BERNARD MALGRANGE

Multiplicateurs de $\mathcal{F} L^p$ (fin)

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n° 4, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A4_0>

24 novembre 1959

MULTIPLICATEURS DE $\mathcal{F}L^p$ (fin)

par Bernard MALGRANGE

(d'après CALDERÓN-ZYGMUND [2] et [3])

Soit k "une distribution v. p." (valeur principale), i. e. une distribution définie par la fonction $\varkappa$, positivement homogène de degré $-n$, localement sommable dans $R^n - \{0\}$ $\left(\int_\Omega |\varkappa(\omega)|\, d\omega < +\infty\right)$ et vérifiant $\int_\Omega \varkappa(\omega)\, d\omega = 0$, Ω étant la sphère unité. D'après l'exposé numéro 3, la convolution par k est continue de L^p dans L^p $(1 < p < \infty)$, sous l'hypothèse additionnelle que $\varkappa$ est une fois continuement différentiable dans $R^n - \{0\}$. Une autre méthode, exposée plus bas dans la paragraphe 2, conduira au même résultat, sous une hypothèse affaiblie: $\varkappa(\omega) + \varkappa(-\omega) \in L^q(\Omega)$ pour <u>un</u> $q > 1$. Il faut d'abord examiner la convolution des distributions "v. p.".

1. Transformées de Fourier et convolution des distributions "v. p.".

a. Transformées de Fourier des distributions "v. p.".

PROPOSITION 1. - La transformée de Fourier d'une distribution tempérée homogène de degré d est homogène de degré $-n-d$.

En effet, T est homogène de degré d si et seulement si, $\forall \lambda > 0$ et $\forall g \in \mathcal{S}$, $\langle T_x, g(\lambda x)\rangle = \lambda^{-n-d} \langle T, g\rangle$; alors,

$$\langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}g(\lambda\xi)\rangle = \lambda^{-n} \langle T_x, g(\lambda^{-1} x)\rangle = \lambda^{-n-(-n-d)} \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}g\rangle .$$

(Cette proposition a déjà été utilisée implicitement dans l'exposé numéro 3 ; homogène est mis pour positivement homogène).

PROPOSITION 2. - La transformée de Fourier d'une "distribution v. p." une fois continuement différentiable en dehors de l'origine est une fonction homogène de degré 0, $K \in L^\infty_\xi$, vérifiant

$$\int_{\Omega_\xi} K(\sigma)\, d\sigma = 0 \qquad (\Omega_\xi : \text{sphère unité du dual de } R^n)$$

La première affirmation est démontrée dans l'exposé précédent, et résulte aussi des propositions 1 et 3. Soit $\alpha \in \mathcal{D}$, de support dans $R^n - \{0\}$, réelle, invariante par rotation et telle que $\int t^{n-1}\, \mathcal{F}\alpha(t)\, dt \neq 0$. Par transport de structure, $\mathcal{F}\alpha$

est invariante par rotation. On a :

$$\langle k , \alpha \rangle = \int t^{-1} \varkappa(\omega) \alpha(t) \, dt \, d\omega = \int \varkappa(\omega) \, d\omega \int \alpha(t) \, t^{-1} \, dt = 0$$

donc,

$$\langle K , \mathcal{F}\alpha \rangle = \int t^{n-1} K(\sigma) \, \mathcal{F}\alpha(t) \, dt \, d\sigma = 0 \quad ,$$

donc

$$\int_{\Omega\xi} K(\sigma) \, d\sigma = 0 \quad .$$

PROPOSITION 3. - La transformée de Fourier K d'une "distribution v. p." : $k = \text{v. p.} \, \varkappa$, p fois continuement différentiable (c. d.) en dehors de l'origine est $p - 1$ fois c. d. (respectivement bornée continue) dans $R^n - \{0\}$ si $p \geq 2$ (respectivement $p = 1$).

Soit $\beta \in \mathcal{E}_x$, nulle pour $0 \leq |x| \leq 1$, $\beta = 1$ pour $|x| > 2$; $k = \beta k + (1 - \beta) k$, $(1 - \beta) k$ est à support compact, donc $\mathcal{F}(1 - \beta) k$ est analytique $\beta k = \beta \varkappa$; $\varkappa$ est homogène de degré $- n$; soit D^p une dérivation d'ordre p, quelconque :

$$D^p(\beta \varkappa) = O(|x|^{-n-p})$$

et est continue, donc :

$$x^{p-1} D^p \beta \varkappa \in L^1 \quad (x^{p-1} : \text{un monôme en } x_i \, , \ i = 1 , 2 , \ldots , n , \text{ d'ordre } p - 1)$$

donc :

$$D^{p-1} \xi^p \mathcal{F}\beta \varkappa \in \mathcal{F} L^1 \subset \mathcal{E}^0 \quad ,$$

ξ^p désignant le monome en ξ_i correspondant à la dérivation D^p, donc :

$$K \in \mathcal{E}^{p-1}(R^n - \{0\}) \quad .$$

PROPOSITION 4. - Soit $K(\xi)$ une fonction homogène de degré 0 et $\int_{\Omega\xi} K(\sigma) \, d\sigma = 0$; si $K \in \mathcal{E}^p(R^n - \{0\})$, $p \geq n + 1$, alors, $\bar{\mathcal{F}} K$ est $p - n - 1$ continuement différentiable en dehors de l'origine ; si $\varkappa$ est la fonction ainsi définie dans $R^n - \{0\}$, $\int_{\Omega} \varkappa(\omega) \, d\omega = 0$, et $\bar{\mathcal{F}} K = \text{v. p.} \, \varkappa$.

Soit β la fonction définie, comme précédemment, mais sur Ξ^n dual de R^n

$$K = \beta K + (1 - \beta) K \quad .$$

$\bar{\mathcal{F}}(1 - \beta) K$ est analytique (le support de $(1 - \beta) K$ est compact).

$\bar{\mathcal{F}} \beta K$? On a $D^p \beta K = O(|\xi|^{-p})$ car K est homogène de degré 0. $D^p \beta K \in \mathcal{E}^0$

donc $\xi^{p-n-1} D^p \beta K \in L^1(\Xi^n)$ et, avec les mêmes conventions que précédemment ,

$$D^{p-n-1} x^p \bar{\mathcal{F}}(\beta K) \in \mathcal{E}^0(R^n)$$

donc,

$$D^{p-n-1} \bar{\mathcal{F}} \beta K \in \mathcal{E}^0(R^n - 0)$$

donc

$$\bar{\mathcal{F}} K \in \mathcal{E}^{p-n-1}(R^n - \{0\}) \quad ;$$

la fonction $\varkappa$ ainsi définie est homogène de degré $-n$ (proposition 1) ; on montre alors, comme dans la proposition 2, que $\int_\Omega \varkappa(\omega)\, d\omega = 0$. On trouve donc bien ce que l'on a appelé v. p. $\varkappa$, dans le complémentaire de l'origine. Donc, $\bar{\mathcal{F}} K = \text{v. p. } \varkappa + T$ où T est une distribution de support l'origine ; c'est une somme finie de dérivées de δ ; mais toute dérivée d'ordre d de δ est homogène d'ordre $-n-d$; il faut donc (proposition 1) que $T = C\,\delta$, donc

$$\bar{\mathcal{F}} K = \text{v. p. } \varkappa + C\,\delta$$

donc

$$K = \mathcal{F} \text{v. p. } \varkappa + C$$

$K_1 = \mathcal{F} \text{v. p. } \varkappa$ vérifie (proposition 2) $\int_{\Omega_\xi} K_1(\sigma)\, d\sigma = 0$; $\int K(\sigma)\, d\sigma = 0$ par hypothèse, donc $C = 0$.

C. Q. F. D.

Prenons encore $K \in \mathcal{E}^p(R^n - \{0\})$, homogène de degré 0 sans autre hypothèse ; soit $C = \int_{\Omega_\xi} K(\sigma)\, d\sigma$, alors $K = K_1 + C$ avec $\int K_1(\sigma)\, d\sigma = 0$ et d'après la proposition 4, $K_1 = \mathcal{F} \text{v. p. } \varkappa$ donc :

COROLLAIRE. - La transformation de Fourier est un isomorphisme de Σ et $\hat{\Sigma}$ où :

Σ : espace des distributions $C\,\delta + \text{v. p. } \varkappa$ où $\varkappa \in \mathcal{E}(R^n - \{0\})$

$\hat{\Sigma}$: espace des distributions K homogènes de degré 0 , $K \in \mathcal{E}(R^n - \{0\})$

Σ muni de la topologie de $\mathcal{E}(\Omega) \oplus R$ et $\hat{\Sigma}$ de la topologie de $\mathcal{E}(\Omega_\xi)$.

b. Convolution des distributions v. p.

On les suppose indéfiniment différentiables en dehors de l'origine ; et on peut supposer $C = 0$, soit $k_1 \in \Sigma$, $k_2 \in \Sigma$, sans masse à l'origine : $k_1 = \text{v. p. } \varkappa_1$, $k_2 = \text{v. p. } \varkappa_2$.

THÉORÈME 1. - $\varkappa_{1\varepsilon} * \varkappa_{2\eta} = \int_{\substack{|x-y| > \varepsilon \\ |y| > \eta}} \varkappa_1(x-y)\, \varkappa_2(y)\, dy$ a une limite

$\varkappa_1 \perp \varkappa_2(x)$ si ε et $\eta \to 0$ pour $x \neq 0$; cette limite $\varkappa_1 \perp \varkappa_2$ est homogène de degré $-n$, $\int_\Omega \varkappa_1 \perp \varkappa_2(\omega)\, d\omega = 0$, $\varkappa_1 \perp \varkappa_2 \in \mathcal{E}(R^n - \{0\})$ elle définit donc une "v. p." : $k_1 \perp k_2 = \text{v. p. } \varkappa_1 \perp \varkappa_2 \in \Sigma$ et v. p.$(\varkappa_1 \perp \varkappa_2) = k_1 * k_2 - C\delta$; $k_1 * k_2$ désignant la distribution v. p. (proposition 4) définie par $\mathcal{F}(k_1 * k_2) = K_1 K_2 (\in L^\infty)$. (On voit immédiatement par Fourier qu'elle opère par convolution dans L^2 ; de même dans L^p d'après l'exposé précédent).

DÉMONSTRATION. - Il est clair que les conditions à l'infini sont telles que $\varkappa_{1\varepsilon} * \varkappa_{2\eta}$ existe. Existence de la limite : soit $\alpha \in \mathcal{D}$, $\alpha = 1$ au voisinage de 0,

$$\int_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |y|>\eta}} \varkappa_1(x-y)\,\varkappa_2(y)\,dy = \int_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |y|>\eta}} [\varkappa_1(x-y) - \varkappa_1(x)\alpha(y)][\varkappa_2(y) - \varkappa_2(x)\,\alpha(x-y)]\,dy$$

$$+ \varkappa_2(x) \int_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |y|>\eta}} \varkappa_1(x-y)\alpha(x-y)\,dy + \varkappa_1(x) \int_{\substack{|y|>\eta \\ |x-y|>\varepsilon}} \alpha(y)\,\varkappa_2(y)\,dy$$

$$- \varkappa_1(x)\ \varkappa_2(x) \int_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |y|>n}} \alpha(y)\,\alpha(x-y)\,dy\ .$$

Des quatre termes ainsi apparus, le quatrième a évidemment une limite, le deuxième et le troisième restent constants dès que ε et η sont assez petits, car alors $\alpha(x-y) = \alpha(y) = 1$ et $\int \varkappa_1(\omega)\,d\omega = \int \varkappa_2(\omega)\,d\omega = 0$. Enfin la fonction sous le premier signe d'intégration est intégrable : lorsqu'un facteur devient comme $0\,\frac{1}{|y|^n}$ l'autre devient $0(|y|)$.

On vérifie facilement que la convergence est uniforme pour x dans un compact de $R^n - \{0\}$. Donc $\varkappa_1 \perp \varkappa_2$ est continue. On a $\varkappa_1 \perp \varkappa_2 \in \mathcal{E}(R^n - \{0\})$; ce dernier point se vérifie directement : $\varkappa_{1\varepsilon} * \varkappa_{2\eta}$ a une dérivée $\varkappa'_{1\varepsilon} * \varkappa_{2\eta}$ qui converge uniformément comme $\varkappa_1 * \varkappa_2$ et même mieux, lorsque ε et $\eta \to 0$ on applique alors un résultat classique. Mais cette vérification est inutile : on va obtenir autrement l'infinie différentiabilité de $\varkappa_1 \perp \varkappa_2$, sachant qu'elle est limite uniforme : dans $R^n - \{0\}$, $\varkappa_1 \perp \varkappa_2$ est une fonction continue, donc

définit une distribution limite, toujours dans $R^n - \{0\}$, des $\varkappa_{1\varepsilon} * \varkappa_{2\eta}$.
On va montrer que $\varkappa_{1\varepsilon} * \varkappa_{2\eta}$ converge au sens des distributions vers $k_1 * k_2$ en dehors de l'origine ; donc, dans $R^n - \{0\}$, $k_1 * k_2$ et $\varkappa_1 \perp \varkappa_2$ sont égales comme distributions, donc comme fonctions puisque continues ; comme (voir corollaire précédent) $k_1 * k_2$ est une " v. p. " en notre sens, avec peut-être en plus une masse à l'origine, dans $R^n - \{0\}$, $k_1 * k_2$ est homogène de degré $-n$, indéfiniment différentiable, de moyenne nulle sur Ω ; il en est de même de $\varkappa_1 \perp \varkappa_2$ qui définit une v. p. :

$$k_1 \perp k_2 = \text{v. p. } \varkappa_1 \perp \varkappa_2 = k_1 * k_2 + C\,\delta$$

car $k_1 \perp k_2$ et $k_1 * k_2$ sont toutes deux homogènes de degré $-n$ et égales en dehors de l'origine.

Or, $\mathcal{F} k_{1\varepsilon} \to \mathcal{F} k_1$ presque partout (pour ξ donné $\left|\int_{\varepsilon' < |x| < \varepsilon} e^{2\pi \langle x, \xi \rangle} \varkappa_{1\varepsilon'}\, dx\right|$ est aussi petit qu'on veut) et les $\mathcal{F} k_{1\varepsilon}$ sont uniformément bornées (exposé précédent) donc

$$\mathcal{F} k_{1\varepsilon}\ \mathcal{F} k_{2\eta} \longrightarrow \mathcal{F} k_1\ \mathcal{F} k_2$$

presque partout et sont uniformément bornées dans L^∞_ξ ; et, (LEBESGUE) la convergence se fait dans L^∞ faible, donc dans $\mathcal{S}'$ faible.

2. Autre version du théorème de Calderón-Zygmund.

THÉORÈME 2 (CALDERÓN-ZYGMUND [1]). - Supposons que $\varkappa$ définisse une "distribution v. p. " et de plus que $\varkappa(\omega) + \varkappa(-\omega) \in L^q$ pour un q vérifiant $1 < q < \infty$. Alors $k * = \text{v. p. } \varkappa \in \bar{\mathcal{F}}(M_p)$, (opère par convolution dans L^p) et

$$\|k\|_{\mathcal{F}M_p} \leqslant C_{pq} \left[\, \|\varkappa\|_{L^1(\Omega)} + \|\varkappa(\omega) + \varkappa(-\omega)\|_{L^q(\Omega)} \right] .$$

DÉMONSTRATION.

1° Supposons d'abord $\varkappa$ impaire : $\varkappa(\omega) = -\varkappa(-\omega)$; $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$k_\varepsilon * \varphi = \int_{|y| > \varepsilon} \varphi(x - y)\, \varkappa(y)\, dy .$$

On passe en coordonnées polaires ($\varkappa$ homogène) :

$$k_\varepsilon * \varphi = \int_{t > \varepsilon} t^{-1}\, dt \int_\Omega \varkappa(\omega)\, \varphi(x - t\omega)\, d\omega = \int_{t > \varepsilon} t^{-1}\, dt \int_\Omega \varkappa(-\omega)\, \varphi(x + t\omega)\, d\omega$$

donc

$$k_\varepsilon * \varphi = 1/2 \int_\Omega \varkappa(\omega)\, d\omega \int_\varepsilon^{+\infty} t^{-1} [\varphi(x - t\omega) - \varphi(x + t\omega)]\, dt \quad .$$

On a (MINKOWSKI) :

$$\|k_\varepsilon * \varphi\|_p \leq 1/2 \int_\Omega |\varkappa(\omega)| d\omega \left(\int_{R^n} dx \left|\int_\varepsilon^{+\infty} t^{-1}[\varphi(x - t\omega) - \varphi(x + t\omega)]\, dt\right|^p\right)^{1/p}$$

pour calculer l'intégrale sur R^n , on peut procéder d'après FUBINI par intégrations successives en choisissant par exemple l'axe de ω comme axe des x_1

$$\int_\varepsilon^{+\infty} t^{-1}[\varphi(x - t\omega) - \varphi(x + t\omega)] = \text{v. p. } (1/t)_\varepsilon * \varphi$$

$$\int dx_1 |\text{v. p.}(1/t)_\varepsilon * \varphi|^p \leq C_p^p \int dx_1 |\varphi(x_1 , \ldots , x_2 , \ldots , x_n)|^p$$

(exposés 2 et 3) C_p indépendant de ε . Donc

$$\int_{R^n} dx \left|\int_\varepsilon^{+\infty} t^{-1}[\varphi(x - t\omega) - \varphi(x + t\omega)]\, dt\right|^p$$
$$\leq C_p^p \; |\varphi(x_1 , \ldots , x_n)|^p\, dx_1 , \ldots , dx_n$$

et

$$\|k_\varepsilon * \varphi\|_p \leq 1/2\, C_p \int |\varkappa(\omega)|\, d\omega \|\varphi\|_p$$

pour $\varphi \in \mathcal{D}^1$, $k_\varepsilon * \varphi$ converge uniformément vers $k * \varphi$; car, φ étant à support compact, $\varphi(x - y) = \varphi(x) + \sum y^i g_i(y , x)$ avec $|g_i(y , x)| < M < \infty$ donc

$$|\text{v. p.} \int_{|y|<\varepsilon} \varkappa(y)\, \varphi(x - y)\, dy| \leq \sum M \int |\varkappa(y)\, y^i|\, dy \leq AM\varepsilon$$

donc

$$\|k * \varphi\|_p \leq 1/2\, C_p \int |\varkappa(\omega)|\, d\omega \|\varphi\|_p \quad .$$

Il en résulte immédiatement que, pour $\varphi \in \mathcal{D}^1$, les $k_\varepsilon * \varphi$ convergent vers $k * \varphi$ dans L^p ; comme les k_ε forment un ensemble équicontinu dans $\mathcal{L}(L^p , L^p)$, k est limite des k_ε dans $\mathcal{L}_c(L^p , L^p)$ [1] .

2° Cas général. - On sépare les parties paire et impaire, de $\varkappa(\omega)$. Il reste donc à démontrer le théorème pour $\varkappa(\omega) = \varkappa(-\omega)$, $\varkappa \in L^q(\Omega , d\omega)$ $q > 1$.

a. Supposons d'abord $\varkappa$ indéfiniment différentiable. On va se ramener au cas de $\varkappa$ impaire, en considérant $\varkappa * r_j$, où r_j est la distribution v. p. impaire :

$$r_j = \text{v. p.} \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \quad .$$

On a $\mathcal{F}(r_j) = \varkappa_j = C \frac{\xi_j}{|\xi|}$, <u>impaire</u>, donc (théorème 1), $k * r_j = \text{v. p.}[r_j \perp \varkappa]$.

(Les $r_j *$ sont les noyaux de Riesz, ce sont des opérateurs dans L^p (théorème de l'exposé 2) ;

$$\sum \frac{\xi_j^2}{|\xi|^2} = 1 \quad .$$

Par Fourier, on a : $\sum r_j * r_j = C\delta$.

On va montrer :

$$(1) \qquad \|r_j \perp \varkappa\|_{L^q(\Omega)} \leq C_q \|\varkappa\|_{L^q(\Omega)} \quad .$$

D'après les résultats obtenus pour $\varkappa$ impaire :

$$\|r_j * k\|_{\mathcal{F}M_p} \leq C_p \|r_j * k\|_{L^1(\Omega)} \leq C_{pq} \|r_j * k\|_{L^q(\Omega)} = C_{pq} \|r_j \perp k\|_{L^q(\Omega)}$$

et d'après (1)

$$\|r_j * k\|_{\mathcal{F}M_p} \leq C'_{pq} \|\varkappa\|_{L^q(\Omega)} \quad .$$

Démontrons donc (1) ; soit Γ la couronne : $1 \leq |x| \leq 2$; $r_j * k$ est homogène, il suffit donc de démontrer que $\|r_j \perp k\|_{L^q(\Gamma)} \leq C \|\varkappa\|_{L^q(\Omega)}$. Soit :

$$k = k_{1/2} + k' \quad ; \qquad k_\varepsilon = k_{1/2} + k'_\varepsilon$$

$$r_j * k_\varepsilon = r_j * k_{1/2} + r_j * k'_\varepsilon$$

$k_{1/2}$ est dans L^q (homogénéité) donc, $r_j * k_{1/2}$ est dans $L^q(R^n)$ et

$$\|r_j * k_{1/2}\|_{L^q(\Gamma)} < C \|k_{1/2}\|_{L^2(\Omega)}$$

Étudions $r_j * k'_\varepsilon$ dans Γ :

$$r_j * k'_\varepsilon = \int_{\varepsilon < |y| < 1/2} r_j(x-y)\, \varkappa(y)\, dy = \int_{\varepsilon < |y| < 1/2} [r_j(x-y) - r_j(x)] \varkappa(y)\, dy \, .$$

Or, si x et y sont dans les régions considérées, $|r_j(x - y) - r_j(x)| \leq C|y|$ (C indépendant de ε) en passant en polaires, on a donc, dans Γ ,

$$|r_j * \kappa'_\varepsilon| < C \int |\kappa(\omega)| \, d\omega < C\left(\int |\kappa(\omega)|^q \, d\omega\right)^{1/q} \quad .$$

Le résultat s'ensuit.

b. Cas général : on régularise k par des éléments de Σ qui approchent k dans $L^q(\Omega)$.

REMARQUE. - Le théorème 2 est encore vrai si l'on suppose

$$\lambda(\omega) = \kappa(\omega) + \kappa(-\omega) \in L^1 \text{ Log } L^1$$

i. e.

$$\int |\lambda(\omega)|(1 + \text{Log}^+ |\lambda(\omega)|) \, d\omega < +\infty \quad .$$

Voir d'autres résultats dans [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale (fascicule de résultats). - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1196 ; Eléments de Mathématique, 16).

[2] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - On singular integrals, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 289-309.

[3] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - Algebras of certain singular operators, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 310-320.

[4] MIKHLIN (S. G.). - O mud'tiplikatorakh integralov fur'e, Doklady Nauk SSSR, t. 109, p. 701-703.