JACQUES L. LIONS

Quelques procédés d'interpolation d'opérateurs linéaires et quelques applications, II

Séminaire Schwartz, tome 5 (1960-1961), exp. nº 2, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1960-1961__5__A2_0>

QUELQUES PROCÉDÉS D'INTERPOLATION D'OPÉRATEURS LINÉAIRES ET QUELQUES APPLICATIONS, II.

Conférence faite par Jacques L. LIONS,
rédigée par Henri MOREL

Méthode "holomorphe"

On va donner une deuxième méthode systématique de construction de couples d'interpolation, méthode utilisant cette fois la théorie des fonctions holomorphes (vectorielles).

1. Les espaces $[A_0 , A_1 , \nu]$.

On désigne par $\mathcal{H}(A_0 , A_1)$ l'espace des fonctions $\zeta \to u(\zeta)$ définies pour $\zeta = \xi + i\eta$, $0 \leq \xi \leq 1$, à valeurs dans $A_0 + A_1$, ayant les propriétés suivantes :

(i) $\zeta \to u(\zeta)$ est holomorphe dans $0 < \xi < 1 \to A_0 + A_1$, continue et bornée dans $0 \leq \xi \leq 1 \to A_0 + A_1$;

(ii) $u(i\eta) \in A_0$, $\eta \to u(i\eta)$ étant continue et bornée de $R \to A_0$; on posera

$$\|u\|_0 = \sup_\eta \|u(i\eta)\|_{A_0} \quad ;$$

(iii) $u(1 + i\eta) \in A_1$, $\eta \to u(1 + i\eta)$ étant continue et bornée de $\mathbf{R} \to A_1$, on posera

$$\|u\|_1 = \sup_\eta \|u(1 + i\eta)\|_{A_1} \quad .$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{H}(A_0,A_1)} = \max(\|u\|_0 , \|u\|_1)$$

on vérifie (à l'aide du théorème des trois droites) que $\mathcal{H}(A_0 , A_1)$ est un espace de Banach.

Si maintenant ν est une mesure sur $[0 , 1]$, ou une distribution à support compact sur $]0 , 1[$, on définit, pour toute $u \in \mathcal{H}(A_0 , A_1)$ l'intégrale

$$\int_0^1 u(\xi)\, d\nu(\xi) \in A_0 + A_1$$

(pour le cas où ν est une distribution, cf. [4]), l'application

(1.1) $$u \to \int_0^1 u(\xi)\, d\nu(\xi)$$

est continue de $\mathcal{H}(A_0 ; A_1) \to A_0 + A_1$.

On désigne alors par $[A_0 , A_1 , \nu]$ l'image de $\mathcal{H}(A_0 , A_1)$ dans l'application (1.1) ; muni de la norme (quotient)

(1.2) $$\|a\|_{[A_0, A_1, \nu]} = \inf_{\int_0^1 u(\xi) d\nu(\xi) = a} \|u\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1)} ,$$

l'espace $[A_0 , A_1 , \nu]$ est un espace de Banach.

Les espaces $[A_0 , A_1 , \delta(\theta)]$, $0 < \theta < 1$, ont été introduits simultanément et indépendamment par A.L. CALDERON [cf. Conférence de Varsovie septembre 1960 (à paraître)] et J.-L. LIONS, [1].

2. Propriétés d'interpolation.

THÉORÈME 2.1. - Si $\pi \in \mathcal{L}(A_0 ; B_0) \cap \mathcal{L}(A_1 ; B_1)$ (notations de l'exposé n° 1 de ce séminaire), alors, quel que soit ν, π applique linéairement et continûment $[A_0 , A_1 , \nu]$ dans $[B_0 , B_1 , \nu]$, avec une norme $\leq \max(\varpi_0 , \varpi_1)$, si ϖ_j = norme de ϖ dans $\mathcal{L}(A_j ; B_j)$, $j = 0 , 1$, conséquence facile des définitions.

Il serait intéressant d'obtenir une majoration de la norme de π dans $\mathcal{L}([A_0 , A_1 , \nu] ; [B_0 , B_1 , \nu])$ au moyen de ϖ_0, ϖ_1 et ν.

On peut répondre à cette question dans le cas $\nu = \delta(\theta)$, en notant que

$$\|a\|_{[A_0, A_1, \delta(\theta)]} = \inf_{u(\theta)=a} \|u\|_0^{1-\theta} \|u\|_1 .$$

THÉORÈME 2.2. - Si $\nu = \delta(\theta)$, la norme de π dans $\mathcal{L}([A_0 , A_1 , \delta(\theta)] ; [B_0 , B_1 , \delta(\theta)])$ est $\leq \varpi_0^{1-\theta} \varpi_1^{\theta}$.

THÉORÈME 2.3. - Si $A_0 \subset A_1$, $B_0 \subset B_1$, les injections étant continues, et si $a , b \to K(a , b)$ est une application bilinéaire continue de $A_1 \times B_1 \to C_1$ et de $A_0 \times B_0 \to C_0$ (C_0, C_1, $\mathcal{C}$ troisième triplet comme A_0, A_1, $\mathcal{A}$) alors

$a, b \to K(a, b)$ <u>est une application bilinéaire continue de</u>
$[A_0, A_1, \delta(\theta)] \times [B_0, B_1, \delta(\theta)] \to [C_0, C_1, \delta(\theta)]$.

3. <u>Espaces</u> $[A_0, A_1, \delta^{(m)}(\theta)]$, $[A_0, A_1, \delta(\theta)]_{(m)}$.

Notons d'abord ceci :

$$(3.1) \quad [A_0, A_1, \delta(\theta)] \subset [A_0, A_1, \delta'(\theta)] \subset \dots \subset [A_0, A_1\, \delta^{(m)}(\theta)] \subset \dots$$

les injections étant continues ($\delta^{(m)}(\theta)$ = dérivée d'ordre m de la masse 1 au point θ ; $0 < \theta < 1$).

Désignons par $\mathcal{H}^{(m)}(A_0, A_1)$ l'espace des fonctions $u(\zeta)$ telles que $u, u', \dots, u^{(m)} \in \mathcal{H}(A_0, A_1)$, muni de la norme naturelle. On introduit alors l'application $u \to \int_0^1 u(\xi)\, d\nu(\xi)$, comme au numéro 1, cette fois de $\mathcal{H}^{(m)}(A_0, A_1)$ dans $A_0 + A_1$. <u>On désigne par</u> $[A_0, A_1, \nu]_{(m)}$ <u>l'image de</u> $\mathcal{H}^{(m)}(A_0, A_1)$ <u>dans cette application</u>, munie de la norme quotient (On a : $[A_0, A_1, \nu]_{(0)} = [A_0, A_1, \nu]$)

On a alors :

$$(3.2) \quad [A_0, A_1, \delta(\theta)]_{(m)} \subset [A_0, A_1, \delta(\theta)]_{(m-1)} \subset \dots \subset [A_0, A_1, \delta(\theta)] \quad ,$$

les injections étant continues.

4. <u>Remarques diverses</u> :

- Extension à $n+1$ espaces $A_0, \dots, A_n$.
- Cas où les A_j ne sont pas des espaces de Banach.
- Interpolation par rapport à une famille $\pi(\zeta)$ d'opérateurs dépendant analytiquement de ζ (cf. LIONS [1]).

5. <u>Exemples</u>.

5.1. - Si $A_0 = L^{p_0}$, $A_1 = L^{p_1}$, alors $[A_0, A_1, \delta(\theta)] = L^{p_\theta}$ où
$\dfrac{1}{p_\theta} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$.

Ceci, et le théorème (2.2), donne Riesz - Thorin.

5.2. - Si $A_0 = L^p_{M_0}$; $A_1 = L^p_{M_1}$ (espaces L^p pour les mesures $M_i\, d\mu$, $M_i > 0$ localement μ-intégrable), alors

$$[A_0\ ,\ A_1\ ,\ \delta^{(m)}(\theta)] = L^p_{X_m}\ ,\ X_m = M_0^{1-\theta}\ M_1^{\theta}(1 + |\mathrm{Log}\,\frac{M_1}{M_0}|^m)^{-p}$$

$$[A_0\ ,\ A_1\ ,\ \delta(\theta)]_{(m)} = L^p_{Y_m}\ ,\ Y_m = M_0^{1-\theta}\ M_1^{\theta}(1 + |\mathrm{Log}\,\frac{M_1}{M_0}|^m)^p \quad .$$

5.3. - $\mathfrak{F}$ désigne la transformation de Fourier sur R^n, variable duale y. On désigne par $H^{\alpha,p}(R^n) = H^{\alpha,p}$ l'espace des distributions tempérées f telles que

$$\mathfrak{F}^{-1}((1 + y^2)^{\alpha/2}\ \mathfrak{F}f) \in L^p \quad ,$$

muni de la norme

$$\|f\|_{H^{\alpha,p}} = \|\mathfrak{F}^{-1}((1 + y^2)^{\alpha/2}\ \mathfrak{F}f)\|_{L^p} \quad .$$

Alors, si $1 < p < \infty$,

$$[A_0\ ,\ A_1\ ,\ \delta^{(m)}(\theta)] =$$

$$\{f\ ,\quad (1 + \mathrm{Log}(1 + y^2))^{-m}\ (1 + y^2)^{\frac{\alpha(\theta)}{2}}\ \mathfrak{F}f \in \mathfrak{F}L^p\ ,\quad \alpha(\theta) = (1 - \theta)\,\alpha_0 + \theta\alpha_1\,\}$$

et $[A_0\ ,\ A_1\ ,\ \delta(\theta)]_{(m)}$ s'obtient en remplaçant m par $-m$ dans cette définition.

5.4. - Naturellement ces exemples donnent des théorèmes d'interpolation entre espaces de types différents. Par exemple, si π est un opérateur linéaire continu de $H^{1,p}$ dans L^{q_0}, et de $H^{0,p}$ dans L^{q_1}, alors c'est un opérateur linéaire continu de $[H^{1,p}\ ,\ H^{0,p}\ ,\ \delta'(\theta)]$ dans $[L^{q_0}\ ,\ L^{q_1}\ ,\ \delta'(\theta)]$.

Appliquons ceci avec $\pi =$ injection, $q_1 = p$, q_0 donné par le théorème de Sobolev : $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ (> 0). On en déduit que tout élément f de $H^{1,p}\ ,\ H^{0,p}\ ,\ \delta'(\theta)]$ (i. e. vérifiant $\frac{(1 + y^2)^{(1-\theta)/2}}{1 + \mathrm{Log}(1 + y^2)}\,\mathfrak{F}f \in \mathfrak{F}L^p$) appartient à $[L^{q_0}\ ,\ L^{q_1}\ ,\ \delta'(\theta)]$, et l'on montre que ceci implique $\frac{M^{1-\theta}}{1 + |\mathrm{Log}\,M|}\ f \in L^p$, pour toute fonction $M > 0$, et appartenant à L^n.

5.5. (**CALDERON**, Conférence de Varsovie, septembre 1960). - Soit L_Φ l'espace d'Orlicz associé à une fonction Φ strictement croissante, telle que $\Phi(s)/s \to 0$ (resp. ∞) lorsque $s \to 0$ (resp. ∞) ; L^0_Φ désigne l'adhérence dans L_Φ des fonctions simples. Alors si $A_0 = L^0_{\Phi_0}$, $A_1 = L^1_{\Phi_1}$, l'espace $[A_0 , A_1 , \delta(\theta)]$ est L^0_Φ où Φ est définie par

$$\Phi(s^{1-\theta} t^\theta) = \Phi_0(s) = \Phi_1(t) \quad .$$

5.6. - Il serait intéressant de comparer les espaces $[A_0 , A_1 , \delta(\theta)]_{(m)}$, $[A_0 , A_1 \ \delta^{(m)}(\theta)]$ aux espaces $T(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1)$ lorsque $\frac{1}{p} + \alpha = \frac{1}{q} + \beta = \theta$.

On vérifie ceci (cf. LIONS - MAGENES, [2]), pour $1 < p < \infty$,

$$(5.1) \qquad H^{1-\theta+\varepsilon,p} \subset W^{1-\theta,p} \subset H^{1-\theta-\varepsilon,p} \ , \quad \text{pout tout } \varepsilon > 0 \quad .$$

[On n'a pas $H^{1-\theta,p} = W^{1-\theta,p}$, $p \neq 2$ (cf. J.-P. KAHANE, Communication personnelle), $W^{1-\theta,p}$ est défini au paragraphe 6 de l'exposé n° 1 de ce Séminaire].

La démonstration de (5.1) et des exemples (5.3) utilise un théorème de MIKHLIN [3].

5.7. - Dans le <u>cas hilbertien</u> (cf. exposé n° 1, § 6, 2°) on a :

$$T(2 , \alpha , A_0 ; 2 , \alpha , A_1) = [A_0 , A_1 , \delta(\theta)] \ , \quad \frac{1}{2} + \alpha = \theta \quad .$$

La démonstration de ce point est très voisine de la démonstration de N. ARONSZAJN [1958, Communication personnelle] du résultat d'interpolation de LIONS, [cf. exposé n° 1, § 1. ARONSZAJN, Conférence de Berkeley, Avril (à paraître) et KREIN (S. G.), Conférence de Varsovie, septembre 1960 (à paraître)].

5.8. - Il y a une infinité de problèmes non résolus, consistant à étudier les propriétés des espaces $[A_0 , A_1 , \nu]$ pour divers ν et divers A_0 , A_1 .

EXEMPLE. - $A_0 = \mathcal{L}(L^{p_0} ; L^{q_0})$
$A_1 = \mathcal{L}(L^{p_1} ; L^{q_1})$.

Que peut-on dire de l'espace $[A_0 , A_1 , \delta(\theta)]$?

<u>Autre problème</u> : Quand a-t-on

$$[[A_0 , A_1 , \delta(\theta_1)] , [A_0 , A_1 , \delta(\theta_2)] , \delta(\theta_3)] = [A_0 , A_1 , \delta(\theta_1 + \theta_2 \theta_3 - \theta_1 \theta_3)] \ ?$$

<u>Autre problème</u> : Dual de $[A_0 , A_1 , \nu]$?

Références bibliographiques.

[1] LIONS (Jacques-Louis). - Une construction d'espaces d'interpolation, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 251, 1960, p. 1853-1855.

[2] LIONS (J.-L.) e MAGENES (E). - Problemi ai limiti non omogenoi, III., Ann. Scuola norm. sup. Pisa, t. 15, 1961 (à paraître).

[3] MIKHLIN (S. G.). - O mul'tiplikatorakh integralov fur'e, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 109, 1956, p. 701-703.

[4] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 7, 1957, p. 1-141 ; et t. 8, 1958, p. 1-209.