Pierre Samuel

Algèbre locale et ensembles analytiques

Séminaire Lelong. Analyse, tome 1 (1957-1958), exp. n° 2, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1957-1958__1__A2_0>

ALGÈBRE LOCALE ET ENSEMBLES ANALYTIQUES

par Pierre SAMUEL

On suppose connues les notions algébriques élémentaires sur les corps, anneaux, idéaux, anneaux noethériens, et éléments entiers. Afin de ne pas rompre le fil de l'exposé, les résultats algébriques moins élémentaires qui seront nécessaires seront seulement énoncés et désignés par des majuscules ((A), (B), ...) ; dans une section finale intitulée "Justifications algébriques" on donne, soit leur démonstration si elle est courte ou peu accessible, soit des références dans le cas contraire.

Un ensemble analytique (au voisinage de 0 dans C^n, nous nous occuperons plutôt ici de germes d'ensembles analytiques) est, rappelons-le, défini par une famille d'équations $F_j(z_1, \ldots, z_n) = 0$, où les F_j sont des séries entières convergentes dans un voisinage (nonprécisé) de 0. Nous allons passer en revue quelques notions algébriques qui se rapportent à cette situation.

1. Le théorème de préparation et ses conséquences algébriques.

Il est facile de voir que les séries entières en $z_1, \ldots, z_n$ qui sont convergentes au voisinage de 0 forment un anneau $\mathfrak{o}_n$, que celles qui sont nulles en 0 forment un idéal $\mathfrak{m}_n$ (d'ailleurs engendré par $z_1, \ldots, z_n$) et que les autres sont inversibles. En d'autres termes $\mathfrak{o}_n$ est un anneau *local*, et $\mathfrak{m}_n$ est son idéal maximal. Nous allons montrer que $\mathfrak{o}_n$ est *noethérien* et *factoriel* (c'est-à-dire que tout élément de $\mathfrak{o}_n$ se décompose de façon essentiellement unique, en un produit d'éléments irréductibles). Pour cela on utilise le

THÉORÈME de préparation de Weierstrass. - *Soit* $F(z_1, \ldots, z_n)$ *une série convergente sans terme constant telle que* $F(0, \ldots, 0, z_n) \neq 0$; *notons* s *l'ordre* (> 0) de $F(0, \ldots, 0, z_n)$. *Pour tout* $G \in \mathfrak{o}_n$ *il existe des séries convergentes* $U(z_1, \ldots, z_n)$ *et* $V_j(z_1, \ldots, z_{n-1})$ $(j = 0, \ldots, s-1)$, *déterminées de façon unique, telles que*

$$(1) \qquad G(z_1,\dots,z_n) = U(z_1,\dots,z_n)F(z_1,\dots,z_n) + \sum_{j=0}^{s-1} V_j(z_1,\dots,z_{n-1})z_n^j$$

DÉMONSTRATION succincte. - On détermine d'abord une série formelle U vérifiant (1) (c'est-à-dire telle qu'il existe des V_j vérifiant (1)), puis on montre qu'elle est convergente, les V_j, qui sont alors les coefficients des z_n^j dans $G - UF$, sont alors convergentes. Pour déterminer U, posons, pour tout $P \in \mathcal{O}_n$, $P = r(P) + z_n^s h(P)$ où aucun terme de la série $r(P)$ n'a z_n^s en facteur. Les applications $P \longrightarrow r(P)$ et $P \longrightarrow h(P)$ sont $\mathcal{O}_{n-1}$-linéaires. La relation (1) équivaut à $h(G) = h(UF)$, c'est-à-dire à $h(G) = h(Ur(F)) + Uh(F)$. Posons $W = Uh(F)$, $M = -r(F)/h(F)$, et, pour tout $P \in \mathcal{O}_n$, $m(P) = h(MP)$; soit $H = h(G)$; il s'agit de trouver W tel que $W = H + m(W)$. Comme $M \in \mathfrak{M}_n$ l'application m applique $\mathfrak{M}_n^q$ dans $\mathfrak{M}_n^{q+1}$, et on voit que $W = H + m(W)$ a une solution unique donnée par

$$(2) \qquad W = H + m(H) + m^2(H) + \dots + m^q(H) + \dots$$

(le second membre a un sens puisque la série $m^q(H)$ est d'ordre $\geqslant q$). Comme $u = W/h(F)$ et que $h(F)$ est convergente, il suffit de montrer la convergence de W. Ceci se fait par la méthode des majorantes : on majore H par

$$H' = b(1 - (z_1/a))^{-1} \dots (1 - (z_{n-1}/a))^{-1} f(z_n/a)$$

(où $f(x)$ est une série majorant $(1-x)^{-1}$, qui sera définie plus loin), M par

$$M' = b(z_1 + \dots + z_{n-1})(1 - (z_1/a))^{-1} \dots (1 - (z_n/a))^{-1} ,$$

et on note m' l'application $P \longrightarrow h(M'P)$. Alors

$$W' = H' + m'(H') + m'^2(H') + \dots$$

majore W. La convergence de W' va résulter du fait que, si $h(f(x)/(1-x))$ est un multiple scalaire de $f(x)$, W' se calcule élémentairement et est une fonction rationnelle. Or l'équation

$$1 - 2^{s+1}x^s + 2^{s+1}x^{s+1} = 0$$

a les racines $1/2$ et $1/c$ $(c > 1)$; si l'on prend

$$f(x) = (1-x)(1-2x)^{-1}(1-cx)^{-1} ,$$

$f(x)$ majore $(1-x)^{-1}$, et il existe un polynome $R_{s-1}(x)$ de degré $s-1$ tel que

$$f(x) = (1-x)R_{s-1}(x)(1 - 2^{s+1}x^s + 2^{s+1}x^{s+1})^{-1} ,$$

d'où

$$f(x)(1-x)^{-1} = R_{s-1}(x) + 2^{s+1}x^s f(x) ,$$

et

$$h(f(x)(1-x)^{-1}) = 2^{s+1}f(x) .$$

C.Q.F.D.

On dira qu'une série entière $F \in \mathcal{O}_n$ est <u>régulière</u> si $F(0, \ldots, 0, z_n) \neq 0$. Pour toute série $F \neq 0$, il existe un automorphisme σ de $\mathcal{O}_n$ tel que $\sigma(F)$ soit régulière : il suffit de prendre pour σ un "changement de variables linéaire". Il en résulte que, étant donné un système fini (F_i) de séries, il existe un automorphisme σ tel que les $\sigma(F_i)$ soient toutes régulières (raisonner sur le produit des F_i).

On appelle <u>polynome distingué</u> toute série convergente de la forme

$$z_n^s + \sum_{j=0}^{s-1} V_j(z_1, \ldots, z_{n-1})z_n^j \tag{3}$$

où les V_j sont des séries sans terme constant. Rappelons que deux éléments d'un anneau d'intégrité $\mathcal{O}$ sont dits <u>associés</u> si leur quotient est inversible dans $\mathcal{O}$.

COROLLAIRE au théorème de préparation. - <u>Soient</u> F <u>une série régulière et</u> s <u>l'ordre de</u> $F(0, \ldots, 0, z_n)$. <u>Alors</u> F <u>est associée à un polynome distingué et à un seul.</u>

On applique en effet le théorème de préparation au cas $G = z_n^s$. La comparaison, dans (1), des termes en z_n^s montre que U a son terme constant non nul, donc est inversible ; celle des termes en $z_n^j (j = 0, \ldots, s-1)$ montre que les $V_j(z_1, \ldots, z_{n-1})$ sont sans terme constant. L'unicité résulte de l'unicité dans (1).

THÉORÈME 2. - <u>L'anneau</u> $\mathcal{O}_n$ <u>des séries convergentes à</u> n <u>variables est noethérien.</u>

On procède par récurrence sur n, le cas $n = 0$ étant trivial. Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de $\mathcal{O}_n$; il s'agit de montrer qu'il admet un système fini de générateurs, et, pour cela, on peut supposer $\mathfrak{I} \neq (0)$. Par automorphisme de $\mathcal{O}_n$, on peut supposer que $\mathfrak{I}$ contient une série régulière F. Alors (1), appliqué aux éléments G de $\mathfrak{I}$, montre qu'on a $\mathfrak{I} = \mathcal{O}_n F + \mathfrak{J}$, où $\mathfrak{J}$ est le $\mathcal{O}_{n-1}$-module

$$(\mathcal{O}_{n-1} + \mathcal{O}_{n-1}z_n + \ldots + \mathcal{O}_{n-1}z_n^{s-1}) \cap \mathfrak{I} ;$$

comme $\mathcal{O}_{n-1}$ est nothérien par hypothèse de récurrence, le module $\mathfrak{I}$ est de type fini. Donc $\mathfrak{I}$ admet un système fini de générateurs.

THÉORÈME 3. - L'anneau $\mathcal{O}_n$ est factoriel.

On procède encore par récurrence sur n, le cas $n = 0$ étant trivial. Comme $\mathcal{O}_n$ est noethérien, toute $F \in \mathcal{O}_n$ est produit d'éléments irréductibles $F = F_1 \dots F_q$. Il s'agit de montrer que cette décomposition est unique, à des facteurs inversibles près. Par automorphisme on peut supposer F régulière ; alors les F_i sont régulières. D'après le corollaire, on a $F = U.P_1 \dots P_q$ où U est inversible et où les P_i sont des polynomes distingués irréductibles dans $\mathcal{O}_n$, donc dans l'anneau de polynomes $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Or ceux-ci donnent une décomposition en facteurs irréductibles (dans $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$) du polynome distingué (unique) associé à F ; comme $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ est factoriel (récurrence + théorème classique de Gauss), les P_i sont déterminés de façon unique.

C.Q.F.D.

REMARQUE. - Le théorème de préparation, ainsi que les théorèmes 2 et 3, sont évidemment valables pour les anneaux de séries formelles.

2. Premières applications géométriques.

a. Tout germe X d'ensemble analytique est défini par un nombre fini d'équations.

En effet, si $(F_j)_{(j \in J)}$ est un système infini d'équations de X dans $\mathcal{O}_n$, et si J' est une partie finie de l'ensemble d'indices J, notons $\mathfrak{a}_{J'}$ l'idéal de $\mathcal{O}_n$ engendré par les $F_j (j \in J')$. Comme $\mathcal{O}_n$ est noethérien, la famille des idéaux $\mathfrak{a}_{J'}$ admet un élément maximal, évidemment égal à l'idéal engendré par tous les F_j. On a donc extrait de $(F_j)_{(j \in J)}$ un système fini d'équations de X.

b. L'ensemble des germes d'ensembles analytiques de C^n au voisinage de 0 vérifie la condition minimale ("toute famille non vide de germes d'ensembles analytiques admet un élément minimal").

En effet, pour tout germe X, notons $\mathfrak{I}(X)$ l'idéal formé des éléments de $\mathcal{O}_n$ qui s'annulent sur X (une série F est dans $\mathfrak{I}(X)$ s'il existe un voisinage V de 0 tel que F soit convergente dans V et soit nulle sur $V \cap X$). X est l'ensemble des points où tous les éléments de $\mathfrak{I}(X)$ s'annulent, ce qui montre que l'application $X \longrightarrow \mathfrak{I}(X)$ est biunivoque. Comme elle renverse les inclusions, notre assertion résulte du fait que les idéaux de $\mathcal{O}_n$ vérifient la condition maximale.

Appelons irréductible un germe X (d'ensemble analytique ; nous omettrons désormais souvent ces mots) tel que $X = X' \cup X''$ (X', X'' étant des germes) implique $X = X'$ ou $X = X''$. Pour justifier les notations ensemblistes d'inclusion, réunion, intersection appliquées aux germes, notons ceci : pour tout germe Y, il existe un voisinage $V(Y)$ de 0 (appelé voisinage de définition de Y) où toutes les séries d'un système d'équations de Y convergent (cf. a.) ; donc toute famille finie de germes admet un voisinage de définition commun, et on travaille dans celui-ci ; par prolongement analytique le résultat est indépendant du voisinage de définition choisi. Notons que toute réunion finie et toute intersection finie de germes est un germe.

c. Tout germe est réunion finie de germes irréductibles. Si $X = X_1 \cup \ldots \cup X_q$ où les X_i sont irréductibles et où aucun X_i n'est contenu dans un X_q, $q \neq i$, les X_i sont déterminés de façon unique par X.

Pour l'existence on applique la condition minimale à l'ensemble des germes qui ne sont pas réunions finies de germes irréductibles. Pour l'unicité on remarque que tout germe irréductible Y contenu dans X est réunion des $Y \cap X_i$, donc est contenu dans l'un des X_i ; donc, si $X = \bigcup X_i = \bigcup X'_j$, ($X_i$, X'_j irréductibles vérifiant la condition de l'énoncé), chaque X_i est contenu dans un X'_j et chaque X'_j dans un X_i.

On dit que les X_i sont les composantes irréductibles du germe X.

d. Pour qu'un germe X soit irréductible, il faut et il suffit que son idéal $\mathcal{J}(X)$ dans $\mathcal{O}_n$ soit premier.

Si X est irréductible et si $FG \in \mathcal{J}(X)$, notons X' (resp. X'') l'ensemble des points de X où F (resp. G) s'annule ; on a $X = X' \cup X''$, d'où, par exemple $X = X'$; alors $F \in \mathcal{J}(X)$. Réciproquement si $\mathcal{J}(X)$ est premier et si $X = X' \cup X''$, on a $\mathcal{J}(X) = I(X') \cap \mathcal{J}(X'')$, donc $\mathcal{J}(X)$ est égal à $\mathcal{J}(X')$ ou à $\mathcal{J}(X'')$ en vertu d'une propriété classique des idéaux premiers ; on a donc $X = X'$ ou $X = X''$, et X est irréductible.

REMARQUE. - Nous verrons plus loin que tout idéal premier de $\mathcal{O}_n$ est de la forme $\mathcal{J}(X)$ où X est un germe irréductible. Ceci, joint à la théorie de la décomposition primaire dans les anneaux noethériens, démontre le résultat suivant, qui est analogue au "Théorème des zéros de Hilbert" de la Géométrie Algébrique : si une série $F \in \mathcal{O}_n$ s'annule en tous les points où des séries données

$F_1, \ldots, F_q$ sont simultanément nulles, alors une puissance de F est de la forme $A_1 F_1 + \ldots + A_q F_q (A_i \in \mathcal{O}_n)$.

3. Théorie de la dimension.

Soient $\mathcal{O}$ un anneau local noethérien, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. Rappelons le résultat algébrique suivant :

(A). – Les entiers h et q suivants sont égaux :

1° Le plus grand entier h tel qu'il existe des idéaux premiers distincts $\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_h$ de $\mathcal{O}$ tels que $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_h$;

2° Le plus petit entier q tel qu'il existe un idéal primaire pour $\mathfrak{m}$ et engendré par q éléments.

L'entier $h = q$ est appelé la dimension de $\mathcal{O}$ et se note $\dim(\mathcal{O})$. Un système $(x_1, \ldots, x_q)$ $(q = \dim(\mathcal{O}))$ d'éléments de $\mathcal{O}$ engendrant un idéal primaire pour $\mathfrak{m}$ s'appelle un système de paramètres de $\mathcal{O}$.

(B). – La dimension de $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$, considéré comme espace vectoriel sur le corps $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$, est un polynome en n pour n grand, et le degré de ce polynome est $\dim(\mathcal{O}) - 1$.

Il résulte aisément de (B) que la dimension de l'anneau $\mathcal{O}_r$ des séries convergentes à r variables est égale à r.

THÉORÈME 4. – Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_r$. Notons $z_i (i = 1, \ldots, r)$ les classes mod $\mathfrak{p}$ des coordonnées de C^r, et d la dimension de $\mathcal{O}_r/\mathfrak{p} = \mathcal{O}$. Avec une numérotation convenable des z_i, $(z_1, \ldots, z_d)$ forment un système de paramètres de $\mathcal{O}$ et sont analytiquement indépendants, on a

$$P(z_1, \ldots, z_d ; z_{d+1}) = 0$$

où P est un polynome distingué en z_{d+1}, et enfin

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z_{d+1}}\right) z_{d+k} = Q_k(z_1, \ldots, z_d ; z_{d+1})$$

pour $k = 2, \ldots, r - d$ où Q_k est un polynome en z_{d+1}.

On prend $z_1 \neq 0$, puis z_2 en dehors des idéaux premiers isolés de $\mathcal{O} z_1, \ldots,$ puis z_{i+1} en dehors des idéaux premiers isolés de $\mathcal{O} z_1 + \ldots + \mathcal{O} z_i$; ceci est possible pour $i < d$ car, sinon, l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}$ (qui est engendré par $z_1, \ldots, z_r$) serait contenu dans la réunion des idéaux premiers isolés de $\mathcal{O} z_1 + \dots + \mathcal{O} z_i$ et serait alors égal à l'un d'eux en vertu de

(C). - <u>Si un idéal $\mathfrak{M}$ est contenu dans une réunion finie d'idéaux premiers, il est contenu dans l'un d'eux.</u>

Alors $\mathcal{O} z_1 + \dots + \mathcal{O} z_i$ serait primaire pour $\mathfrak{M}$, contrairement à la caractérisation (A), 2° de $\dim(\mathcal{O})$. D'après (A), 1°, on voit que $\mathcal{O} z_1 + \dots + \mathcal{O} z_d$ est primaire pour $\mathfrak{M}$, donc que $(z_1, \dots, z_d)$ est un système de paramètres de $\mathcal{O}$. Le fait qu'ils sont analytiquement indépendants est algébrique :

(D). - <u>Si un anneau local</u> $\mathcal{O}$ <u>contient un corps infini</u> K, <u>et si</u> $(z_1, \dots, z_d)$ <u>est un système de paramètres de</u> $\mathcal{O}$, <u>alors</u> $z_1, \dots, z_d$ <u>sont analytiquement indépendants sur</u> K <u>au sens des séries formelles</u>.

Ceci étant le sous-anneau Γ de $\mathcal{O}$ formé des séries convergentes en $z_1, \dots, z_d$ est isomorphe à $\mathcal{O}_d$. Montrons que $\mathcal{O}$ est un Γ-module <u>de type fini</u>. Notons en effet $\mathfrak{q}$ l'idéal maximal de Γ (engendré par $z_1, \dots, z_d$). Comme $\mathcal{O}.\mathfrak{q}$ est primaire pour $\mathfrak{M}$, $\mathcal{O}/\mathcal{O}.\mathfrak{q}$ est un espace vectoriel de dimension finie s sur C égale à $\Gamma/\mathfrak{q}$; soient $y_1, \dots, y_s$ des éléments de $\mathcal{O}$ dont les classes mod $\mathcal{O}.\mathfrak{q}$ forment une base de cet espace vectoriel. Pour $x \in \mathcal{O}$, on détermine par récurrence sur n des a_{in} dans Γ tels que $x \equiv \sum_i a_{in} y_i \pmod{\mathcal{O}.\mathfrak{q}^n}$ et que $a_{i,n+1} - a_{i,n} \in \mathfrak{q}^n$; les sommes infinies

$a_i = a_{i,1} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{i,n+1} - a_{i,n})$ sont des séries formelles en $z_1, \dots, z_d$,

et on a $x = \sum a_i y_i$. On peut s'arranger pour construire des séries a_i convergentes (par un calcul de majorantes).

Il résulte de ceci que $\mathcal{O}$ est <u>entier</u> sur Γ. On a : $\mathcal{O} = \Gamma[z_1, \dots, z_r]$. Soient E, F les corps des fractions de $\Gamma, \mathcal{O}$; on a $E(z_1, \dots, z_r) = F$, et F est une extension algébrique finie de E. D'après le théorème de l'élément primitif, on a $F = E(u)$, où u est une combinaison linéaire des z_i ; après changement de coordonnées on peut supposer que $F = E(z_{d+1})$. Comme Γ est intégralement clos (puisque factoriel : théorème 3), le polynome minimal de z_{d+1} sur E a ses coefficients dans Γ ; il est donc de la forme annoncée

$$P(z_1, \dots, z_d ; z_{d+1}) = 0 .$$

La dernière assertion résulte enfin de :

(E). - <u>Soient</u> A <u>un anneau intègre intégralement clos</u>, E <u>son corps des fractions</u>, $F = E(y)$ <u>une extension séparable finie de</u> E <u>engendrée par un élément</u> y <u>entier</u>

sur A ; soit $P(Y)$ le polynome minimal de y sur E. Alors, pour tout élément z de F qui est entier sur A, on a $z.P'(y) \in A[y]$.

Conséquences du théorème 4.

1° Si on a $S(z_1, \ldots, z_d, z_{d+1}) = 0$ où S est une série convergente, celle-ci est régulière en z_{d+1} (puisque $z_1, \ldots, z_d$ sont analytiquement indépendants), donc associée à un polynome en z_{d+1}. Celui-ci est un multiple du polynome minimal P construit ci-dessus, donc S également. Ainsi $P(z_1, \ldots, z_d ; z_{d+1}) = 0$ est essentiellement la seule relation entre $z_1, \ldots, z_{d+1}$. La "représentation paramétrique" du théorème 4 définit ainsi un ensemble analytique X de dimension complexe d, et on a $\mathfrak{p} = \mathfrak{J}(X)$. Ainsi tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_r$ est celui d'un ensemble analytique. D'autre part on vient de voir que, pour un ensemble analytique irréductible X, la dimension complexe de X coïncide avec $\dim(\mathcal{O}_r/\mathfrak{J}(X))$; ce résultat subsiste pour les ensembles analytiques quelconques (leur dimension, tant complexe qu'algébrique, étant le maximum des dimensions de leurs composantes).

2° Les hypersurfaces (ensembles analytiques de C^n dont toutes les composantes sont de dimension $n - 1$) sont les ensembles définis par une seule équation.

3° Toute suite croissante d'idéaux premiers distincts de $\mathcal{O}_n$ peut être raffinée en une suite comprenant $n + 1$ idéaux premiers distincts.

THÉORÈME 5. - Si X et Y sont deux ensembles analytiques de C^n, toute composante Z de $X \cap Y$ vérifie $\dim(Z) \geqslant \dim(X) + \dim(Y) - n$.

On traite d'abord le cas où Y est une variété linéaire ; par applications répétées il suffit de montrer que, si Y est un hyperplan, on a $\dim(Z) = \dim(X) - 1$ ou $\dim(Z) = \dim(X)$; pour cela on se ramène aussitôt au cas où X est irréductible. Soient $\mathcal{O}$ son anneau local, y la classe dans $\mathcal{O}$ de l'équation de Y (on suppose $y \neq 0$, sinon $Z = X$ et le résultat est trivial) et $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de $\mathcal{O}$ correspondant à C ; comme $\mathfrak{p}$ est un idéal premier isolé de $\mathcal{O}y$, l'anneau de fractions $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ est de dimension 1 (par (A)) ; donc $\dim(\mathcal{O}/\mathfrak{p}) = \dim(\mathcal{O}) - 1$ (résulte de la conséquence 3° ci-dessus) ; comme $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ s'identifie à l'anneau local de Z, notre assertion est démontrée dans le cas où Y est linéaire. Dans le cas général on forme $C^n \times C^n$, sa diagonale D, et le produit $X \times Y'$ (Y' désignant la copie de Y dans le second facteur) ; comme D est linéaire, on applique la première partie à $(X \times Y') \cap D$, et on remarque que les composantes de cet ensemble donnent, par projection sur le premier facteur, celles de $X \cap Y$.

REMARQUE. - Comme la théorie de la dimension, la théorie des multiplicités d'intersection de la Géométrie Algébrique se transporte au cas analytique sans grand changement (à condition de partir d'une théorie "locale" à la CHEVALLEY).

4. Résultats divers.

Soient X , Y deux germes d'ensembles analytiques irréductibles dans C^n tels que $X \subset Y$, et $(F_j(z))$ un système de générateurs de l'idéal $\mathcal{J}(Y)$; notons $J(z)$ la matrice jacobienne des $F_j(z)$ (c'est-à-dire la matrice de leurs dérivées partielles premières), et $\overline{z_i}$ la classe de z_i mod $\mathcal{J}(X)$. On dit que X est simple sur Y si le rang de la matrice $J(\overline{z})$ est égal à $n - \dim(Y)$; lorsque X se réduit au point 0 , cette définition est, comme on le voit facilement, équivalente aux caractérisations classiques. La théorie algébrique démontre de plus :

THÉORÈME 6. - Pour que X soit simple sur Y , il faut et il suffit que l'anneau local $(\mathcal{O}_n/\mathcal{J}(Y))_{(\mathcal{J}(X)/\mathcal{J}(Y))} = (\mathcal{O}_{n\,\mathcal{J}(X)})/(\mathcal{J}(Y)\mathcal{O}_{n\,\mathcal{J}(X)})$ de X sur Y soit régulier [1].

On dit qu'un anneau local $\mathcal{O}$ est régulier si son idéal maximal est engendré par $\dim(\mathcal{O})$ éléments (c'est-à-dire par un système de paramètres). La démonstration du théorème 6 est très simple lorsque $X = 0$: le critère par la matrice jacobienne exprime en effet que tous les $\overline{z_i}$ sont dans l'idéal engendré par $\dim(Y)$ d'entre eux, et ceci équivaut au fait que $\mathcal{O}_n/\mathcal{J}(Y)$ est régulier. Pour le cas général nous renvoyons à CHEVALLEY [1].

Mentionnons enfin quelques résultats sur les liens entre les points de vue algébrique, analytique complexe, et analytique "formel". Un ensemble algébrique $X \subset C^n$ contenant 0 peut être irréductible sans que le germe (en 0) de X (considéré comme ensemble analytique) le soit (cf. point double d'une strophoïde) ZARISKI a montré que, si X est normal en 0 (c'est-à-dire si l'anneau local algébrique $\mathcal{O}$ de 0 sur X est intégralement clos), alors son complété $\hat{\mathcal{O}}$ est intègre et intégralement clos (autrement dit X est normal en 0 au sens analytique formel) ; il en résulte aisément que l'anneau local $\mathcal{O}'$ de 0 sur le germe X (qui est un quotient de l'anneau $\mathcal{O}_n$ des séries convergentes , et qui est

---

([1]) On rappelle la notation : si A est un anneau d'intégrité ; B un idéal premier, $\bar{A}$ le corps des fractions de A , on note A_B l'ensemble des $\xi = \frac{p}{q} \in \bar{A}$, avec $q \notin B$; c'est un sous-anneau de $\bar{A}$.

compris entre $\mathcal{O}$ et $\hat{\mathcal{O}}$) est aussi intègre et intégralement clos (autrement dit le germe X est normal). ZARISKI a aussi montré que, pour un germe X , la normalité "analytique complexe" entraîne la normalité "formelle" [6]. D'autre part NAGATA a montré que rien ne peut se passer entre le niveau "analytique complexe" et le niveau "analytique formel" ; plus précisément, si $\mathcal{O}$ est l'anneau des séries convergentes à n variables, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}$, et si $\hat{\mathcal{O}}$ est l'anneau des séries formelles complété de $\mathcal{O}$, alors $\mathfrak{p}\,.\,\hat{\mathcal{O}}$ est premier [3] ; il y a cependant quelques points obscurs dans la démonstration de Nagata.

5. Justifications algébriques.

(A) et (B). - Soient A un anneau local noethérien, m son idéal maximal ; notons

1° h le plus grand entier tel qu'il existe h idéaux premiers emboités distincts dans $\mathcal{O}$;

2° q le plus petit entier tel qu'il existe un idéal primaire pour $\mathfrak{m}$ et engendré par q éléments ;

3° d le degré de $[(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) : (\mathcal{O}/\mathfrak{m})]$ considéré comme polynome en n (n grand) ; alors les entiers h , r et d + 1 sont égaux.

L'égalité $h = q$ est due à KRULL [2] ; sa démonstration est compliquée ; on la retrouve dans P. SAMUEL, ([4] p. 26-28). Un élégant résultat d'algèbre locale, le lemme d'Artin-Rees, permet maintenant, en utilisant de façon essentielle les polynomes caractéristiques (c'est-à-dire 3°), de simplifier notablement la démonstration : on démontre les 3 inégalités $d + 1 \leqslant r$ (facile), $r \leqslant h$ (facile), et $h \leqslant d + 1$ (là on utilise le lemme d'Artin Rees). Cette démonstration est esquissée dans P. SAMUEL, [5].

(C). - Si un idéal $\mathfrak{m}$ (d'un anneau commutatif A) est contenu dans une réunion finie d'idéaux premiers p_i , il est contenu dans l'un des p_i .

On peut supposer $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ pour $i \neq j$ (supprimer les éléments non maximaux de la famille des $\mathfrak{p}_i$). Il existe alors $x_{ij} \in \mathfrak{p}_i$ tel que $x_{ij} \notin \mathfrak{p}_j$; alors $y_j = \prod_{i \neq j} x_{ij}$ vérifie $y_j \notin \mathfrak{p}_i$ (puisque $\mathfrak{p}_j$ est premier) et $y_j \in \mathfrak{p}_i$ pour tout $i \neq j$. Si $\mathfrak{m}$ n'est contenu dans aucun $\mathfrak{p}_j$, il existe, pour tout j , un élément a_j de $\mathfrak{m}$ tel que $a_j \notin \mathfrak{p}_j$. Alors $a = \sum_j a_j y_j$ est dans $\mathfrak{m}$, mais n'est dans aucun $\mathfrak{p}_j$.

(D). - Si un anneau local $\mathcal{O}$ contient un corps infini K , et si $(z_1 , \ldots , z_d)$ est un système de paramètres de $\mathcal{O}$, alors $z_1 , \ldots , z_d$ sont analytiquement

<u>indépendants sur</u> K <u>au sens des séries formelles</u>.

Soit $S(z_1, \dots, z_d) = 0$ (où S est une série formelle $\neq 0$, et où la somme infinie du 1er membre a un sens pour la topologie de $\mathcal{O}$). Après substitution linéaire (à coeff. dans K) sur les z_i, on peut supposer S régulière en z_d ; en notant $\mathfrak{q}$ l'idéal engendré par $z_1, \dots, z_{d-1}$, la relation

$$S(0, \dots, 0, z_d) \equiv 0 \quad (\bmod\ \mathfrak{q})$$

s'écrit alors

$$z_d^s(a_0 + a_1 z_d + \dots) \in \mathfrak{q} \qquad \text{avec } a_i \in K,\ a_0 \neq 0 ;$$

comme $a_0 + a_1 z_d + \dots$ est inversible dans $\mathcal{O}$, ceci donne $z_d^s \in \mathfrak{q}$. On en déduit que $\mathfrak{q}$ est primaire pour l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}$, contrairement au fait qu'il est engendré par $d - 1 = \dim(\mathcal{O}) - 1$ éléments (cf. (A)).

(E). - <u>Soient</u> A <u>un anneau intègre intégralement clos,</u> E <u>son corps des fractions,</u> $F = E(y)$ <u>une extension séparable de degré fini</u> n <u>de</u> E, <u>et</u> y <u>un élément entier sur</u> A <u>engendrant</u> F ; <u>notons</u> $P(Y)$ <u>le polynome minimal de</u> y <u>sur</u> E. <u>Alors,</u> <u>pour tout élément</u> z <u>de</u> F <u>qui est entier sur</u> A, <u>on a</u> $z.P'(y) \in A[y]$.

Le système $(1, y, \dots, y^{n-1})$ est une base de F sur E. Ecrivons

$$zP'(y) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j y^j .$$

Notons (y_i) les conjugués de y sur E, (z_i) ceux de z $(i = 0, \dots, n-1)$. Par conjugaison on a

$$z_i P'(y_i) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j y_i^j .$$

Ceci est un système de n équations linéaires en les b_j $(j = 0, \dots, n-1)$. Son déterminant D est le déterminant de Vandermonde $\prod_{i<k}(y_i - y_k)$. Le mineur S_{ij} de y_i^j dans D est le produit de $\prod_{k<m, k\neq i, m\neq i}(y_k - y_m)$ et d'un facteur T_{ij} entier sur A. La règle de Cramer donne

$$D.b_i = \sum_{j=0}^{n-1} z_j T_{ij} \Big(\prod_{k<m, k\neq j, m\neq j}(y_k - y_m)\Big) P'(y_j) .$$

Or

$$P'(y_j) = \prod_{s\neq j}(y_j - y_s) ,$$

d'où

$$D.b_i = \sum_j z_j T_{ij} D \ , \quad \text{et} \quad b_j = \sum_j z_j T_{ij} \ .$$

Ainsi, comme les z_j et les T_{ij} sont entiers sur A, il en est de même des b_j. Comme $b_j \in E$, et que A est intégralement clos, il en résulte que les b_j sont dans A, donc $zP'(y)$ est dans Ay.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - Intersections of algebraic and algebroid varieties, Trans. Amer. math. Soc., t. 57, 1945, p. 1-85.

[2] KRULL (Wolfgang). - Dimensionstheorie in Stellenringen, J. reine und angew Math. t. 179, 1938, p. 204-226.

[3] NAGATA (Masayoshi). - Some remarks on local rings II, Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, Serie A, t. 28, 1953, p. 109-120.

[4] SAMUEL (Pierre). - Algèbre locale, Mem. Sc. math., t. 123, 1953, p. 1-76.

[5] SAMUEL (Pierre). - Progrès récents de l'algèbre locale, Colloque d'Algèbre, Liège 1956 (Centre belge de Recherches mathématiques). - Paris, Masson (sous presse).

[6] ZARISKI (Oscar). - Sur la normalité analytique des variétés normales, Ann. Inst. Fourier, t. 2, 1950, p. 161-164.