Séminaire Lelong.
Analyse

Pierre Dolbeault

Espaces analytiques

Séminaire Lelong. Analyse, tome 1 (1957-1958), exp. n° 4, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1957-1958__1__A3_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire d'ANALYSE
(P. LELONG)
Année 1957/58
-:-:-:-

ESPACES ANALYTIQUES

par Pierre DOLBEAULT

Les espaces analytiques ont été définis de façon différente par H. BEHNKE et K. STEIN [1] (α-espaces) d'une part, par H. CARTAN [8], J.-P. SERRE [10] (β-espaces) et CHOW d'autre part.

De nombreux problèmes ont été étudiés sur ces espaces. Par exemple, GRAUERT a défini les espaces holomorphiquement complets qui généralisent les variétés de Stein au cas où l'espace, au lieu d'être une variété, est un β-espace [2]. Un β-espace normal s'est introduit comme quotient d'une variété analytique complexe X par un groupe discontinu d'automorphismes analytiques de X (H. CARTAN [8]). Des α-espaces sont obtenus dans la théorie des décompositions analytiques des espaces analytiques complexes due à K. STEIN [11].

GRAUERT et REMMERT ont annoncé des résultats concernant les relations entre les deux notions ainsi définies [4] ; ces résultats sont démontrés dans [5].

Cet exposé a pour but de définir les notions de α-espace et de β-espace et d'énoncer leurs relations d'après Grauert-Remmert, en suivant le résumé d'un exposé récent de GRAUERT [3]. En outre un schéma détaillé du processus de normalisation d'un β-espace est exposé d'après [7] et [8].

I. Définition de Cartan-Serre : β-espaces [8], exposé 6 , [10].

1. Ensembles analytiques d'un ouvert de l'espace numérique complexe C^n .

L'espace C^n est muni de la topologie usuelle. Soit G un ouvert de C^n . Un ensemble analytique E de G est un sous-ensemble fermé de G tel que, pour tout $x \in E$, il existe des fonctions en nombre fini f_i , $i = 1 , \dots , k$, holomorphes dans un voisinage U de x dans C^n , et tel que

$$U \cap E = \{x \in U \mid f_i(x) = 0 , \quad i = 1 , \dots , k\} .$$

Alors, E muni de la topologie induite par celle de C^n est localement compact.

Les notions de dimension, d'irréductibilité et de point régulier d'un ensemble analytique, ainsi que le résultat suivant, sont supposés connus :

PROPOSITION 1. - L'ensemble K des points non réguliers d'un ensemble analytique E d'un ouvert $G \subset C^n$ est un ensemble analytique $K \subset G$; l'ensemble $E - K$ est une variété analytique complexe ; pour tout point $x \in E$, on a : $\dim_x K < \dim_x E$.

Un point $x \in E$ est dit point irréductible de E s'il existe des voisinages arbitrairement petits $U(x)$ de x dans C^n tels que $U(x) \cap E$ soit irréductible. Le germe d'ensemble analytique E_x défini par E en x est alors irréductible et réciproquement.

2. Faisceau des germes de fonctions holomorphes sur E .

Si X est un espace topologique quelconque, soit $\mathcal{C}(X)$ le faisceau des germes de fonctions sur X à valeurs dans C .

Soit $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur C^n , alors $\mathcal{O}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{C}(C^n)$. Pour tout $x \in E$, il existe un homomorphisme de restriction :

$$\varepsilon_x : \mathcal{C}_x(C^n) \to \mathcal{C}_x(E) \quad ;$$

l'image de $\mathcal{O}_x$ par ε_x est un sous-anneau $\mathcal{O}_x(E)$ de $\mathcal{C}_x(E)$ et l'ensemble des $\mathcal{O}_x(E)$ est un sous-faisceau $\mathcal{O}(E)$ de $\mathcal{C}(E)$ appelé le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur E .

Soit $I_x(E)$ le noyau de ε_x restreint à $\mathcal{O}_x$ (c'est l'idéal des germes de fonctions $f \in \mathcal{O}_x$ dont la restriction à E est nulle), on a :

$$\mathcal{O}_x(E) \approx \mathcal{O}_x / I_x(E) \ .$$

On dit encore que $\mathcal{O}_x(E)$ est l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur le germe d'ensemble analytique E_x défini par E en x et on le note $A(E_x)$; le faisceau $\mathcal{O}(E)$ sera alors noté $A(E)$.

Une fonction holomorphe sur un ouvert u de E est une section du faisceau $A(E)$ au-dessus de u . Remarquons qu'une fonction holomorphe est toujours continue.

3. Espaces annelés.

Soient X un espace topologique et $\mathcal{S}$ un sous-faisceau d'anneaux commutatifs unitaires de $\mathcal{C}(X)$, alors, le couple $(X , \mathcal{S})$ (ou, pour abréger X) est appelé un espace annelé ; $\mathcal{S}$ est appelé faisceau structural de X.

Morphismes. - Soient $(X_1 , \mathcal{S}_1)$ et $(X_2 , \mathcal{S}_2)$ deux espaces annelés, alors, une application

$$\varphi : X_1 \to X_2$$

est appelée un morphisme si :

1° φ est continue ;

2° U_2 étant un ouvert de X_2 et f_2 une section de $\mathcal{S}_2$ au-dessus de U_2, alors :

$$f_1 = f_2 \circ \varphi$$

est une section de $\mathcal{S}_1$ au-dessus de l'ouvert $U_1 = \varphi^{-1}(U_2)$.

Un morphisme φ est appelé un bimorphisme (ou isomorphisme) si φ et φ^{-1} sont des morphismes.

En particulier, si E est un ensemble analytique d'un ouvert G de C^n, le couple $(E , A(E))$ est un espace annelé.

4. β-espace.

Un espace annelé (X , O) est β-espace analytique ou β-espace si :

1° X est séparé ;

2° pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $U(x)$ qui, muni de la topologie de X et du faisceau induit par O, soit isomorphe à l'espace annelé $(E , A(E))$ où E est un ensemble analytique d'un ouvert de C^n.

Le faisceau O sera appelé le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X.

Si X et Y sont deux espaces analytiques, tout morphisme $\varphi : X \to Y$ sera appelé une application holomorphe de X dans Y.

Si V est un ouvert de X on appelle carte de V tout isomorphisme de V sur un ensemble analytique E d'un ouvert G d'un espace numérique complexe.

D'après la définition d'un β-espace, tout point $x \in X$ appartient à un ouvert V ayant une carte.

Si X est un β-espace, un sous-ensemble Y de X est dit analytique si, pour toute carte $\varphi : V \to E \subset G$, l'image $\varphi(Y \cap V)$ est un ensemble analytique de G contenu dans E ; alors, Y est muni d'une structure de β-espace induite.

$\varphi : V \to E$ étant une carte au voisinage d'un point $x \in X$, alors, par définition :

- la dimension de X en x ($\dim_x X$) est égale à $\dim_{\varphi(x)} E$;
- le point $x \in X$ est régulier si $\varphi(x)$ est un point régulier de E ;
- le point $x \in X$ est irréductible si $\varphi(x)$ est un point irréductible de E ;

cela équivaut au fait que O_x est un anneau d'intégrité. Un β-espace dont tous les points sont irréductibles est dit β_i-espace.

Il résulte alors de la proposition 1 :

PROPOSITION 2. - L'ensemble K des points non réguliers d'un β-espace X est un sous-ensemble analytique de X. En tous les points $x \in K$, on a : $\dim_x K < \dim_x X$, et l'ensemble $X - K$ est une variété analytique complexe.

5. Espaces normaux.

Le β-espace X est dit normal en x si l'anneau O_x est intégralement clos dans son anneau de fractions.

PROPOSITION 3. - Si un β-espace X est normal en un point x, alors x est un point irréductible de X.

DÉMONSTRATION (communiquée par R. REMMERT). - En utilisant une carte, il suffit de démontrer la proposition lorsque X est un ensemble analytique d'un ouvert G de C^n. Si $x \in E$ est un point non irréductible, il existe un élément z de l'anneau des fractions de $A(E_x)$, entier sur $A(E_x)$ qui n'appartient pas à $A(E_x)$, donc E n'est pas normal en x. En effet, soit $E_x = E_1 \cup E_2$, où E_1 et E_2 sont deux germes d'ensembles analytiques distincts de E_x. Le germe de fonction z égal à 1 sur E_1 et à 0 sur E_2 n'appartient pas à $A(E_x)$ puisque, en x, il a deux valeurs distinctes, cependant :

1° z satisfait à $z^2 - z = 0$, donc est entier sur $A(E_x)$;

2° soit f_1 (resp. f_2) $\in \mathcal{O}_x$ qui s'annule sur E_1 (resp. sur E_2), alors la restriction de $f_2/(f_1 + f_2)$ appartient à l'anneau des fractions de $A(E_x)$, et définit le germe z .

Un β-espace est dit *normal* (ou β_n-espace) s'il est normal en chacun de ses points. Ainsi tout *β_n-espace est un β_i-espace.*

6. *Normalisation d'un β-espace* [6], [8].

Soit X un β-espace et soit K l'ensemble des points non réguliers de X . Un couple $(\hat{X}, \mu)$ est appelé *revêtement canonique d'un β-espace* X si :

1° $\hat{X}$ est un espace topologique *séparé* ; $\mu : \hat{X} \to X$ est une application continue *propre* (i.e. : l'image réciproque, par μ , de tout compact est un compact), *non dégénérée* (i.e. : telle que, pour $x \in X$, l'ensemble $\mu^{-1}(x)$ soit discret) ;

2° $\mu : \hat{X} - \mu^{-1}(K) \to X - K$ est un *homéomorphisme surjectif* ;

3° $\mu^{-1}(K)$ est *partout non dense dans* $\hat{X}$ *et ne sépare nulle part* $\hat{X}$ (i.e. si D est un ouvert connexe contenu dans $\hat{X}$, alors $D - \mu^{-1}(K)$ est connexe).

PROPOSITION 4. - *Pour chaque β-espace* X , *il existe un revêtement canonique* (X , μ) *qui est déterminé de façon unique à un homéomorphisme près* ; *l'application* $\mu : \hat{X} \to X$ *est un homéomorphisme si et seulement si* X *est un β_i-espace.*

THÉORÈME 1. - *Soit* $(\hat{X}, \mu)$ *le revêtement canonique d'un β-espace* ; *alors* $\hat{X}$ *possède un faisceau structural et un seul* $\hat{\mathcal{O}}$, *tel que* $(\hat{X}, \hat{\mathcal{O}})$ *soit un β_n-espace et que* $\mu : \hat{X} \to X$ *soit une application holomorphe. L'espace* $\hat{X} - \mu^{-1}(K)$ *est une variété analytique complexe ; l'application* $\mu : \hat{X} - \mu^{-1}(K) \to X - K$ *est biholomorphe.*

Le β-espace $(\hat{X}, \hat{\mathcal{O}})$ est appelé *la normalisation de* $(X, \mathcal{O})$.

Il suffit de démontrer la proposition 4 et le théorème 1 sur une carte, donc de supposer que X est un ensemble analytique d'un ouvert de C^n . Les numéros 7, 8 et 9 ont pour objet de donner le schéma des démonstrations.

7. Construction du revêtement canonique. Cas d'un ensemble analytique principal ([8], exposés 7, 8, 8 bis).

Soit X une variété analytique complexe ; soit $\mathcal{G}(X)$ l'ensemble de tous les germes d'ensembles analytiques irréductibles en tous les points de X muni de la topologie suivante : dans un ouvert de X, soit E un ensemble analytique et soit $\tilde{E}$ l'ensemble de toutes les composantes irréductibles des germes E_x définis par E aux points $x \in E$; par définition, les parties $\tilde{E}$ de $\mathcal{G}(X)$ constituent un système fondamental d'ouverts de la topologie de $\mathcal{G}(X)$.

En particulier, si E est un ensemble analytique de X, l'ensemble $\tilde{E}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{G}(X)$ est tel que la projection canonique $\pi : \tilde{E} \to E$ qui applique une composante irréductible d'un germe E_x sur le point x soit continue.

Supposons, d'abord, que E soit un ensemble analytique principal (i.e. défini au voisinage de chaque point par une seule équation), on montre facilement que $\tilde{E}$ a une topologie séparée, et que l'application $\pi : \tilde{E} \to E$ est propre, en particulier, $\tilde{E}$ est localement compact ; d'après la définition de $\tilde{E}$, l'application π est non dégénérée. Si K est l'ensemble des points non réguliers de E, alors, la restriction de π à $\tilde{E} - \pi^{-1}(K)$ est biunivoque puisque tout point régulier est irréductible et, puisque $\tilde{E}$ est localement compact, c'est un homéomorphisme surjectif.

Dans tout ouvert U de $\tilde{E}$, on appelle fonction holomorphe toute fonction f définie et continue dans U qui, en tout point x de $U \cap (\tilde{E} - \pi^{-1}(K))$ induit un germe égal à $g.\pi$ où g est un germe de fonction holomorphe sur E en x. Les fonctions holomorphes dans U constituent un anneau commutatif unitaire $A(\tilde{E}_U)$. Etant donné un point $\tilde{a} \in \tilde{E}$, la limite inductive des $A(\tilde{E}_U)$ où les U sont les voisinages ouverts de $\tilde{a}$ est, par définition, l'anneau $A(\tilde{E}_{\tilde{a}})$ des germes de fonctions holomorphes en $\tilde{a}$. On voit que l'ensemble des anneaux $A(\tilde{E}_{\tilde{a}})$ constitue un faisceau $A(\tilde{E})$, que le couple $(\tilde{E}, A(\tilde{E}))$ est un espace annelé et que $\tilde{E} - \pi^{-1}(K)$ est une variété analytique complexe.

On appelle point régulier de $\tilde{E}$ un point au voisinage duquel l'espace annelé $(\tilde{E}, A(\tilde{E}))$ est une variété analytique complexe ; alors, l'ensemble des points non réguliers est contenu dans $\pi^{-1}(K)$.

PROPOSITION 5. - Tout point de l'espace $\tilde{E}$ possède un système fondamental de voisinages ouverts dont l'intersection avec l'ensemble des points réguliers est connexe.

Cela résulte du fait que $\tilde{E}$ possède aussi cette propriété puisque l'ensemble des points non réguliers de E dans un voisinage U de chaque point $x \in E$ est contenu dans l'ensemble des zéros du discriminant du polynôme distingué dont U est le lieu des zéros.

PROPOSITION 6. - <u>L'anneau $A(\tilde{E}_{\tilde{a}})$ est un anneau d'intégrité.</u>

En effet, en un point régulier $\tilde{a} \in \tilde{E}$, l'anneau $A(\tilde{E}_{\tilde{a}})$ est d'intégrité ; la propriété reste vraie en un point quelconque à cause de la proposition 5.

On appelle <u>composé direct</u> des anneaux $A_1, \ldots, A_p$ l'anneau dont les éléments sont les p-tuples $(u_1, \ldots, u_p)$ $(u_i \in A_i)$, et dont les lois de composition sont définies ainsi : u_i et v_i étant des éléments de A_i :

$$(u_1, \ldots, u_p) + v_1, \ldots, v_p) = (u_1 + v_1, \ldots, u_p + v_p) \ ;$$

$$(u_1, \ldots, u_p).(v_1, \ldots, v_p) = (u_1 v_1, \ldots, u_p v_p) \ .$$

Soit $a \in E$, l'ensemble $\pi^{-1}(a)$ se compose d'un nombre fini de points $\tilde{a}_i \in \tilde{E}$; appelons $\tilde{A}(E_a)$ l'anneau composé direct des anneaux $A(\tilde{E}_{\tilde{a}_i})$, en particulier, si a est un point irréductible de E, on a : $\tilde{A}(E_a) = A(\tilde{E}_{\tilde{a}})$.

THÉORÈME 2 ([8], exposé 7). - <u>L'anneau $\tilde{A}(E_a)$ est la clôture intégrale de $A(E_a)$; c'est un anneau noethérien et un module de type fini sur $A(E_a)$. Si le germe E_a est irréductible, il existe un entier m et un idéal J de l'anneau H_m des séries à m variables convergentes en 0 tels que $\tilde{A}(E_a) \approx H_m/J$.</u>

La démonstration repose, en particulier, sur le lemme suivant :

LEMME 1. - <u>Après une éventuelle transformation linéaire de coordonnées en a, le germe E_a étant défini par l'équation $P(z ; x_1, \ldots, x_k) = 0$, où P est un polynôme distingué en z, tout élément $f \in \tilde{A}(E_a)$ satisfait à une relation $\overline{(\partial P(z)/\partial z)} f = \overline{Q(z)}$ où $\overline{\partial P(z)/\partial z}$ est la restriction à $\tilde{E}$ du polynôme $\partial P/\partial z$ et où $\overline{Q(z)}$ est la restriction à $\tilde{E}$ d'un polynôme de degré $\leq \deg P(z) - 1$, à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_k$ au voisinage de l'origine.</u>

8. <u>Cas d'un ensemble analytique quelconque</u> ([8], exposés 8, 8 bis).

Soit E_a un germe d'ensemble analytique <u>irréductible</u>, de dimension q, d'une variété analytique complexe de dimension n (ou, ce qui revient au même, de C^n). On sait, qu'après une éventuelle transformation linéaire de coordonnées, il existe un polynôme distingué irréductible $P(z_{q+1} ; z_1 , \dots , z_q)$ de degré h et des polynômes $Q_i(z_{q+1} ; z_1 , \dots , z_q)$ distingués de degré $\leq h - 1$ tels que E_a soit l'adhérence, dans C^n, du lieu des zéros des polynômes $P(z_{q+1} ; z_1 , \dots , z_q)$ et $(\partial P/\partial z_{q+1}) z_i - Q_i$, pour $i = q + 2 , \dots , n$.

Soit V_v le germe d'ensemble analytique principal défini, dans C^{q+1}, par $P(z_{q+1} ; z_1 , \dots , z_q) = 0$ et soit p l'application qui envoie le point de coordonnées $(z_1 , \dots , z_n)$ de E_a sur le point de coordonnées $(z_1 , \dots , z_{q+1})$ de V_v.

THÉORÈME 3. - Il existe un germe d'homéomorphisme $\tilde{p}$ du germe d'ensemble analytique irréductible $\tilde{E}_a$ sur $\tilde{V}_v$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \tilde{E}_a \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \tilde{V}_v \arrow[d, "\pi_2"] \\ E_a \arrow[r, "p"] & V_v \end{tikzcd}$$

où π_1 et π_2 désignent les projections canoniques, soit commutatif.

DÉMONSTRATION abrégée. - D'après le lemme 1, les clôtures intégrales de $A(E_a)$ et de $A(V_v)$ sont identiques, donc la clôture intégrale $\tilde{A}(E_a)$ de $A(E_a)$ est canoniquement isomorphe à $A(\tilde{V}_v)$. Les fonctions $z_1 , \dots , z_n$ sont holomorphes sur $\tilde{V}_v$, on définit un germe d'application $\varphi : \tilde{V}_v \to E_a$ en faisant correspondre à tout point M de $\tilde{V}_v$ le point de C^n dont les coordonnées sont les valeurs de $z_1 , \dots , z_n$ en M.

L'image réciproque, par p, de l'ensemble des points singuliers de V_v dans E_a est contenue dans l'ensemble des points où $\partial P/\partial z_{q+1} \neq 0$, donc est dense ; on montre alors qu'il existe une application continue $\tilde{p}$ et une seule telle que le diagramme de l'énoncé soit commutatif.

L'image réciproque, par φ, de l'ensemble des points réguliers de E_a étant dense dans $\tilde{V}_v$, on montre qu'il existe une application continue $\tilde{\varphi}$ déterminée de façon unique telle que $\varphi = \pi_1 \circ \tilde{\varphi}$. Alors, $\tilde{\varphi} \circ \tilde{p}$ (resp. $\tilde{p} \circ \tilde{\varphi}$) est l'application identique de $\tilde{E}_a$ (resp. $\tilde{V}_v$) sur lui-même, donc $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{p}$ sont des homéomorphismes inverses l'un de l'autre.

Le théorème 3 et les propriétés de E établies au n° 7 lorsque E est principal montrent que $\tilde{E}$ et la projection $\tilde{E} \to E$ définie en chaque point a par π_1 constituent un revêtement canonique de E et établissent la proposition 4 pour E .

9. Normalisation d'un ensemble analytique d'un ouvert de C^n [8].

Un faisceau d'anneaux $\mathcal{F}$ défini sur une variété analytique complexe M est dit analytique si, désignant par $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur M, pour tout point $x \in M$, l'anneau $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_x$-module.

Soient $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux commutatifs unitaires sur M et $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{A}$-modules sur M ; soient $s_1 , \dots , s_p$ des sections de $\mathcal{F}$ au-dessus d'un ouvert $U \subset M$, soit φ l'homomorphisme $\mathcal{A}^p(U) \to \mathcal{F}(U)$ qui applique $(f_1 , \dots , f_p) \in \mathcal{A}^p_x$ $(x \in U)$ dans $\sum_{i=1}^{p} f_i\, s_i(x) \in \mathcal{F}_x$. Le noyau $\mathcal{R}(s_1 , \dots , s_p)$ de l'homomorphisme φ est une sous-faisceau de $\mathcal{A}^p$ appelé le faisceau des relations entre les s_i (sur U).

Un faisceau de $\mathcal{A}$-modules $\mathcal{F}$ est dit de type fini s'il est localement engendré par un nombre fini de ses sections ([9], p. 207).

Un faisceau de $\mathcal{A}$-modules $\mathcal{F}$ est dit cohérent ([9], p. 207) si :

a. $\mathcal{F}$ est de type fini ;

b. si $s_1 , \dots , s_p$ sont des sections de $\mathcal{F}$ au-dessus d'un ouvert $U \subset M$, le faisceau des relations entre les s_i est un faisceau de type fini.

Etant donné un ensemble analytique W d'une variété anlytique complexe M on lui associe le faisceau $I(W)$ défini ainsi :

pour $z \notin W$, soit $I_z(W) = \mathcal{O}_z(M)$;

pour $z \in W$, soit $I_z(W)$ l'idéal des éléments de $\mathcal{O}_z(M)$ qui s'annulent identiquement sur le germe W_z, alors, on a :

THÉORÈME 4. - Le faisceau $I(W)$ est un faisceau cohérent.

Pour la démontration, voir [7], exposé 16.

CONSÉQUENCE. - Le faisceau $A(W) = \mathcal{O}(M)/I(W)$ est un faisceau cohérent.

Soit E un ensemble analytique d'un ouvert U de C^n. Utilisant les notations du n° 8, on appellera germe de fonction holomorphe sur $\tilde{E}_a$ tout germe $g = f.\tilde{p}$, où $f \in A(\tilde{V}_v)$; les germes de fonctions holomorphes sur $\tilde{E}_a$ ont donc la même définition que lorsque E_a est principal. L'ensemble des germes g est un anneau isomorphe à $A(\tilde{V}_v)$ qu'on notera $A(\tilde{E}_a)$.

Pour tout $x \in U$, on pose :

$$\tilde{A}_x(E) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin E, \\ \tilde{A}(E_x) \text{ si } x \in E. \end{cases}$$

$\tilde{A}_x(E)$ est un $\mathcal{O}_x(C^n)$-module ; la réunion $\tilde{A}(E)$ des $\tilde{A}_x(E)$ a une structure de faisceau analytique sur U, la topologie sur $\tilde{A}(E)$ étant définie de la façon suivante : pour tout ouvert u de U et toute fonction holomorphe f sur l'ouvert de $\tilde{E}$ image réciproque de $E \cap u$ pour la projection canonique $\tilde{E} \to E$, l'ensemble des éléments induits par f sur chacun des $\tilde{A}_x(E)$ pour $x \in u$ définit un ouvert de la topologie de $\tilde{A}(E)$; les ouverts ainsi définis constituent un système fondamental d'ouverts de cette topologie.

THÉORÈME 5 (OKA). - <u>Le faisceau</u> $\tilde{A}(E)$ <u>est un faisceau analytique cohérent</u>.

Pour la démonstration, voir [8], exposé 10 et 11.

Soit $x \in E$ et soit $\tilde{x}_i$ un point de $\tilde{E}$ qui se projette sur x, de sorte que $\tilde{E}_{\tilde{x}_i}$ est une composante irréductible de E_x ; l'anneau $\tilde{A}(E_x)$ est le composé direct des anneaux intégralement clos $A(\tilde{E}_{\tilde{x}_i})$; à chaque composante irréductible $\tilde{E}_{\tilde{x}_i}$ est associée, dans le théorème 3, une composante irréductible $\tilde{V}_{\tilde{v}_i}$ de V_v ; d'après le théorème 2, il existe un entier m_i et un idéal J_i de H_{m_i} tel que l'anneau $A(\tilde{E}_{\tilde{x}_i}) \approx A(\tilde{V}_{\tilde{v}_i})$ soit isomorphe à H_{m_i}/J_i. Soit $\check{E}^i$ un ensemble analytique d'un ouvert U^i de C^{m_i} définissant le germe $\check{E}^i_{y_i}$ de l'idéal J_i ; l'anneau H_{m_i}/J_i est l'anneau $A(\check{E}^i_{y_i})$ des germes de fonctions holomorphes sur $\check{E}^i_{y_i}$.

Soit $\tilde{A}^i(E)$ le sous-faisceau de $\tilde{A}(E)$ dont les seuls éléments non nuls sont les germes de fonctions holomorphes sur une composante de $\tilde{E}$ induisant le seul germe irréductible E_{x_i}. Le faisceau $A(E)$ étant cohérent (théorème 5), il en est de même de son sous-faisceau de type fini $\tilde{A}^i(E)$ ([9], p 208).

Considérons le faisceau $A(\check{E}^i) = \mathcal{O}(U^i)/I(\check{E}^i)$ dans les notations de la conséquence du théorème 4 ; on a : $I_{y_i}(\check{E}^i) \approx J_i$. Le faisceau $A(\check{E}^i)$ est cohérent d'après la conséquence du théorème 4 et $\tilde{A}^i_x(E) \approx A(\tilde{E}_{\tilde{x}_i}) \approx A_{y_i}[\check{E}^i]$, donc les deux faisceaux cohérents $\tilde{A}^i(E)$ et $A(\check{E}^i)$ sont isomorphes sur tout un voisinage de x.

L'isomorphisme ci-dessus définit un isomorphisme d'un voisinage de $\tilde{x}_i$ de l'espace annelé $(\check{E}^i, \tilde{A}^i(E))$ sur un voisinage de y_i de l'espace annelé $(\check{E}^i, A(\check{E}^i))$; ce dernier est un ensemble analytique d'un ouvert de C^{n_i} muni du faisceau de ses germes de fonctions holomorphes.

L'espace annelé $(\tilde{E}, \tilde{A}(E))$ est donc un β-espace ; de plus, comme $A(\tilde{E}_{\tilde{x}})$ est intégralement clos en tout point $\tilde{x} \in \tilde{E}$, c'est un espace normal.

Enfin, l'application de $\tilde{E}$ sur E définie par π_1 en tout point de $\tilde{E}$ est un morphisme, donc définit une application holomorphe de $\tilde{E}$ sur E.

Cela établit le théorème 1 pour E, donc pour tout β-espace.

II. Définition de Behnke-Stein : α-espaces [1].

1. Revêtements analytiques [3], [4].

Soit Y un domaine connexe de C^n (ou plus généralement une variété analytique complexe connexe de dimension n). Un triple $\mathcal{Y} = (\hat{Y}, \Phi, Y)$ est appelé un revêtement analytique de Y si :

a. $\hat{Y}$ est un espace séparé, localement compact ; $\Phi : \hat{Y} \to Y$ est une application continue et propre de $\hat{Y}$ sur Y ; tout ensemble $\Phi^{-1}(y_0)$, $y_0 \in Y$ est fini ;

b. Il existe un ensemble analytique $A \subset Y$ de dimension complexe $\leq n-1$ tel que :

$$\Phi : \hat{Y} - \Phi^{-1}(A) \to Y - A$$

soit un homéomorphisme local ; tout point $y_1 \in \Phi^{-1}(A)$ possède une base de voisinages connexes V_ι tels que $V_\iota - (\Phi^{-1}(A) \cap V_\iota)$ soit non vide et connexe.

Il résulte de la définition que le revêtement, au-dessus de $Y - A$, est non ramifié et que le nombre de points de $\Phi^{-1}(y_0)$ pour $y_0 \in Y - A$ est fixe ; on l'appelle le nombre de feuillets du revêtement. Les points $y \in \hat{Y}$ en lesquels Φ n'est pas un homéomorphisme local sont appelés les points de ramification de $\mathcal{Y}$; soit B l'ensemble de ces points, alors, $\Phi(B) \subset A$.

On démontre [3] :

PROPOSITION 7. - $\Phi(B)$ est un ensemble analytique de dimension $n-1$.

PROPOSITION 8. - Soit $\mathcal{Y}' = (\hat{Y}', \Phi', Y - A)$ un revêtement analytique non ramifié, où A est un ensemble analytique de Y de dimension $< \dim Y$; alors $\mathcal{Y}'$ peut être prolongé en un revêtement analytique de Y, de façon unique, à un isomorphisme près.

2. Fonctions holomorphes [3].

Soient $\mathcal{Y} = (\hat{Y}, \Phi, Y)$ un revêtement analytique de Y, B l'ensemble des points de ramification, D un ouvert de $\hat{Y}$, f une fonction à valeurs complexes dans D ; f est dite holomorphe dans D si :

1° f est continue dans D ;

2° si $y_0 \in D - B$ et si $U(y_0)$ est un voisinage de y_0 appliqué homéomorphiquement sur un voisinage V de $z_0 = \Phi(y_0)$, alors $f \Phi^{-1}(z)$ est holomorphe dans V.

L'ensemble des germes de fonctions holomorphes sur $\hat{Y}$ constitue un faisceau 0 et $(\hat{Y}, 0)$ est un espace annelé.

3. α-espace.

Un espace annelé $(X, 0)$ est un α-espace si :

1° X est séparé ;

2° en chaque point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $U(x)$ qui, muni de la topologie de X et du faisceau induit par 0 soit isomorphe à l'espace annelé constitué par l'espace de revêtement d'un revêtement analytique muni du faisceau des germes de fonctions holomorphes.

PROPOSITION 9. - Le théorème de prolongement de Riemann est valable pour les α-espaces [3], [1].

III. Relations entre les α-espaces et les β-espaces [3], [4], [5].

D'après le théorème d'immersion de Remmert-Stein [6] et le théorème de prolongement de Riemann, on a :

PROPOSITION 10. - Tout β_n-espace est un α-espace.

Un revêtement analytique $(\hat{Y}, \Phi, Y)$ est appelé un revêtement de Cartan si, en chaque point $z_0 \in Y$, il existe un voisinage $V(z_0) \subset Y$ et, dans $U = \Phi^{-1}(V)$, une fonction holomorphe g telle que $A(V)$ désignant l'anneau des fonctions holomorphes sur V, le degré $(g : A(V))$ soit égal au nombre b de feuillets du revêtement (i.e. que g soit définie par un polynôme unitaire irréductible de degré b à coefficients dans $A(V)$).

Un α-espace qui est localement isomorphe à un revêtement de Cartan est appelé un α_c-espace.

On démontre [3] :

PROPOSITION 11. - Tout β_n-espace est un α_c-espace.

Inversement, en utilisant le théorème 5, on prouve :

PROPOSITION 12. - Tout α_c-espace est un β_n-espace.

GRAUERT et REMMERT ont montré :

THÉORÈME 6. - Tout revêtement analytique est un revêtement de Cartan [4], [5].

D'où, à l'aide des propositions 11 et 12 :

THÉORÈME 7. - Les classes des α-espaces et des β_n-espaces sont identiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEHNKE 5H.) und STEIN (K.). - Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete, Math. Annalen, t. 124, 1951, p. 1-16.

[2] GRAUERT (Hans). - Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume, Math. Annalen, t. 129, 1955, p. 233-259.

[3] GRAUERT (Hans). - Complex spaces, Seminar on complex analysis (Octobre 1957). - Princeton, Institute for advanced Study.

[4] GRAUERT (H.) et REMMERT (R.). - Sur les revêtements analytiques des variétés analytiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 918-921.

[5] GRAUERT (H.) und REMMERT (R.). - Über den Begriff des komplexen Raumes, Math. Annalen, 1958 (à paraître).

[6] REMMERT (R.) und STEIN (K.). - Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen, Math. Annalen, t. 126, 1953, p. 263-306.

[7] Séminaire H. CARTAN, Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, t. 4, 1951/52.

[8] Séminaire H. CARTAN, Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes, t. 6, 1953/54.

[9] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., t. 61, 1955, p. 197-278.

[10] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-56, p. 1-42.

[11] STEIN (Karl). - Analytische Zerlegungen komplexer Räume, Math. Annalen, t. 132, 1956, p. 63-93.