

SÉMINAIRE SCHWARTZ

BERNARD MALGRANGE

Division des distributions. II : l'inégalité de Łojasiewicz

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n° 22, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A22_0

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DIVISION DES DISTRIBUTIONS
II : L'INÉGALITÉ DE ŁOJASIEWICZ

par Bernard MALGRANGE

INTRODUCTION. - Le but de cet exposé est la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Soient Ω un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, f une fonction analytique réelle dans Ω , et V (supposé $\neq \emptyset$) l'ensemble des zéros de f . Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C > 0$ et $\rho > 0$ tels que $\forall x \in K$, on ait

$$|f(x)| \geq C d(x, V)^\rho .$$

Si $V = \emptyset$, nous laissons une fois pour toutes au lecteur le soin de faire les modifications qui s'imposent !). Avec les notations de l'exposé précédent, ce théorème est équivalent au

COROLLAIRE 1. - Soit Ω_1 un ouvert relativement compact dans Ω ; on a :
 $f \in \mathcal{O}_{\Omega_1 - V}^*$.

Dans cet exposé et les suivants, les fonctions analytiques réelles seront supposées à valeurs réelles pour des raisons de commodité. Rappelons d'autre part qu'un sous-ensemble V d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est dit "sous-ensemble analytique" si, au voisinage de chaque point de Ω , V est formé des zéros communs à un ensemble de fonctions analytiques (ensemble que l'on peut supposer fini, puisque l'anneau des germes de fonctions analytiques en un point est noethérien, et même réduit à une seule fonction, par exemple la somme de leurs carrés). Un tel V est nécessairement fermé dans Ω . Cela rappelé, nous pouvons énoncer le

COROLLAIRE 2. - Soient Ω un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, V et W deux sous-ensembles analytiques de Ω . Si K est un compact $\subset \Omega$, on a : " $V \cap K, W \cap K$ r. s. $V \cap W$ ".

Par BOREL-LEBESGUE, il suffit de démontrer le résultat au voisinage de tout point $a \in \Omega$; soit f (resp. g) analytique tel que V (resp. W) soit défini au voisinage de a par l'équation $f(x) = 0$ (resp. $g(x) = 0$); $V \cap W$ est alors défini par $f^2(x) + g^2(x) = 0$. On a donc, $\forall x$ voisin de a :

$$f^2(x) + g^2(x) \geq C d(x, V \cap W)^\rho \quad (C > 0, \rho > 0) .$$

Pour $x \in V$, on a donc

$$g^2(x) \geq C d(x, V \cap W)^\rho ;$$

d'autre part, (formule des accroissements finis), $|g(x)| \leq C' d(x, W)$. D'où le résultat.

REMARQUE. - Si K est "suffisamment bon" (par exemple une boule, un cube ...) on voit facilement qu'on a même " $V \cap K, W \cap K$ r. s. $V \cap W \cap K$ ".

1. Préliminaires.

DÉFINITION 1. - Ω étant un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, et α un nombre $0 < \alpha \leq 1$, une fonction f dans Ω est dite "quasi-holdérienne d'ordre α " (ou, si $\alpha = 1$, quasi-lipchitzienne) s'il existe $C > 0$ tel que, pour tout segment fermé $[x', x''] \subset \Omega$, on ait :

$$|f(x') - f(x'')| \leq C d(x', x'')^\alpha$$

(cette définition est plus faible que la définition classique des fonctions holdériennes où l'on exige que l'inégalité ait lieu pour tout couple $(x', x'') \in \Omega \times \Omega$).

REMARQUE utile. - Soit Ω un ouvert $\subset \mathbb{R}^k$, $k < n$ et soient (f_{k+1}, \dots, f_n) des fonctions quasi-holdériennes d'ordre α dans Ω . Posons,

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \text{pr } x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \quad .$$

Considérons l'ensemble $V \subset \mathbb{R}^n$ défini par $x_{k+i} = f_{k+i}(x_1, \dots, x_k)$, $i = 1, \dots, n - k$, $(x_1, \dots, x_k) \in \Omega$. V est évidemment localement fermé, et l'on a, pour un $C > 0$ convenable :

$$\forall x \in V, d(x, bV) \leq C d(\text{pr } x, b\Omega)^\alpha \quad .$$

Voici un autre résultat, presque aussi trivial, et non moins utile :

PROPOSITION 1. - Ω étant un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, soient a_1, \dots, a_p des fonctions bornées et quasi-lipchitziennes dans Ω . Soit f une fonction continue dans Ω (les a_i et f sont à valeurs réelles ou complexes), vérifiant

$$f^p + \sum a_i f^{p-i} = 0 \quad .$$

Alors f est quasi-holdérienne (d'ordre $\frac{1}{p}$).

(Si les a_i étaient supposées bornées et quasi-holdériennes d'ordre α , f serait quasi-holdérienne d'ordre $\frac{\alpha}{p}$).

DÉMONSTRATION. - Faisons d'abord deux remarques :

1° Les racines Z_j ($1 \leq j \leq p$) du polynôme unitaire $Z^p + \sum C_i Z^{p-i}$ vérifient toutes $|Z_j| \leq 2 \max |C_i|^{1/i}$. (On se ramène immédiatement au cas où les $|C_i|$ sont

≤ 1 ; alors, si Z est un des Z_j :

$$|Z|^p \leq 1 + |Z| + \dots + |Z|^{p-1}$$

d'où, si $|Z| \geq 1$:

$$|Z|^{p+1} - |Z|^p \leq |Z|^p \quad \text{et} \quad |Z| \leq 2 \quad) .$$

2° Soient $Z^p + \sum c_i Z^{p-i}$ et $Z^p + \sum c'_i Z^{p-i}$ deux polynômes unitaires vérifiant $|c_i| \leq K$, $|c'_i - c_i| \leq \delta$ avec $K \geq 1$; et soient $\{Z_j\}$ et $\{Z'_k\}$ les racines de ces polynômes. Pour chaque j , il existe un k tel que $|Z_j - Z'_k| \leq 2K\delta^{1/p}$ (d'après la remarque précédente, on a $\forall j$, $|Z_j| \leq 2K$. Par suite :

$$| \prod_k (Z_j - Z'_k) | = | Z_j^p + \sum c'_j Z_j^{p-i} | = | \sum (c'_j - c_j) Z_j^{p-j} | \leq \delta \sum_{j=0}^{p-1} (2K)^j \leq (2K)^p \delta \quad ,$$

d'où immédiatement le résultat).

Démontrons maintenant la proposition 1. Il suffit pour cela d'établir le résultat suivant : soient b_1, \dots, b_p des fonctions d'une variable

$$t \in [t_1, t_2] = I \quad ,$$

vérifiant,

$$\forall t \in I, \quad |b_i(t)| \leq K \quad (K \geq 1)$$

et

$$\forall t, t' \in I, \quad |b(t) - b(t')| \leq L|t - t'| \quad .$$

Soit g une fonction continue de $t \in I$ vérifiant

$$g^p + \sum b_i g^{p-i} = 0 \quad .$$

Alors

$$|g(t_2) - g(t_1)| \leq 4p K [L|t_2 - t_1|]^{1/p} \quad .$$

Soient, en effet Z_1, \dots, Z_p les racines du polynôme $Z^p + \sum b_i(t_1) Z^{p-i} = 0$, et supposons, par exemple que $Z_1 = f(t_1)$. Posons $A = 2K[L|t_2 - t_1|]^{1/p}$. D'après la remarque 2°, $\forall t \in I$, il existe un Z_i tel que $|f(t) - Z_i| \leq A$.

Considérons alors dans \mathbb{C} l'ensemble Δ , réunion des disques fermés de centres Z_i et de rayon A , et soit Δ' la composante connexe de Z_1 dans Δ ; on a, $\forall t \in I$: $f(t) \in \Delta'$; et le diamètre de Δ' est évidemment $\leq 2p A$. D'où le résultat.

2. Rappels sur les germes analytiques réels.

Par définition, deux ensembles analytiques réels au voisinage de a définissent le même germe en a (d'ensemble analytique réel) s'ils coïncident dans un voisinage

de a . Les notions d'inclusion, de réunion et d'intersection finies de germes en a se définissent de façon évidente. Si \mathcal{O}_n désigne l'anneau des séries entières (à coefficients réels) des indéterminées x_1, \dots, x_n , convergentes au voisinages de 0 , l'ensemble des $f \in \mathcal{O}_n$ qui s'annulent sur le germe E (lorsqu'on y remplace x_i par $x_i - a_i$) forme un idéal, noté $I(E)$. E est dit irréductible si $E = E_1 \cup E_2$ entraîne $E = E_1$ ou $E = E_2$. Tout germe E se décompose en une réunion finie de germes irréductibles $E = \bigcup_i E_i$ (parce que l'anneau \mathcal{O}_n est noethérien); si l'on suppose que $\forall i, j$, on a $E_i \not\subset E_j$, cette décomposition est unique, et les E_i ainsi obtenus s'appellent "composantes irréductibles de E ". Enfin, pour que E soit irréductible, il faut et il suffit que $I(E)$ soit premier (i. e. que $\mathcal{O}_n/I(E)$ soit intègre). Pour étudier la structure d'un germe irréductible, on commence par étudier celle d'un idéal premier. Pour simplifier, supposons $a = 0$, et soit \mathfrak{p} un idéal premier de \mathcal{O}_n . A l'aide du "Vorbereitungssatz" et de quelques propositions élémentaires d'algèbre, on démontre ceci : on peut faire une transformation linéaire sur les x_i et trouver un entier k , $0 \leq k \leq n$, de manière que les propriétés suivantes soient satisfaites :

1° Aucune $f(x_1, \dots, x_k) \neq 0$ n'appartient à \mathfrak{p} ; et par conséquent l'application $f \rightarrow \bar{f} : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$ est injective sur \mathcal{O}_k (que nous identifierons donc à $\bar{\mathcal{O}}_k$).

2° Le corps des quotients de $\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$ est engendré sur le corps des quotients de \mathcal{O}_k par \bar{x}_{k+1} , et le polynôme minimal de \bar{x}_{k+1} a ses coefficients dans \mathcal{O}_k et est un polynôme distingué (i. e., le coefficient dominant étant 1, les autres coefficients sont nuls à l'origine) et irréductible que nous noterons dans la suite $P(x_{k+1}; x_1, \dots, x_k)$; nous poserons $\deg(P) = p$.

3° Les polynômes minimaux des \bar{x}_{k+l} ($l = 2, \dots, n - k$) sur le corps des quotients de \mathcal{O}_k sont également à coefficients dans \mathcal{O}_k , distingués et irréductibles; nous les noterons $R_{k+l}(x_{k+l}; x_1, \dots, x_k)$.

(Rappelons que, pour un polynôme distingué, appartenant à $\mathcal{O}_k[x]$, les notions d'irréductibilité dans $\mathcal{O}_k[x]$, dans \mathcal{O}_{k+1} , ou dans (corps des quotients de \mathcal{O}_k) $[x]$ coïncident).

4° Il existe des polynômes $Q_{k+l} \in \mathcal{O}_k[x_{k+1}]$, $\deg(Q_{k+l}) < p$, uniques, tels que :

$$P(\bar{x}_{k+1}; x_1, \dots, x_k) \bar{x}_{k+l} = Q_{k+l}(\bar{x}_{k+1}; x_1, \dots, x_k) \quad .$$

5° Pour tout idéal $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, il existe $f(x_1, \dots, x_k) \neq 0$, $f \in \mathfrak{q}$. Evidemment, les polynômes P , R_{k+l} , $P'(x_{k+1}; \dots)_{x_{k+l}} - Q_{k+l}(x_{k+1}; \dots)$ appartiennent à \mathfrak{p} (mais, en général, ils n'engendrent pas \mathfrak{p}).

On démontre alors ceci. Soit $\Delta(x_1, \dots, x_k)$ le discriminant (qui n'est pas $= 0$, P étant irréductible) de P , et soit E , le germe défini par l'idéal p (i. e. par l'annulation d'un système de générateurs de p). Au voisinage de 0 , l'ensemble $E \cap \{x; \Delta(x) \neq 0\}$ coïncide avec l'ensemble des zéros communs à P et aux $P' x_{k+l} - Q_{k+l}$ qui vérifient $\Delta(x) \neq 0$ (pour parler plus correctement, il faudrait prendre un "représentant" de $E \dots$). Lorsque cet ensemble est vide, Δ s'annule sur E et par conséquent $p \neq I(E)$. Dans le cas contraire (i. e. s'il n'est vide dans aucun voisinage de zéro), c'est une variété analytique réelle (sans singularités) de dimension p , et (sa projection dans R^k étant l'ensemble des (x_1, \dots, x_k) pour lesquels P a une racine réelle) en utilisant 5°, on voit qu'on a : $p = I(E)$.

On déduit facilement de là la notion de dimension d'un germe analytique réel. Elle possède la propriété suivante : E est, au voisinage de 0 , réunion d'un ensemble analytique F , $\dim F < \dim E$ et d'une variété analytique réelle de dimension (au sens des variétés) égale à $\dim E$. Si E est irréductible et si $p = I(E)$ on déduit facilement des considérations précédentes ceci :

a. L'entier k introduit ci-dessus est égal à $\dim E$.

b. Si F est un germe contenu dans E , $F \neq E$, on a $\dim F < \dim E$ (en particulier, $\dim[E \cap \{x; \Delta(x) = 0\}] < \dim E$).

Pour ces questions, voir [1], chapitres 9 et 10, (les auteurs cités se placent dans le cas complexe, mais l'adaptation est immédiate); voir aussi [4], où un exposé est donné, mais qui s'appuie sur des résultats d'algèbre beaucoup moins élémentaires.

3. Démonstration du théorème 1.

Nous démontrerons le théorème par récurrence sur n , et nous procéderons en deux étapes.

a. Si le théorème est vrai pour $0, 1, \dots, n-1$, et si E est un sous-ensemble analytique de Ω , de dimension $< n$ (i. e. $\forall a \in V$, le germe défini par E en a est de dimension $< n$), on a, pour $C > 0$, $\rho > 0$ convenables : $|f(x)| \geq C d(x, V \cap E)^\rho$, $\forall x \in E \cap K$.

b. Si (a) est vrai, le théorème est vrai pour n .

DÉMONSTRATION de (a). - Par BOREL-LEBESGUE, il suffit de démontrer ceci : si $a \in V \cap E$, pour tout $x \in E$ suffisamment voisin de a , on a :

$$|f(x)| \geq C d(x, V \cap E)^{\rho} \quad (C > 0, \rho > 0 \text{ convenables}) .$$

Pour simplifier, nous supposons $a = 0$; nous pouvons évidemment nous contenter de faire la démonstration lorsque le germe de E en 0 est irréductible et $\notin V$; soit k sa dimension ; par hypothèse, $k \leq n - 1$. Nous démontrerons alors le résultat par récurrence sur k , en établissant ceci : il existe un ensemble analytique $F \subset E$ au voisinage de 0 , avec $\dim(\text{germe en } 0 \text{ de } F) < k$, tel que $\forall x \in E$, assez voisin de 0 , on ait :

$$(1) \quad |f(x)| \geq C d(x, F)^{\rho} .$$

[(a) en résulte bien ; en effet, par hypothèse de récurrence, $\forall y \in F$, assez voisin de 0 , on a : $C_1 |f(y)|^{r_1} \geq d(y, V \cap F)$. Soit alors $x \in V$ et $y \in F$ tel que $d(x, y) = d(x, F)$: un tel y existe certainement pour x assez voisin de 0 ; on a :

$$d(x, V \cap E) \leq d(x, y) + d(y, V \cap F)$$

et (théorème des accroissements finis)

$$|f(x) - f(y)| \leq C_2 d(x, y)$$

d'où

$$d(x, V \cap E) \leq d(x, y) + C_1 |f(y)|^{r_1} \leq d(x, y) + C_3 |f(x)|^{r_1} + C_4 d(x, y)^{r_1} .$$

Ceci, joint à $d(x, y) \leq C_5 |f(x)|^{r_2}$, inégalité équivalente à (1), donne le résultat].

Utilisons pour cela les résultats du paragraphe 2, en en reprenant les notations après avoir fait éventuellement un changement linéaire de coordonnées. Tout d'abord, nous savons, (5°), qu'il existe $h \in \mathcal{O}_n$ tel qu'on ait

$$hf \equiv f_1(x_1, \dots, x_k) \pmod{\mathfrak{p}} ;$$

on vérifie tout de suite que l'on peut alors remplacer f par f_1 et V par l'ensemble V_1 des zéros de f_1 (dans la suite, nous omettrons les indices 1).

Posons pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: $\text{pr}(x) = (x_1, \dots, x_k)$. Posons $\hat{V} = V \cap \mathbb{R}^k$, $\{x \in \mathbb{R}^k; \Delta(x) = 0\} = \hat{W}$, $\text{pr}^{-1}(\hat{W}) = W$; puisque f ne dépend que de x_1, \dots, x_k , on a $V = \text{pr}^{-1}(\hat{V})$. Montrons que l'on peut prendre $F = E \cap (W \cup V)$.

Soit \mathcal{U} un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R}^k , assez petit pour que tout ce qu'on va dire soit vrai ; il existe \mathcal{U}' , voisinage de zéro dans \mathbb{R}^{n-k} tel que $\forall (x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{U}$, on ait, x_{k+1} (resp. x_{k+i}) désignant n'importe quelle racine réelle de $P(z; x_1, \dots, x_k)$ (resp. R_{k+i}) : $(x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathcal{U}'$.

Soit Ω_i ($i = 1, \dots, p$) l'ensemble des $(x_1, \dots, x_k) \in U - \hat{W}$ tels que l'équation $P(Z; x_1, \dots, x_k) = 0$ ait au moins i racines réelles (qui sont nécessairement distinctes; on sait d'ailleurs que Ω_i n'est pas vide); évidemment, Ω_i est ouvert et fermé dans $U - \hat{W}$, et si l'on désigne par f_{k+1}^i la i -ième racine réelle (on les range par ordre croissant, par exemple), $f_{k+1}^i(x_1, \dots, x_k)$ est une fonction continue de $(x_1, \dots, x_k) \in \Omega_i$, donc (proposition 1) une fonction quasi-holdérienne de x_1, \dots, x_k ; posons maintenant :

$$f_{k+l}^i = \frac{Q_{k+l}(f_{k+1}^i; x_1, \dots, x_k)}{P'(f_{k+1}^i; x_1, \dots, x_k)} ;$$

f_{k+l}^i est encore continue, et elle est quasi-holdérienne puisqu'elle vérifie : $R_{k+l}(f_{k+l}^i; x_1, \dots, x_k) = 0$. En outre, on a

$$(f_{k+1}^i, \dots, f_n^i) \in U', \quad \forall (x_1, \dots, x_k) \in \Omega_i .$$

Soit E_i l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant : $(x_1, \dots, x_k) \in \Omega_i$, $x_{k+l} = f_{k+l}^i(x_1, \dots, x_k)$; si U' a été choisi assez petit, on sait qu'on a $[E - W] \cap (U \times U') = \bigcup_i E_i$. Il suffit donc de démontrer que l'on a

$$|f(x)| \geq C d(x; E \cap W)^p$$

lorsque $x \in E_i$ est assez voisin de zéro. Mais, si x est assez voisin de zéro, on a évidemment :

$$d(x, F) = d(x, b(E_i - V)) \quad \text{et} \quad d(\text{pr } x, \hat{V} \cup \hat{W}) = d(\text{pr } x, b(\Omega_i - \hat{V})) ;$$

d'après la remarque du paragraphe 1, il suffit donc de démontrer :

$$|f(x)| \geq C_1 d(\text{pr } x, \hat{V} \cup \hat{W})^{\rho_1} ,$$

ce qui résulte immédiatement du fait que f ne dépend que de $\text{pr } x$ et de l'hypothèse que le théorème est vrai pour k .

DÉMONSTRATION de (b). - En raisonnant comme en (a), il suffit de se placer au voisinage de l'origine et de trouver un sous-ensemble analytique F , de dimension $< n$ tel que :

$$|f(x)| \geq C d(x, F)^p \quad (C > 0, \rho > 0) .$$

On peut, d'après le "Vorbereitungssatz", supposer que f est un polynôme distingué x_n : $f(x) = x_n^p + \sum a_i(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n^{p-i}$; soit W l'ensemble des zéros de f'_{x_n} ; montrons que $F = V \cup W$ répond à la question.

Soit en effet $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ un point voisin de 0 et soit d le nombre > 0 le plus grand, tel que f et f'_{x_n} ne s'annulent pas sur l'intervalle ouvert $(x_1, \dots, x_{n-1}) \times]x_n - d, x_n + d[$; on a évidemment $d \geq d(x, F)$; et si l'on pose $I' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \times [x_n - d, x_n]$,

$$I'' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \times [x_n, x_n + d] ,$$

on a :

$$|f(y)| \leq |f(x)| , \quad \forall y \in I' \quad \text{ou} \quad \forall y \in I'' .$$

Le théorème résulte alors du lemme trivial suivant, appliqué pour $i = 0$.

LEMME 1. - Il existe $C > 0$ tel que, pour tout polynôme $P = a_0 x^p + \sum_{i=1}^p a_i x^{p-i}$ on ait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |a_i| \leq C d^p \max_{x \leq y \leq x+d} |P(y)| \quad (i = 0, \dots, p)$$

(on se ramène immédiatement à $x = 0$, $d = 1$; alors, le lemme résulte du fait que l'espace des polynômes de degré p est de dimension finie et que $\max_{0 \leq y \leq 1} |P(y)|$ est une norme sur cet espace).

Le théorème 1 a été démontré par ~~VOJASIEWICZ~~ dans [3] (voir en particulier p. 121-129); j'ai suivi cet article, en y apportant quelques simplifications.

Dans le cas où f est un polynôme, une démonstration, fondée sur une méthode d'élimination algébrique réelle a été donnée par HÖRMANDER [2].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOCHNER (S.) and MARTIN (T.). - Several complex variables. - Princeton University Press, 1948 (Princeton mathematical Series, 10).
- [2] HÖRMANDER (Lars). - On the division of distributions by polynomials, Arkiv for Matematik, t. 3, 1958, p. 555-559.
- [3] ~~VOJASIEWICZ~~ (S.). - Sur le problème de la division, Studia Math., t. 18, 1959, p. 87-136.
- [4] SAMUEL (Pierre). - Algèbre locale et ensembles analytiques, Séminaire Lelong : Analyse, t. 1, 1957/58, n° 2, 12 p.