$; le produit $\Gamma'.\Gamma$ est défini, si Γ est un morphisme d'un foncteur S dans un foncteur T , Γ' du foncteur T dans un foncteur U ; alors $\Gamma'.\Gamma$ est le morphisme de S dans U , défini par :

$$(\Gamma'.\Gamma)(f) = \Gamma'(e'_f).\Gamma(f) = \Gamma'(f).\Gamma(e_f) .$$

$F(C , C')$, muni de cette loi de composition, est appelée catégorie des morphismes de foncteurs covariants de C dans C' , ou catégorie des C-diagrammes sur C' . Les unités de $F(C , C')$ sont les foncteurs covariants de C dans C' .

d. <u>Catégories équivalentes.</u>

PROPRIÉTÉ. - Pour que Γ soit inversible à droite (resp. à gauche), dans $F(C , C')$, il faut et il suffit que $\Gamma(e)$ soit inversible à droite (resp. à gauche) dans C' , pour toute unité e de C ; pour que Γ soit un isomorphisme dans $F(C , C')$, il faut et il suffit que $\Gamma(e)$ soit un isomorphisme dans C' pour toute unité e de C .

DÉFINITIONS.

1. On appelle équivalence entre deux catégories C et C' , le couple formé par un foncteur S de C dans C' et un foncteur T de C' dans C tels qu'il existe :

i. Dans $F(C, C)$, un isomorphisme Γ du foncteur identique de C dans le foncteur composé $T.S$.

ii. Dans $F(C', C')$, un isomorphisme Γ' du foncteur composé $S.T$ dans le foncteur identique de C',

et que les conditions suivantes soient vérifiées :

i. $\Gamma'(S(e)).S(\Gamma(e)) = S(e)$ dans C' pour toute unité e de C

ii. $\Gamma^{-1}(T(e')).T(\Gamma'^{-1}(e')) = T(e')$ dans C pour toute unité e' de C', Γ^{-1} et Γ'^{-1} désignant les inverses de Γ et de Γ' dans $F(C, C)$ et $F(C', C')$ respectivement.

2. Deux catégories C et C' sont dites équivalentes s'il existe entre elles une équivalence.

2. Construction de catégories à partir de plusieurs catégories données.

a. Notion de foncteur dépendant de plusieurs variables.

DÉFINITION. - Soient C, C', C'' trois catégories ; on appelle foncteur (à deux variables) de $C \times C'$ dans C'', covariant en C, contravariant en C', une application T de la classe $C \times C'$ dans C'', telle que :

i. Si $f'.f$ est défini dans C, $g.g'$ dans C', alors

$$T(e_{f'}, g').T(f', g).T(f, e'_g)$$

est défini dans C'' et

$$T(f'f, gg') = T(e_{f'}, g').T(f', g).T(f, e'_g)$$

ii. Si e est une unité dans C et e' une unité dans C', $T(e, e')$ est une unité dans C''.

PROPRIÉTÉ. - Ces conditions sont équivalentes à l'ensemble des conditions suivantes :

i. Si $f'.f$ est défini dans C, et si e est une unité dans C', $T(f'.f, e) = T(f', e).T(f, e)$; si $g.g'$ est défini dans C', et si e est une unité dans C, $T(e, g.g') = T(e, g').T(e, g)$.

ii. Si e est une unité dans C', $e'_{T(f,e)} = T(e'_f, e)$ et $e_{T(f,e)} = T(e_f, e)$; si e est une unité dans C, $e'_{T(e,g)} = T(e, e_g)$ et $e_{T(e,g)} = T(e, e'_g)$.

iii. $T(f, g) = T(e'_f, g).T(f, e'_g)$, $e'_{T(f,g)} = T(e'_f, e_g)$ et $e_{T(f,g)} = T(e_f, e'_g)$

EXEMPLE. - Pour toute catégorie C , H_C est un foncteur de $C \times C$ dans C_e , contravariant par rapport à la première variable, covariant par rapport à la seconde, qui, au couple (f , g) de morphismes de C , associe le morphisme $H_C(f , g)$ de C_e .

b. Catégorie dont les objets sont des catégories.

Soit $(C_i)_{i \in I}$ une classe de catégories ; si C_{i_1} , C_{i_2} , C_{i_3} sont des catégories de cette classe, S un foncteur de C_{i_1} dans C_{i_2} , et T un foncteur de C_{i_2} dans C_{i_3} , on définit un foncteur $T.S$ de C_{i_1} dans C_{i_3} en posant $(T.S)(f) = T(S(f))$ pour tout morphisme f dans C_{i_1} . La classe des foncteurs d'une catégorie quelconque dans une autre catégorie quelconque de la classe donnée, munie de cette loi de composition, est une catégorie dont les unités sont les foncteurs identiques des catégories données. (Le titre était un abus de langage).

c. Composition des foncteurs dépendant de plusieurs variables (exemples) :

i. Soit S (resp. S') un foncteur d'une catégorie C (resp. C') dans une catégorie D (resp. D') , et soit T un foncteur de $D \times D'$ dans une catégorie D'' ; le foncteur $T.(S , S')$ de $C \times C'$ dans D'' est défini par

$$(T.(S , S'))(f , g) = T(S(f) , S'(g)) .$$

ii. Soit S (resp. S') un foncteur de $C \times C'$ (resp. C'') dans D (resp. D') , et soit T un foncteur de $D \times D'$ dans D'' ; le foncteur $T.(S , S')$ de $C \times C' \times C''$ dans D'' est défini par

$$(T.(S , S'))(f , g , h) = T(S(f , g) , S'(h)) .$$

iii. Soit S (resp. S') un foncteur de C (resp. $C' \times C''$) dans D (resp. D') , et soit T un foncteur de $D \times D'$ dans D'' ; le foncteur $T.(S , S')$ de $C \times C' \times C''$ dans D'' est défini par

$$(T.(S , S'))(f , g , h) = T(S(f) , S'(g , h)) .$$

III. Notions d'algèbre homologique.

1. Le cadre de l'algèbre homologique.

a. Foncteurs exacts.

Soient C et C' des catégories exactes (ou faiblement exactes). Un foncteur T , de C dans C' , est dit :

i. exact à droite s'il transforme toute suite exacte $(f , g , 0)$ dans C en une suite exacte $(T(f) , T(g) , 0)$ dans C' .

ii. exact à gauche s'il transforme toute suite exacte $(0\ ,\ f\ ,\ g)$ dans C en une suite exacte $(0\ ,\ T(f)\ ,\ T(g))$ dans C' .

iii. exact s'il transforme toute suite exacte $(0\ ,\ f\ ,\ g\ ,\ 0)$ dans C en une suite exacte $(0\ ,\ T(f)\ ,\ T(g)\ ,\ 0)$ dans C' .

b. Hom-foncteurs [8].

Soit C une catégorie ; si K est un foncteur covariant d'une catégorie E dans la catégorie C_e , un foncteur T de $C \times C$ dans E , contravariant par rapport à la première variable, covariant par rapport à la seconde, est appelé Hom-foncteur, relativement à K , de $C \times C$ dans E , si les foncteurs H_C et $K.T$ sont isomorphes dans la catégorie $F(C \times C\ ,\ C_e)$.

c. Hom-catégories.

Soit K un foncteur covariant d'une catégorie E dans la catégorie C_e ; une Hom-catégorie, relativement à K , est un couple $(C\ ,\ \mathrm{Hom}_C)$ où C est une catégorie, et Hom_C un Hom-foncteur, relativement à K , de $C \times C$ dans E . A toute catégorie C est associé canoniquement la Hom-catégorie $(C\ ,\ H_C)$, relativement au foncteur identité de C_e dans C_e .

Si $(C\ ,\ \mathrm{Hom}_C)$ et $(C'\ ,\ \mathrm{Hom}_{C'})$ sont deux Hom-catégories, relativement à K , à tout foncteur covariant T de C dans C' est associé canoniquement un morphisme Γ_T du foncteur H_C en le foncteur composé $H_{C'}.(T\ ,\ T)$, morphisme défini de façon naturelle. Un K-foncteur de $(C\ ,\ \mathrm{Hom}_C)$ dans $(C'\ ,\ \mathrm{Hom}_{C'})$ est, par définition, un couple $(T\ ,\ \Delta_T)$ où T est un foncteur de C dans C' , et Δ_T un morphisme du foncteur Hom_C en le foncteur $\mathrm{Hom}_{C'}.T$, tels que $\Gamma_T = K.\Delta_T$.

d. Catégories additives.

Une catégorie semi-additive est une Hom-catégorie, relativement au foncteur I de C_g dans C_e qui, à tout morphisme de groupes, associe l'application d'ensembles sous-jacente. Dans une telle catégorie, les morphismes nuls sont définis de façon naturelle et satisfont partiellement à l'axiome E2 . Une catégorie est dite additive si elle est semi-additive, si elle contient un objet nul tel que l'axiome E2 soit vérifié, et si elle admet des sommes directes finies (et par conséquent des produits directs finis, isomorphes aux sommes directes). Si C et C' sont deux catégories additives, un foncteur additif T de C dans C' est par définition un I-foncteur de C dans C' ; pour un tel foncteur, Δ_T est déterminé de façon canonique. Tous les foncteurs considérés seront désormais additifs.

e. Catégories abéliennes.

Une catégorie est dite abélienne si elle est additive et exacte. Les catégories $C_{m,A}$ sont abéliennes ; en particulier, C_g est abélienne ; C_a est additive, mais seulement faiblement exacte.

2. Notion de foncteur dérivé.

a. PROPRIÉTÉ et DÉFINITION.

Soit C une catégorie abélienne dont toute unité est l'unité à droite d'un monomorphisme dont l'unité à gauche est injective. Soient C' une catégorie abélienne, T un foncteur de C dans C', et e une unité de C ; si $(0, f, k_i)_{0 \leq i < +\infty}$ est une résolution injective de e, l'homologie du complexe $(0, T(k_i))_{0 \leq i < +\infty}$ ne dépend pas de la résolution injective de e choisie ; on peut donc désigner par $(R^pT)(e)$, $0 \leq p$, les morphismes d'homologie de ce complexe ; l'application R^pT de C dans C' s'étend naturellement aux morphismes de C ; c'est un foncteur de C dans C', appelé p-ième foncteur dérivé de T.

b. PROPRIÉTÉS des foncteurs dérivés.

i. Si T est exact à gauche, $R^oT = T$

ii. Si e est injectif, ou si T est exact, $R^oT = T$ et $R^pT = 0$ pour tout $p > 0$.

iii. Si $(0, f, g, 0)$ est une suite exacte, il lui est associé de façon canonique une suite exacte :

$$\ldots \longrightarrow R^pT(e') \longrightarrow R^pT(e) \longrightarrow R^pT(e'') \longrightarrow R^{p+1}T(e') \longrightarrow \ldots$$

où $e' = e_f$, $e = e^!_f = e_g$, $e'' = e^!_g$. On exprime cette propriété en disant que la suite $(R^pT)_{0 \leq p < +\infty}$ constitue un foncteur homologique de C dans C'.

3. Détermination des foncteurs dérivés.

a. DÉFINITION. - Une unité e dans C est dite acyclique pour le foncteur T, si $(R^pT)(e) = 0$ pour tout $p > 0$.

b. PROPRIÉTÉ. - Si $(0, f, k_i)_{0 \leq i < +\infty}$ est une résolution acyclique de e (c'est-à-dire si les unités à droite des k_i sont acycliques), $(R^pT)(e)$ est, pour tout $p \geq 0$, le p-ième morphisme d'homologie du complexe $(0, T(k_i))_{0 \leq i < +\infty}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BUCHSBAUM (D. A.). - Exact categories and duality, Trans. Amer. math. Soc., t. 80, 1955, p. 1-34.

[2] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956.

[3] EHRESMANN (Charles). - Cours de Géométrie différentielle (Leçon professées à la Faculté des Sciences de Paris, Année 1956/57).

[4] EILENBERG (S.) and MACLANE (S.). - General theory of natural equivalences, Trans. Amer. math. Soc., t. 58, 1945, p. 231-294.

[5] GROTHENDIECK (Alexandre). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math. J., t. 9, 1957, p. 119-183.

[6] ISBELL (J.). - Some remarks concerning categories and subspaces, Can. J. Math., t. 9, 1957, p. 563-577.

[7] ISBELL (J.). - Algebras of uniformely continuous functions, Annals of Math. (à paraître).

[8] KAN (D. M.). - Adjoint functors, Trans Amer. math. Soc., t. 87, 1958, p. 294-329.