Bernard Malgrange

Noyaux valeurs principales

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. nº 5, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A5_0>

1er décembre 1959

NOYAUX VALEURS PRINCIPALES

par Bernard MALGRANGE

I. Espaces $H^{p,m}$ de Sobolev.

Dans ce paragraphe, p vérifie la condition $1 \leq p < +\infty$.

A. Soit m un entier positif.

On désigne par $H^{p,m}$ l'espace $\{f \,;\, f \in L^p ,\ D^k f \in L^p \text{ pour } |k| \leq m\}$ muni de la norme $\|f\|_{p,m} = \sum_{0 \leq |k| \leq m} \|D^k f\|_{L^p}$.

$H^{p,m}$ est un espace de Banach.

B. Si maintenant m est entier négatif et $p > 1$, on définit $H^{p,m}$ comme étant le dual de $H^{p',-m}$ ou p' est défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

$H^{p,m}$ est encore un espace de Banach.

Caractérisation des éléments de $H^{p,m}$. - Les éléments de $H^{p,m}$ sont les sommes finies de distributions de la forme $D^i f$ ou $f \in L^p$, et $|i| \leq m$.

Il est, en effet, immédiat qu'une telle distribution est dans $H^{p,m}$. Pour voir la réciproque, considérons l'application

$$j : H^{p',m} \longrightarrow \prod_{|i| \leq m} L^{p'} = F$$

$$g \longrightarrow (D_i\, g)$$

j identifie $H^{p',m}$ à un sous-espace fermé de F.

Si $f \in H^{p,m}$, c'est une forme linéaire continue sur $H^{p',m}$, donc on peut la prolonger en une forme $\tilde{f}$ sur F ; F' étant isomorphe à $\prod_{i \leq m} L^p$, l'assertion s'ensuit aussitôt.

C. Les injections suivantes sont continues :

1° $H^{p,m} \longrightarrow H^{p,m'}$ si $m' \leq m$ $(m, m' \in \mathbb{Z})$;

2° $\mathcal{S} \longrightarrow H^{p,m} \longrightarrow \mathcal{S}'$ pour tout p et tout m ; de plus $\mathcal{S}$ est dense dans $H^{p,m}$ et $H^{p,m}$ l'est dans $\mathcal{S}'$;

3° $(H^{p,m})' = H^{p',-m}$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

D. On peut donc définir $H^{p,\infty} = \bigcap_m H^{p,m}$ (resp. $H^{p,-\infty} = \bigcup_m H^{p,m}$) muni de la topologie limite projective (resp. inductive) des topologies des $H^{p,m}$. (Ces espaces sont étudiés avec la notation $\mathcal{D}_{L^p}$ et $\mathcal{D}'_{L^p}$ dans [3]).

Citons les résultats suivants :

1° $H^{p,\infty}$ et $H^{p,-\infty}$ sont en dualité (immédiat) ;

2° $\mathcal{E}' \subset H^{p,-\infty}$ et $H^{p,\infty} \subset \mathcal{E}$ et les injections correspondantes sont continues.

DÉMONSTRATION. - Par dualité, il suffit de prouver que $H^{p,\infty} \subset \mathcal{E}$; en tronquant par $\varphi \in \mathcal{D}$, on se ramène au cas où $\psi \in \mathcal{E}' \cap H^{p,\infty}$: il reste à montrer que $\psi \in \mathcal{D}$, ce qui résulte du lemme suivant.

LEMME. - Si $f \in L^1(\underset{\sim}{R}^n)$ et $D^k f \in L^1(\underset{\sim}{R}^n)$ pour $|k| \leq n + p$, alors f est p fois continuement différentiable (cf. [3]).

La continuité de l'injection $\mathcal{E} \to H^{p,\infty}$ est immédiate.

E. Notons enfin que les espaces $H^{p,m}$, $1 \leq p < \infty$, m fini ou infini, sont des espaces de distributions normaux, et qu'ils possèdent la propriété d'approximation par troncature et régularisation.

Dans la suite, nous utiliserons constamment cette propriété, de manière implicite, pour prolonger par continuité, de manière unique, des opérateurs linéaires (resp. bilinéaires) de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$) dans un de ces espaces noté F , en opérateurs linéaires (resp. bilinéaires) d'un de ces espaces (soit E) (resp. $E \times E'$) dans F . Nous dirons alors que cet opérateur opère de E (resp. $E \times E'$) dans F .

II. Convolution des espaces de Sobolev.

A. Convolution des espaces L^p . - p , q , r seront 3 nombres tels que $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$, $1 \leq r \leq +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$.

LEMME. - Soient f , $g \in \mathcal{D}$, on a

$$\|f * g\|_r \leq \|g\|_q \|f\|_p . \tag{1}$$

DÉMONSTRATION. - Pour $r = p$ l'inégalité (1) n'est autre que l'inégalité de Minkowski ; pour $r = +\infty$ c'est celle de Hölder.

Le cas général en résulte par le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, d'où la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - Pour p , $q < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, la convolution opère de $L^p \times L^q$ dans L^r .

Cela résulte du fait que l'application bilinéaire $\left\{\begin{matrix} \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow L^r \\ f , g \longrightarrow f * g \end{matrix}\right\}$ est continue et se prolonge, grâce à (1) en une application de $L^p \times L^q \longrightarrow L^r$. L'unicité du prolongement résulte de I.E.

REMARQUE. - Plus généralement, p_i étant des entiers tels que $1 \leq p_i < +\infty$ et $\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{p_i}) \geq n - 1$, la convolution opère, de manière commutative et associative, dans $\prod_{i=1}^{n} L^{p_i}$ à valeurs dans L^r (où $\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} - (n - 1)$)(immédiat).

B. Convolution des espaces de Sobolev. - Dans ce numéro, m_1 et m_2 désigneront des entiers finis ou non ; on conviendra que, si m est fini $\begin{cases} m + \infty = +\infty \\ m - \infty = -\infty \end{cases}$,

et $+\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $+\infty - \infty = +\infty$.

On supposera désormais que p , q ; r sont différents de 1 et $+\infty$.

PROPOSITION 1.

a. Si m_1 et m_2 sont finis, et si f , $g \in \mathcal{D}$, on a l'inégalité

$$\|f * g\|_{r,m_1+m_2} \leq C(p , q , m_1 , m_2) \|f\|_{p,m_1} \|g\|_{q,m_2} \tag{2}$$

b. La convolution opère de $H^{p,m_1} \times H^{q,m_2}$ dans H^{r,m_1+m_2} .

REMARQUE. - On généralisera aussitôt au cas de plusieurs espaces : le produit de convolution ainsi défini est alors commutatif et associatif.

DÉMONSTRATION. -

a. $0 \leq m_1 < +\infty$, $0 \leq m_2 < +\infty$.

L'inégalité (2) résulte alors du lemme 1 et du fait que

$$D^k(f * g) = (D^k f) * g = f * (D^k g) \quad .$$

L'assertion (b) s'ensuit aussitôt.

Si l'on fixe alors $f \in \mathcal{D}$, on en déduit une application continue $U_f : H^{q,m_2} \longrightarrow H^{r,m_1+m_2}$ définie par $U_f(g) = f * g$. La transposition ${}^tU_f$ applique $H^{r',-m_1-m_2}$ dans $H^{q',-m_2}$ et a même norme que U_f .

b. D'ou le cas $0 \leq m_1 < +\infty$ et $-\infty < m_2 \leq 0$: la restriction de ${}^tU_f$ à $\mathcal{D}$ coïncide avec l'opérateur $g \longrightarrow \check{f} * g$ (où $\check{f}$ est la symétrique de f par rapport à l'origine) .

Donc l'inégalité (2) reste vraie, et l'assertion (b) en découle.

Fixons maintenant $g \in \mathcal{D}$ et considérons $V_g : H^{p,m_1} \longrightarrow H^{r,m_1+m_2}$.

c. Par transposition de V_g on passe ainsi au cas $-\infty < m_1 \leq 0$ et $-\infty < m_2 \leq 0$.

d. On traite les cas restants par passage à la limite inductive ou projective.

Voici enfin un résultat qui nous sera utile.

PROPOSITION 2.

a. Soit k une distribution et $k*$ l'opérateur de convolution associé. Supposons que $k*$ soit de type (p, p) $(1 < p < +\infty)$. Alors $k*$ opère de $H^{p,m}$ dans $H^{p,m}$.

b. Soit E un sous-espace de $\mathcal{D}'$, et l'application bilinéaire $j : E \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ définie par $j(k, \varphi) = k * \varphi$. Soit p tel que $1 < p < \infty$, et supposons que j soit prolongeable en une application continue de $E \times L^p \to L^p$; alors j opère de $E \times H^{p,m}$ dans $H^{p,m}$.

DÉMONSTRATION. - Pour $m \geq 0$, c'est immédiat, vu que c'est vrai pour $m = 0$, et que la convolution commute à la dérivation. Le cas $m < 0$ s'en déduit par transposition, du fait que $k*$ est alors de type (p', p') avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

III. Espaces de distributions valeurs principales.

Soit Σ_p l'ensemble des distributions $f = c\delta + \text{v.p.}K$ $(1 \leq p \leq +\infty)$, où K est une fonction définie dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$ à valeurs complexes vérifiant les conditions :

1° K est homogène de degré $-n$;

2° $K \in L^p(\Omega)$;

3° $\int_{\Omega} K(\omega)\, d\omega = 0$.

On sait que la décomposition $f = c\delta + \text{v.p.}K$ est unique, et il est immédiat que l'application $j : \begin{cases} \Sigma_p \to L^p(\Omega) \\ f \to c + K \end{cases}$ est bijective.

Nous désignerons désormais par Σ_p l'espace de Banach défini par cette bijection. Il est clair qu'on a $\Sigma_p \subset \Sigma_q$ si $1 \leq q \leq p$, et que cette injection est continue.

PROPOSITION 3. - Soit $1 < p \leq +\infty$, $1 < q < +\infty$, $0 \leq m \leq +\infty$.

a. L'application bilinéaire continue $\begin{cases} \Sigma_p \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}' \\ (f, \varphi) \to f * \varphi \end{cases}$ opère de $\Sigma_p \times H^{q,m}$ dans $H^{q,m}$.

b. Si $k \in \Sigma_p$, les opérateurs de convolution $k_\varepsilon : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$, pour $\varepsilon \geq 0$, opèrent dans $H^{q,m}$. (On rappelle que, pour $\varepsilon = 0$, $k_\varepsilon = k$, par définition).

En effet, on sait que c'est vrai pour $m = 0$ (exposé n° 4) ; la proposition 2 entraîne alors le résultat.

PROPOSITION 4. - Pour tout $k \in \Sigma_p$, $(1 < p < +\infty)$ et tout $\varepsilon \geq 0$, on a : $k_\varepsilon \in H^{q,-\infty}$ $(1 < q \leq p)$; et l'injection $\Sigma_p \to H^{q,-\infty}$ ainsi définie est continue.

Il suffit évidemment (puisque $\Sigma_p \subset \Sigma_q$) de démontrer ces assertions pour $p = q$. Alors, pour $\varepsilon > 0$, on a : $k_\varepsilon \in L^p$ (évident), donc $k_\varepsilon \in H^{p,-\infty}$; reste à traiter le cas $\varepsilon = 0$: mais $k - k_1$ est une distribution à support compact, donc $\in H^{p,-\infty}$ (paragraphe I) ; et $k = k_1 + (k - k_1)$ est encore dans $H^{p,-\infty}$.

APPLICATION. Convolution des distributions valeurs principales. - Des résultats précédents et du paragraphe II, résulte que l'on peut définir la convolution de Σ_p et Σ_q, $(1 < p \leq +\infty$; $1 < q \leq +\infty)$ en les considérant comme sous-espaces de $H^{p_1,-\infty}$ et $H^{q_1,-\infty}$; et en prenant p_1 et q_1 assez voisins de 1. On vérifie facilement que le résultat ne dépend pas du p_1 et du q_1 choisis (tronquer et régulariser) ; et aussi (même procédé) que le résultat coïncide avec celui que nous avons obtenu à l'exposé 4, (où l'on définissait la convolution par le produit des opérateurs sur les L^p, i. e. par la multiplication des transformées de Fourier).

REMARQUE. - Pour $1 < p < +\infty$, on peut démontrer que l'on a : $\Sigma_p * \Sigma_p \subset \Sigma_p$ (par application de méthodes analogues à celles de l'exposé précédent), et qu' alors, Σ_p est une algèbre de Banach commutative, avec élément unité, dont les idéaux maximaux sont en correspondance bijective avec les points de la sphère Ω_ξ (i. e. l'idéal maximal correspondant à $\xi_0 \in \Omega_\xi$ est formé des k tels que $\mathcal{F}k(\xi_0) = 0$).

Pour la démonstration, voir CALDERÓN-ZYGMUND [2].

IV. Noyaux valeurs principales ("opérateurs intégraux singuliers à coefficients variables").

Soit $k = k(x, y) \in L^\infty_x[(\Sigma_1)_y]$, espace des (classes de) fonctions mesurables et essentiellement bornées, à valeurs dans l'espace de Banach Σ_1 ; k définit un noyau $\mathcal{D}_y \to \mathcal{D}'_x$ (utiliser la propriété de Lusin, prise comme définition des fonctions mesurables).

On peut aussi considérer les k_ε ($\varepsilon > 0$, on pose $k_0 = k$) définis, comme précédemment en tronquant k par la multiplication par $\varphi_\varepsilon(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| > \varepsilon \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$

NOTATION. - $L(x, y)$ étant un noyau $\mathcal{D}_y \to \mathcal{D}'_x$, on note θL ou $L(x, x-y)$ le noyau $\mathcal{D}_y \to \mathcal{D}'_x$ image réciproque de L par l'application $(x, y) \to (x, x-y)$.

Des résultats précédemment établis, on déduit facilement ceci (on laisse au lecteur le soin de vérifier les détails) : si $k \in L^\infty(\Sigma_q)$, $1 < q \leq +\infty$, les θk_ε opèrent de $H^{p,\infty}$ dans L^∞ $(1 < p < +\infty)$.

THÉORÈME 2. (CALDERÓN-ZYGMUND [1]). - Si $1 < q < +\infty$, et si $k \in L^\infty(\Sigma_q)$, l'opérateur θk est de type (p, p) pour $q' \leq p < +\infty$ $(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1)$.

DÉMONSTRATION. - Soit $k(x, y) = a(x)\, \delta_y + \text{v.p.} K(x, y)$

1° Si $k(x, y) = a(x)\, \delta_y$, c'est immédiat : $a \in L^\infty$ donc $\varphi \to a(x)\, \varphi$ est de type (p, p) pour tout p ;

2° On supposera donc $k(x, y) = \text{v.p.} K(x, y)$ et de plus $p = q'$ (puisque $\Sigma_p \subset \Sigma_q$, si $q \leq p$) ; la démonstration sera faite en deux étapes comme dans l'exposé n° 4 :

a. Le cas favorable, où $K(x, y) = -K(x, -y)$;

b. Le cas où K est pair.

a. Le cas favorable. - Nous allons montrer que θk_ε opère de $L^{q'}$ dans $L^{q'}$, et que ces opérateurs forment une partie bornée dans $\mathcal{L}(L^{q'}, L^{q'})$: θk sera donc de type (p, p). Prenons pour cela $\varphi \in \mathcal{D}$ et majorons $\theta k_\varepsilon(\varphi)(x)$

$$(\theta k_\varepsilon)(\varphi)(x) = \int_{|y| \geq \varepsilon} K(x, y)\, \varphi(x-y)\, dy$$

K étant impair et $K(x, \omega) \in L^\infty_x[L^q(\Omega)]$, passons en coordonnées polaires :

$$(\theta k_\varepsilon)(\varphi)(x) = \frac{1}{2} \int_\Omega K(x, \omega)\, d\omega \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{t} [\varphi(x - t\omega) - \varphi(x + t\omega)]\, dt$$

Donc, par l'inégalité de Hölder élevée à la puissance q' :

$$|\theta k_\varepsilon(\varphi)(x)|^{q'} \leq \frac{1}{2^{q'}} [\int_\Omega |K(x, \omega)|^q\, d\omega]^{q'/q} \int_\Omega d\omega \left| \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{t} [\varphi(x - t\omega) - \varphi(x + t\omega)]\, dt \right|^{q'} .$$

Par hypothèse, $[\int_\Omega |K(x, \omega)|^q\, d\omega]^{1/q}$ est bornée par une constante C ; et en intégrant par rapport à x, on obtient

$$\|\theta k_\varepsilon(\varphi)\|_{q'} = [\int_{\mathbb{R}^n} |\theta k_\varepsilon(\varphi)(x)|^{q'}\, dx]^{1/q'}$$
$$\leq \frac{C}{2} [\int_{\mathbb{R}^n \times \Omega} dx\, d\omega \left| \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{t} [\varphi(x - t\omega) - \varphi(x + t\omega)]\, dt \right|^{q'}]^{\frac{1}{q'}} .$$

Puis, en utilisant les mêmes transformations qu'à l'exposé n° 4
$\|\theta k_\varepsilon(\varphi)\|_{q'} \leqslant C' \|\varphi\|_{q'}$, où C' est une constante indépendante de φ .

b. Le cas "pair". - Comme dans l'exposé 4, nous allons nous ramener au cas favorable en utilisant les distributions r_j de M. RIESZ.

Pour $\varphi \in \mathcal{D}$, on écrit $\varphi = C \sum r_j * r_j * \varphi$ et $(\theta k)(\varphi) = C \sum (\theta k)(r_j * r_j * \varphi)$
Comme $r_j * \varphi \in H^{p,\infty}$, tout revient à majorer $\|(\theta k)(r_j * \psi)\|_{p,0}$ en fonction de $\|\psi\|_{p,0}$, pour $\psi \in H^{p,\infty}$, donc (par passage à la limite), pour $\psi \in \mathcal{D}$.

Or, il est immédiat que le noyau $\psi \to (\theta k)(r_j * \psi)$ n'est autre que $\theta(k \underset{y}{*} r_j)$; et il résulte de l'exposé 4 que $k \underset{y}{*} r_j$ est impair en y , et $\in L^\infty(\Sigma_p)$: nous sommes donc ramenés au cas favorable et le théorème est démontré.

REMARQUES.

1° On peut encore prouver, dans le cas pair, que les θk_ε sont de type (p , p) et convergent vers θk dans $\mathcal{L}_C(L^p , L^p)$.

2° La restriction $q' \leqslant p < +\infty$ ne peut pas être levée (voir des contre-exemples dans [1]).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - On singular integrals, Amer; J. of Math., t. 78, 1956, p. 289-309.

[2] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - Algebras of certain singular operators, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 310-320.

[3] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, tome 1, 2e éd., et tome 2. - Paris, Hermann, 1957 et 1951 (Act. scient. et ind., 1091 = 1245 et 1122 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 9 et 10).