Bernard Malgrange

Deuxième partie : unicité du problème de Cauchy, la méthode de Calderón

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. nº 8, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A8_0>

Séminaire SCHWARTZ
4e année, 1959/60, n° 8

Deuxième partie : UNICITÉ DU PROBLÈME DE CAUCHY
LA MÉTHODE DE CALDERÓN

par Bernard MALGRANGE

1. Un exemple élémentaire.

On se propose de résoudre le problème suivant : soit f une fonction d'une variable réelle une fois continuement différentiable, nulle pour les valeurs négatives ou nulles de la variable, et définie sur un intervalle contenant l'origine. Démontrer que l'inégalité :

$$\left|\frac{df}{dx}\right| \leqslant c\ |f|$$

entraîne que $f = 0$ sur cet intervalle. On va utiliser une méthode susceptible de se généraliser. (On pourrait pour ce faire utiliser le théorème des accroissements finis, ou bien (ce qui est équivalent) utiliser par itération la formule $|f(x)| \leqslant c\int_0^x |f(t)|dt$; mais il serait alors difficile de généraliser).

LEMME 1. - Soit $\varphi \in \mathcal{D}$; alors on a l'inégalité suivante :

$$\int e^{kx^2} \left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx \geqslant k \int e^{kx^2} |\varphi|^2 dx \tag{1.1}$$

pour tout k nombre réel positif.

DÉMONSTRATION. - Soit $\psi = e^{kx^2}\varphi$. (1.1) est alors équivalente à l'inégalité suivante :

$$\int \left|\frac{d\psi}{dx} - kx\psi\right|^2 dx \geqslant k\int |\psi|^2 dx \quad . \tag{1.2}$$

Si alors on développe le premier membre, on trouve :

$$\int \left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2 dx + k^2 \int x^2 |\psi|^2 dx - 2k\, \mathcal{R}\int \frac{d\psi}{dx}\, x\, \bar{\psi}\, dx$$

et un calcul "simple" montre que :

$$2k\,\mathcal{R}\int x\frac{d\psi}{dx}\bar{\psi}\, dx = - k\int |\psi|^2 dx \tag{1.3}$$

ce qui démontre (1.1).

Soit alors $\tau \in \underset{\sim}{R}_+^*$. On veut montrer que $f = 0$ dans $[0, \frac{\tau}{2}]$; soit α dans $\mathcal{D}$ tel que $\alpha = +1$ sur $[0, \frac{\tau}{2}]$, et $\alpha = 0$ pour $x \geqslant \tau$. D'après (1.1) on a alors :

$$k \int_0^{\tau} e^{k(x-\tau)^2} \, |\alpha f|^2 \, dx \leq \int_0^{\tau} e^{k(x-\tau)^2} \, \left|\frac{d(\alpha f)}{dx}\right|^2 dx \quad .$$

Or $\frac{d(\alpha f)}{dx} \leq c \, |\alpha f|$ sur $[0 , \frac{\tau}{2}]$, donc

$$\int_0^{\tau} e^{k(x-\tau)^2} \, \left|\frac{d(\alpha f)}{dx}\right|^2 dx \leq c \int_0^{\tau/2} e^{k(x-\tau)^2} \, |\alpha f|^2 \, dx + \int_{\tau/2}^{\tau} e^{k(x-\tau)^2} \left|\frac{d(\alpha f)}{dx}\right|^2 dx$$

et par suite :

$$(k - c) \int_0^{\tau} e^{k(x-\tau)^2} \, |\alpha f|^2 \, dx \leq \int_{\tau/2}^{\tau} e^{k(x-\tau)^2} \, \left|\frac{d(\alpha f)}{dx}\right|^2 dx$$

En comparant les croissances des deux membres de cette inégalité quand $k \to \infty$, l'hypothèse que $\alpha f \neq 0$ sur $[0 , \frac{\tau}{2}]$ conduit à une absurdité.

Dans cet exposé, on s'efforce de trouver des inégalités du type précédent pour certains opérateurs intégro-différentiels du premier ordre.

2. Inégalités de Calderón-Trèves.

Dans le cas précédent, l'utilisation de la fonction $(t - \tau)^2$ "très" convexe améliore grandement les inégalités. CALDERÓN travaille avec $(t + \frac{1}{k})^k$ et ne donne pas explicitement d'inégalités du type (1.1) (qu'on appellera inégalités du "type Trèves" (cf. exposés ultérieurs)). Ici on suivra [2] (avec un petit complément, i. e. le théorème 2.2 qui est une remarque esssentiellement due à MIZOHATA [3]).

NOTATIONS. - Soit $(x) = (x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ un point de $\underset{\sim}{R}^n$, et $t \in \underset{\sim}{R}$. (Les x_i sont les coordonnées "d'espace", et t est "le temps"). On conserve les notations de l'exposé 7. On considère $\mathcal{B}^s(\Sigma)$ pour $s > 1$; on considère également les espaces $H^{p,m}$ pour $p = 2$ qu'on notera H^m ; la norme (resp. le produit scalaire) de H^m est notée $\| \|_m$ (resp. $(/)_m$) . Si on oublie l'indice m , c'est qu'on considère le cas $m = 0$.

Si $k(x , y)$ est un noyau, on pose $\theta k(x , y) = k(x , x - y)$ et $\Lambda\varphi = \bar{\mathcal{F}}(|\xi| \mathcal{F}\varphi)$ (cf. exposé 7).

Soit alors $R(t)$ une fonction une fois continuement différentiable de la variable t $(t \in [0 , a])$ à valeurs dans $\mathcal{B}^s(\Sigma)$ pour t fixé (i. e. une fois continuement différentiable à valeurs dans $\mathcal{B}^s(\mathcal{D}^m_{\Omega})$ pour tout entier m positif) et soit :

(2.1) $$D = \frac{d}{dt} + \theta R(t) \Lambda \quad .$$

Posons alors :

(2.2) $$D = \frac{d}{dt} + P(t)\Lambda + iQ(t)\Lambda$$

où $P(t)$ (resp. $Q(t)$) admet pour symbole la partie réelle (resp. imaginaire) du symbole de θR (au sens de l'exposé 7).

On s'intéresse alors à deux cas particuliers :

a. $P = 0$: D est alors dit hyperbolique ;

b. Pour tout $t \in [0, a]$ fixé, P est inversible dans $\mathcal{L}(L^2, L^2)$, D est alors dit elliptique.

On cherche alors des majorations du "type Trèves" pour D.

THÉORÈME 1. - Si D est hyperbolique, il existe $\tau_0 > 0$, $k_0 > 0$, $c > 0$ tels que pour tout $t \in [0, \tau_0]$ et pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^1_{[0,\tau]}(H^1)$ on ait, dès que $k \geq k_0$:

(2.3) $$\int e^{k(t-\tau)^2} \|D\varphi\|_0^2 \, dt \geq Ck \int e^{k(t-\tau)^2} \|\varphi\|_0^2 \, dt .$$

THÉORÈME 2. - Si D est elliptique, alors

1° On a les mêmes conclusions que dans le théorème 1 ;

2° Lorsque $\tau \in [0, \tau_0]$, il existe des fonctions $c_1(\tau)$, $c_2(\tau)$, strictement positives, telles que $c_1(\tau) \to \infty$ si $\tau \to 0$; et il existe $k_0(\tau)$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^1_{[0,\tau]}(H^1)$, on ait, pour $k \geq k_0(\tau)$,

(2.4) $$\int e^{k(t-\tau)^2} \|D\varphi\|_0^2 \, dt \geq \frac{c_1(\tau)}{k} \int e^{k(t-\tau)^2} \left\{ \|\Lambda\varphi\|_0^2 + \left\|\frac{d\varphi}{dt}\right\|_0^2 \right\} dt$$
$$+ c_2(\tau)\, k \int e^{k(t-\tau)^2} \|\varphi\|_0^2 \, dt .$$

3. Démonstration des théorèmes 1 et 2.

On pose $\psi = e^{k/2(t-\tau)^2} \varphi$; (2.3) devient alors :

(3.1) $$\int \left\|\frac{d\psi}{dt} - k(t-\tau)\psi + P\Lambda\psi + iQ\Lambda\psi\right\|^2 dt \geq Ck \int \|\psi\|^2 \, dt .$$

Pour minorer le premier membre (qu'on note I), on utilise le calcul approximatif, et on sépare les parties approximativement hermitienne et approximativement anti-hermitienne.

(3.2) $$I = \int \left\|\frac{d\psi}{dt} + iQ\Lambda\psi\right\|^2 dt + \int_2 \|P\Lambda\psi - k(t-\tau)\psi\|^2 \, dt + k \int \|\psi\|^2 \, dt$$
$$+ J_1 + J_2$$

en tenant compte de (1.2) et en posant :

$$J_1 = -2\mathcal{R}k(t-\tau)(iQ\Lambda\psi|\psi)$$

$$J_2 = 2\mathcal{R}(\frac{d\psi}{dt} + iQ\Lambda\psi|P\Lambda\psi) \quad .$$

Étudions d'abord J_1 . Soit Q^* l'adjoint de Q . Ces deux opérateurs sont approximativement égaux, commutent approximativement à Λ, et $(Q - Q^*)\Lambda$ (resp. $\Lambda(Q - Q^*)$) opèrent de L^2 dans L^2 ; or, on a :

$$(iQ\Lambda\psi|\psi) + (\psi|iQ\Lambda\psi) = (i(Q\Lambda - \Lambda Q^*)\psi|\psi) \quad .$$

Donc :

$$(3.3) \qquad |J_1| \leqslant c\int_0^\tau(\tau - t)\ \|\psi\|^2\, dt \leqslant \text{Cte}\ \tau\int_0^\tau \|\psi\|^2\, dt \leqslant \frac{k}{4}\int_0^\tau \|\psi\|^2\, dt$$

en prenant τ assez petit ; (3.1) et (3.3) entraînent :

$$I \geqslant 3\,\frac{k}{4}\int_0^\tau \|\psi\|^2\, dt \qquad \text{si} \quad P = 0$$

ce qui démontre le théorème 1.

Étudions maintenant J_2 : d'une part on a, en intégrant par partie

$$2\mathcal{R}\int(\frac{d\psi}{dt}|P\Lambda\psi)\, dt = \int\left\{(\frac{d\psi}{dt}|P\Lambda\psi) + (P\Lambda\psi|\frac{d\psi}{dt})\right\}dt$$
$$= \int(\frac{d\psi}{dt}|(P\Lambda - \Lambda P^*)\psi)\, dt - \int(\frac{dP}{dt}\Lambda\psi|\psi)\, dt \quad .$$

D'autre part, on a (trivialement) :

$$2\mathcal{R}(iQ\Lambda\psi|P\Lambda\psi) = (iQ\Lambda\psi|(P\Lambda - \Lambda P^*)\psi) + (i\Lambda\psi|(Q^*\Lambda P^* - P^*Q\Lambda)\psi)$$

d'où :

$$J_2 = \int(\frac{d\psi}{dt} + iQ\Lambda\psi|(P\Lambda - \Lambda P^*)\psi)\, dt - \int(\frac{dP}{dt}\Lambda\psi|\psi)\, dt$$
$$+ \int(i\Lambda\psi|(Q^*\Lambda P^* - P^*Q\Lambda)\psi)\, dt \quad .$$

Mais $\frac{dP}{dt}$ étant un opérateur borné, on a :

$$|J_2| \leqslant \text{Cte}(\int\|\frac{d\psi}{dt} + iQ\Lambda\psi\|\ \|\psi\|\, dt + \int\|\Lambda\psi\|\ \|\psi\|\, dt) \quad .$$

Faisons alors la remarque suivante : P est inversible, donc on a l'inégalité :

$$(3.4) \qquad \|\Lambda\psi\| \leqslant c\ \|P\Lambda\psi\| \leqslant c(\|P\Lambda\psi - (k(t-\tau))\psi\| + \|k(\tau - t)\psi\|) \quad .$$

Donc pour τ assez petit, k_0 assez grand, on a, pour $k \geqslant 0$,

$$(3.5) \qquad |J_2| \leqslant 1/2\int\|\frac{d\psi}{dt} + iQ\Lambda\psi\|^2\, dt + 1/2\int\|P\Lambda\psi - k(t-\tau)\psi\|^2\, dt$$
$$+ k/2\int\|\psi\|^2\, dt \quad .$$

En regroupant alors les formules (3.3), (3.5), (3.2), on obtient l'inégalité suivante :

$$(3.6)\quad I \geqslant 1/2 \int \left\| \frac{d\psi}{dt} + iQ\Lambda\psi \right\|^2 dt + 1/2 \int \| P\Lambda\psi - k(t-\tau)\,\psi \|^2 dt + k/4 \int \|\psi\|^2 dt \quad .$$

Si on regarde le dernier terme de cette inégalité, on en déduit le théorème 2 (1°). Regardons maintenant les deux derniers termes de (3.6) ; on a, a fortiori :

$$I \geqslant \frac{k_1}{2k} \int \| P\Lambda\psi - k(t-\tau)\,\psi \|^2 dt + k/4 \int \|\psi\|^2 dt$$

où $k_0 \leqslant k_1$, $k_1 \leqslant k$.

Des transformations simples (laissées au lecteur) et (3.4) entraînent :

$$I \geqslant \frac{c_1(\tau)}{k} \int \|\Lambda\psi\|^2 dt + c_2(\tau)\, k \int \|\psi\|^2 dt \quad .$$

Revenant maintenant à la fonction ψ on a :

$$\| P\Lambda\psi + iQ\Lambda\psi \| \leqslant \gamma \|\Lambda\psi\| \quad .$$

Ce qui entraîne :

$$\int e^{k(t-\tau)^2} \left\|\frac{d\psi}{dt}\right\|^2 dt \leqslant 2I + 2\gamma^2 \int e^{k(t-\tau)^2} \|\Lambda\psi\|^2 dt.$$

et en changeant $c_1(\tau)$ en $c_1(\tau)/2\gamma^2$ on trouve la formule (2.4), ce qui achève la démonstration.

REMARQUE. - On a, dans le théorème, fait l'hypothèse que les symboles de P et Q étaient une fois continuement différentiable à valeurs dans $\mathcal{B}^s(\hat{\Sigma})$ pour $s \geqslant 1$, en réalité on ne s'est servi pour appliquer les théoremes de commutation approximative que de P et de Q et non de $\frac{dP}{dt}$. Il suffit donc de faire les hypothèses suivantes : les symboles de P et de Q sont continus en t à valeur dans $\mathcal{B}^s(\hat{\Sigma})$, et $\frac{dP}{dt}$ est continu en t à valeurs dans $\mathcal{B}^0(\hat{\Sigma})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CALDERÓN (A. P.). - Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 16-36.

[2] MALGRANGE (Bernard). - Unicité du problème de Cauchy, d'après A. P. Calderón, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, n° 178.

[3] MIZOHATA (Sigeru). - Unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques du quatrième ordre, Proc. Japan Acad., t. 34, 1958, p. 687-692.