BERNARD MALGRANGE

Division des distributions. I : distributions prolongeables

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. nº 21, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A21_0>

DIVISION DES DISTRIBUTIONS
I : DISTRIBUTIONS PROLONGEABLES

par Bernard MALGRANGE

1. Ensembles régulièrement séparés.

Dans toute cette série d'exposés, si A et B désignent deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, on notera $d(A , B)$ leur distance euclidienne.

On rappelle aussi qu'un ensemble A est dit "localement fermé" s'il est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé ; on vérifie immédiatement qu'il faut et qu'il suffit pour cela que l'ensemble $\overline{A} - A$ (désigné dans la suite par : bA) soit fermé.

DÉFINITION 1. - A et B étant bornés et Λ étant un compact $\subset \mathbb{R}^n$ on dit que "A et B sont régulièrement séparés par Λ" et on écrit "A , B r. s. Λ" si $\Lambda = \emptyset$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ ou s'il existe $C > 0$ et $\rho > 0$ tels que, $\forall\ x \in A$, on ait

$$d(x , B) \geq C d(x , \Lambda)^\rho .$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que cette propriété est symétrique par rapport à A et B.

REMARQUES.

1° Lorsque "A , B r. s. Λ", on a évidemment $\Lambda \supset \overline{A} \cap \overline{B}$. Mais on ne peut pas en général remplacer Λ par $\overline{A} \cap \overline{B}$ (contre-exemple : A , B deux courbes ayant un contact d'ordre infini en un point : on peut prendre $\Lambda = \overline{A}$ ou $\overline{B}$, mais non $\overline{A} \cap \overline{B}$!).

2° Si A , B sont deux ensembles quelconque $\subset \mathbb{R}^n$, et Λ un fermé $\subset \mathbb{R}^n$, il nous arrivera d'écrire "A , B r. s. Λ" lorsque, pour tout couple d'ouverts relativement compacts Θ et $\Theta' \subset \mathbb{R}^n$, avec $\overline{\Theta} \subset \Theta'$, on a

$$\text{"}A \cap \Theta , B \cap \Theta \text{ r. s. } \Lambda \cap \overline{\Theta}'\text{"}$$

Nous commencerons par donner un théorème de caractère technique, dont l'utilité apparaîtra au paragraphe 2.

THÉORÈME 1. - A, B et Λ étant bornés, si l'on a "A , B r. s. Λ", il existe $\rho > 0$, une suite $\{M_p\}$ de nombres > 0 $(p = 1 , 2 , \ldots)$ et une fonction $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n - \Lambda}$ possédant les propriétés suivantes :

1° $f = 0$ (resp. 1) au voisinage de $A - \Lambda$ (resp. $B - \Lambda$).

2° Pour tout monôme de dérivation D^k, et tout $x \in \underset{\sim}{R}^n - \Lambda$,

$$|D^k f(x)| \leqslant M_{|k|}\, d(x\, , \Lambda)^{-\rho|k|}$$

(on rappelle les notations suivantes : $k = (k_1\, , \dots , k_n)$, k_i entiers $\geqslant 0$; $D^k = \Pi(\frac{\partial}{\partial x_i})^{k_i}$; $|k| = \sum k_i$) .

DÉMONSTRATION. - Si $\Lambda = \emptyset$, on a $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ et le théorème **est trivial.** Sinon supposons, pour fixer les idées, que $\forall\, x \in A$, on ait $d(x\, , \Lambda) \leqslant 1$. Soient ρ et C les constantes qui figurent dans la définition 1 ; nous supposerons (ce qu'on peut évidemment toujours faire $\rho \geqslant 1$, $C \leqslant 1$.

Introduisons les ensembles suivants (p entier > 0) :

$$A_p = \{x \in A\ ; \frac{1}{3^p} \leqslant d(x\, , \Lambda) \leqslant \frac{1}{3^{p-1}}\}$$

H_p (resp. H'_p, resp. H''_p) =

$$\{x \in \underset{\sim}{R}^n - \Lambda\ ;\ d(x\, , A_p) \leqslant \varepsilon_p \quad (\text{resp.} \leqslant \frac{2\varepsilon_p}{3}\, , \text{ resp.} < \frac{\varepsilon_p}{3})\}\, ,$$

avec $\varepsilon_p = \frac{C}{3^{\rho p+1}}$ (donc $\varepsilon_p \leqslant \frac{1}{3^{p+1}}$) ; donc :

$$A - \Lambda = \bigcup_p A_p\, , \quad A_p \subset H''_p \subset H'_p \subset H_p\, .$$

Les H_p sont des compacts de $\underset{\sim}{R}^n - \Lambda$, et l'on a, $\forall\, x \in H_p$

(1) $$\frac{2}{3^{p+1}} \leqslant d(x\, , \Lambda) \leqslant \frac{10}{3^{p+1}}$$

De là résulte que, pour $q \geqslant 2$, on a

$$d(H_p\, , H_{p+q}) \geqslant \frac{1}{3^{p+2}}\ ;$$

donc un voisinage de H_p ne rencontre pas $\bigcup_{q \geqslant 2} H_{p+q}$.

Posons $L = \bigcup_p H_p$; il est immédiat de voir que L est fermé dans $\underset{\sim}{R}^n - \Lambda$, (mais non dans $\underset{\sim}{R}^n$!) et que c'est un voisinage de $A - \Lambda$ (et de même, $L'' = \bigcup_p H''_p$ est un voisinage ouvert de $A - \Lambda$) ; de plus, dans $\underset{\sim}{R}^n - \Lambda$, $\complement L$ est un voisinage de B : il suffit pour cela de montrer que, $\forall\, p$, $H_p \cap B = \emptyset$; or, $\forall\, x \in H_p$, on a

$$d(x\,,B) \geqslant \inf_{y\in A_p} d(y\,,B) - d(x\,,A_p) \geqslant \inf_{y\in A_p} C\,d(y\,,\Lambda)^{\rho} - d(x\,,A_p) \geqslant \frac{C}{3^{\rho p+1}} \quad .$$

Soit maintenant β une fonction $\in \mathcal{D}_{R^n}$, à support dans la boule $d(x\,,0) \leqslant 1$, et vérifiant : $\int \beta(x)\,dx = 1$; posons $\beta_p = (\frac{3}{\varepsilon_p})^n\,\beta(\frac{3x}{\varepsilon_p})$; soit χ_p la fonction caractéristique de H'_p et soit $f_p = 1 - \beta_p * \chi_p$. La fonction f_p est indéfiniment dérivable dans R^n, égale à 1 dans $\complement H_p$, et à 0 dans H''_p. Donc, tout $x \in R^n - \Lambda$ possède un voisinage dans lequel tous les f_p sont $\equiv 1$, sauf pour deux consécutifs au plus. Le produit $f = \prod_{p=1}^{\infty} f_p$ définit donc une fonction indéfiniment dérivable dans $R^n - \Lambda$; je dis qu'elle répond à la question.

Tout d'abord il est évident qu'elle vérifie le 1°, et qu'elle est bornée ; il suffit donc d'établir 2°, pour $|k| > 0$. Il suffit pour cela de se placer en un point $x \in H_p$; au voisinage de x, on a $f = f_{p-1}\,f_p\,f_{p+1}$. Majorons par exemple $D^k f_p(x)$: on a évidemment $|D^k f_p(x)| \leqslant (\frac{3}{\varepsilon_p})^{-|k|}\,M'_k$, avec $M'_k = \int |D^k \beta|\,dx$; par suite, d'après (1) et la définition de ε_p :

$$|D^k f_p(x)| \leqslant C_1\,M'_k\,d(x\,,\Lambda)^{-\rho|k|} \qquad (\,C_1 \text{ indépendant de } k \text{ et } p\,) \quad .$$

En majorant de même f_{p+1} et f_{p-1} et en appliquant la formule de Leibniz, on trouve le résultat cherché.

C. Q. F. D.

2. Distributions prolongeables.

DÉFINITION 2. - Soit Ω un ouvert relativement compact $\subset R^n$.

1° On désigne par $\mathcal{O}_\Omega$ l'espace des fonctions $f \in \mathcal{E}_\Omega$ telles qu'il existe deux suites $\{C_p\}$ et $\{\rho_p\}$ de nombres > 0 vérifiant, pour tout monôme de dérivation D^k, et tout $x \in \Omega$: $|D^k f(x)| \leqslant C_{|k|}\,d(x\,,b\Omega)^{-\rho|k|}$.

2° On désigne par $\mathcal{O}^*_\Omega$ l'ensemble des $f \in \mathcal{O}_\Omega$, partout $\neq 0$, et vérifiant $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}_\Omega$.

3° On désigne par $\mathcal{P}'_\Omega$ l'espace des distributions $T \in \mathcal{D}'_\Omega$ qui peuvent être prolongées en une distribution $\overline{T} \in \mathcal{D}'_{R^n}$ (i. e. la restriction de $\overline{T}$ à Ω est égale à T).

On appellera $\mathcal{O}_\Omega$ l'espace des "fonctions dans Ω (indéfiniment dérivables) à croissance lente". $\mathcal{O}_\Omega$ est évidemment une algèbre pour la multiplication ordinaire. Pour que $f \in \mathcal{O}_\Omega$, $f \neq 0$ partout, vérifie : $f \in \mathcal{O}^*_\Omega$, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$ et $\rho > 0$ avec $\forall \; x \in \Omega$,

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq C d(x \, , \, b\Omega)^{-\rho} \quad .$$

Posons maintenant :

$$\forall \; m \text{ entier} > 0 \, , \quad \forall \quad \varphi \in \mathcal{D}_\Omega : \; \|\varphi\|_m = \sup_{x \in \Omega} \sum_{|k| \leq n} |D^k f(x)| \quad .$$

D'après le théorème de Hahn Banach, pour qu'on ait $T \in \mathcal{P}'_\Omega$ (on dira " T est une distribution prolongeable"), il faut et il suffit qu'il existe un m et un $C > 0$ tels que $\forall \; \varphi \in \mathcal{D}_\Omega$, on ait

$$| < T \, , \, \varphi > | \leq C\|\varphi\|_m \quad .$$

On déduit aussitôt de là : tout $T \in \mathcal{P}'_\Omega$ possède un prolongement $\overline{T}$ à support dans $\overline{\Omega}$ (prolonger la distribution égale à T sur Ω et à 0 sur $C\overline{\Omega}$; on se ramène immédiatement au cas d'ouverts bornés).

REMARQUE. - Il nous arrivera quelquefois, pour Ω ouvert non borné, d'écrire $f \in \mathcal{O}_\Omega$ (resp. $\mathcal{O}^*_\Omega$, resp. $\mathcal{P}'_\Omega$) si, $\forall \; U$ ouvert relativement compact $\subset \underset{\sim}{R}^n$ on a, $f \in \mathcal{O}_{\Omega \cap U}$ (resp. ...). Lorsque $\Omega = \underset{\sim}{R}^n$, <u>et que l'on considère</u> $\underset{\sim}{R}^n$ <u>comme plongé dans</u> $\underset{\sim}{P}_n(\underset{\sim}{R})$ (l'extension de ces définitions aux variétés différentiables est immédiate), $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{R}^n}$ coïncide avec l'espace $\mathcal{O}_M$ de SCHWARTZ, et $\mathcal{P}'_{\underset{\sim}{R}^n}$ avec $\mathcal{S}'$

PROPOSITION 1. - <u>On a</u> : $\mathcal{O}_\Omega \, \mathcal{P}'_\Omega = \mathcal{P}'_\Omega$.

On se ramène immédiatement au cas où Ω est borné ; soit alors $f \in \mathcal{O}_\Omega$, $T \in \mathcal{P}'_\Omega$; il s'agit de démontrer que l'on a : $f\,T \in \mathcal{P}'_\Omega$.

D'après le critère précédent, il suffit de montrer ceci : $\forall \; m$ entier ≥ 0 , il existe m_1 , et $C > 0$ tels que, $\forall \; \varphi \in \mathcal{D}_\Omega$ on ait

$$\|f\varphi\|_m \leq C\|\varphi\|_{m_1} \quad .$$

Or cela résulte immédiatement de la formule de Leibniz et du résultat élémentaire suivant (dont la démonstration est laissée au lecteur) : $\forall \; m$ entier ≥ 0 , il existe $C_m > 0$ tel que tout $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega$, $\|\varphi\|_m < 1$, on ait

$$|D^k \varphi(x)| \leq C_m \, d(x \, , \, b\Omega)^{m-|k|}$$

lorsque $|k| \leq m$ et $x \in \Omega$.

THÉORÈME 2. - <u>Si</u> A <u>et</u> B <u>sont deux compacts</u> $\subset \underset{\sim}{R}^n$ <u>régulièrement séparés par le compact</u> $A \cap B$, <u>on a</u> : $\mathcal{E}'_{A \cup B} = \mathcal{E}'_A + \mathcal{E}'_B$ (autrement dit : toute distribution T à support dans $A \cup B$ est de la forme $T_1 + T_2$, T_1 à support dans A , T_2 à support dans B) .

DÉMONSTRATION. - Posons $\Omega = \underset{\sim}{R}^n - (A \cap B)$, et soit $\hat{T}$ la restriction de T à Ω ; on a évidemment : $\hat{T} \in \mathcal{P}'_\Omega$; d'après le théorème 1, il existe $f \in \mathcal{O}_\Omega$, avec $f = 0$ (resp. 1) au voisinage de A (resp. B) ; d'après la proposition 1, on a $f\hat{T} \in \mathcal{P}'_\Omega$; il suffit alors de prendre pour T_2 un prolongement de $f\hat{T}$, et de poser $T_1 = T - T_2$.

REMARQUES.

1° L'énoncé reste évidemment vrai si l'on suppose seulement A et B fermés au lieu de "compacts".

2° Le théorème 2 admet une réciproque. <u>Si les compacts</u> A <u>et</u> B <u>vérifient</u> $\mathcal{E}'_{A \cup B} = \mathcal{E}'_A + \mathcal{E}'_B$, <u>on a</u> "A , B r. s. $A \cap B$" .
(Facile : supposer le contraire, et prendre une suite $(x_p , y_p) \in A \times B$ telle que $d(x_p , y_p)$ tende "très vite" vers zéro, mais non $d(x_n , A \cap B)^p$, et prendre T de la forme $\sum \alpha_p [\delta(x - x_p) - \delta(x - y_p)]$, les α_p étant des scalaires convenables. Voir les détails dans [1]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ŁOJASIEWICZ (S.). - Sur le problème de la division, Studia Math. t. 18, 1959, p. 87-136.

(Pour cet exposé, voir les pages 87 à 99).