André Martineau

Supports d'une fonctionnelle analytique et croissance de sa transformée de Fourier-Borel

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n° 20, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A20_0>

Séminaire SCHWARTZ
4e année, 1959/60, n° 20

29 mars 1960

SUPPORTS D'UNE FONCTIONNELLE ANALYTIQUE ET CROISSANCE DE SA TRANSFORMÉE DE FOURIER-BOREL

par André MARTINEAU

NOTATIONS. - Ce sont celles de l'exposé précédent. Si $F(u)$ est une fonction de type exponentiel sur E^*, nous désignons parfois par $\mathfrak{F}^{-1} F$ la fonctionnelle analytique dont elle est la transformée de Fourier-Borel.

Introduction.

Nous voulons essentiellement démontrer les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. - Soit $\alpha(F)$ le ρ^*-type exponentiel d'une fonction $F(u)$ de type exponentiel ; $\alpha(F)$ est le rayon de la plus petite ρ-boule de centre l'origine qui peut porter $\mathfrak{F}^{-1} F$.

Soit v un point de E^*, tel que $\rho^*(v) = 1$, et soit $\Phi(\zeta ; v) = F(\zeta . v)$. $\Phi(\hat{\zeta} ; v)$ pour v fixé est une fonction entière de type exponentiel inférieur ou égal au ρ^*-type de F . Désignons le type de $\Phi(\hat{\zeta} ; v)$ par $\alpha(F , v)$.

THÉORÈME 2. - On a $\alpha(F) = \sup_v \alpha(F , v)$.

Soit $F(v)$ l'hyperplan orthogonal à v , et $E(v) = E/F(v)$, $p(v)$ la projection canonique de E sur $E(v)$. On peut identifier $\Phi(\hat{\zeta} , v)$ avec la transformée de Fourier-Borel de $p(v)(\mathfrak{F}^{-1} F)$. Le théorème s'énonce aussi :

THÉORÈME 2'. - Le rayon de la plus petite ρ-boule pouvant porter une fonctionnelle analytique Ψ est égal à la borne supérieure des rayons des supports des projections de Ψ sur les espaces quotients de dimension 1 de E (muni de la norme ρ).

(Le rayon d'un support dans une droite complexe est le rayon du plus petit cercle unité centré à l'origine contenant le support, le rayon unité est celui de la projection de la ρ-boule de rayon 1 sur cette droite). Le théorème 1 a déjà été démontré dans l'exposé précédent pour le cas où la ρ-boule unité est un polydisque. Nous allons, dans la première partie, effectuer la réduction des théorèmes 1 et 2 à un tel cas ; dans la seconde, nous démontrerons le théorème 2 dans le cas du polydisque, ce qui achèvera sa démonstration.

1. Réduction des théorèmes 1 et 2 au cas d'un polydisque.

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - Soit V une variété de Stein, W une sous-variété régulière de V, et Ψ une fonctionnelle analytique définie sur V, strictement portable par W. Si Ψ est portable par un compact $H(V)$-convexe, alors Ψ est portable par $K \cap W$, dans V et dans W.

DÉMONSTRATION. - Notons d'abord que $K \cap W$ est $H(W)$-convexe dans la variété W. Soit i l'application identique de W dans V. On sait, ([4], exposé n° 18), que ${}^t i$ est surjectif, donc est un homomorphisme vectoriel topologique, donc $i : H'(W) \to H'(V)$ est un isomorphisme vectoriel topologique (topologie $\mathcal{C}_c$ de duals de Fréchet). Si $H_W(K \cap W)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de $K \cap W$, dans W, $H'_W(K \cap W)$ son dual, et si ${}^t j_W$ est l'injection canonique de $H(W)$ dans $H_W(K \cap W)$, si enfin ${}^t j_V$ est l'injection canonique de $H(V)$ dans $H(K)$, on sait, ([4], exposé n° 9), que $H(V)$ (resp. $H(W)$) est dense dans $H(K)$ (resp. $H_W(K \cap W)$) donc que j_W, et j_V sont biunivoques.

Si Ω est un voisinage de Stein de K, ${}^t i$ est un homomorphisme surjectif de $H(\Omega)$ sur $H_W(\Omega \cap W)$, donc définit par passage à la limite inductive un homomorphisme surjectif ${}^t \iota$ de $H(K)$ sur $H_W(K \cap W)$;

$$\begin{tikzcd} H'(W) \arrow[r, "i"] & H'(V) \\ H'_W(K\cap W) \arrow[u, "j_W"] \arrow[r, "\iota"] & H'(K) \arrow[u, "j_V"'] \end{tikzcd}$$

On a à montrer :

$$i(H'(W)) \cap j_V(H'(K)) = (i \circ j_W)(H'_W(K \cap W))$$

en effet, on doit vérifier que, si $\Psi \in i(H'(W)) \cap j_V(H'(K))$, alors

$$i^{-1}(\Psi) \in j_W(H'_W(K \cap W))$$

ce qui est notre inégalité ; mais ce diagramme est commutatif, car il est le transposé d'un diagramme qui l'est manifestement ; donc il suffit de vérifier :

$$i(H'(W)) \cap j_V(H'(K)) = (j_V \circ \iota)(H'_W(K \cap W)) \quad .$$

$\Psi \in i(H'(W))$ équivaut à : $\Psi \in ({}^t i^{-1}(0))^0$;

$j_V^{-1}(\Psi) \in r(H_W'(K \cap W))$ équivaut à : $j_V^{-1}(\Psi) \in ({}^t z^{-1}(0))^0$.

Il faut donc vérifier que si $\Psi(f) = 0$ pour toute f de $H(V)$ de restriction à W nulle, alors $j_V^{-1}(\Psi)(g) = 0$ pour toute g de $H(K)$ telle que $\iota(g) = 0$. On a le lemme suivant :

LEMME 1. - Soit $f \in H(K)$ telle que ${}^t\iota(f) = 0$. f est limite dans $H(K)$ d'une suite f_k de fonctions de $H(V)$, nulles sur W .

Ce qui implique bien le résultat cherché, car

$$j_V^{-1}(\Psi)(f) = \lim_{k \to \infty} \Psi(f_k) = 0 \quad .$$

DÉMONSTRATION du lemme 1. - On sait, K étant $H(V)$-convexe, que f , au voisinage de tout point x de K , peut s'écrire sous la forme $f = \sum_i f_i g_i$ où les g_i sont des fonctions holomorphes au voisinage de x , et où les $f_i \in H(V)$ s'annulent sur tout W , donc il existe un nombre fini de fonctions f_α de $H(V)$, ${}^t i(f_\alpha) = 0$, et de fonctions g_α de $H(K)$ telles que $\sum_\alpha f_\alpha . g_\alpha = f$ dans $H(K)$. Mais chaque g_α est limite dans $H(K)$ d'une suite $g_{\alpha,n}$ de fonctions de $H(V)$, donc f est limite dans $H(K)$ des $f_k = (\sum_\alpha f \cdot g_{\alpha,k})$.

COROLLAIRE. - Si $\Psi \neq 0$, $K \cap W \neq \emptyset$.

Nous revenons à un espace vectoriel.

PROPOSITION 1. - Soit F un sous-espace de E . Pour que Ψ , définie sur E , soit strictement portable par F , il faut et il suffit que $\mathfrak{F}\Psi$ soit constante sur les classes modulo F^0 , dans E^* .

DÉMONSTRATION. - Si μ est une mesure représentant Ψ et portée par F , $\mathfrak{F}\Psi(u) = \int_F \exp \langle z , u \rangle . d\mu$, donc, si $u_1 - u_2 \in F^*$ $\mathfrak{F}\Psi(u_1) - \mathfrak{F}\Psi(u_2) = \int 0 . d\mu = 0$. Réciproquement, F^* s'identifie canoniquement à E^*/F^0 . Si $\mathfrak{F}\Psi$ est constante sur les classes modulo F^0 , elle définit canoniquement une fonction de type exponentiel sur F^* , donc une fonctionnelle analytique sur F . L'image, par l'injection de F dans E , de cette fonctionnelle, est strictement portable par F sous-espace de E et a pour transformée de Fourier-Borel $\mathfrak{F}\Psi$. L'application $\mathfrak{F}$ étant biunivoque, le résultat est démontré.

Désignons par "polyèdre" l'enveloppe convexe cerclée d'un nombre fini de points.

LEMME 2. - <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace vectoriel complexe</u> E <u>soit isomorphe à un sous-espace d'un espace</u> C^N (N <u>suffisamment grand) muni de la boule unité produit des disques unité, est que la boule unité de</u> E^* <u>soit un polyèdre</u>.

E et F étant deux espaces de Banach complexes de dimension finie, nous notons z un point de E , y un point de F , u un point de E^* , t un point de F^* . Supposons qu'il existe une isométrie i de E sur un sous-espace de F . La norme de E est notée par ρ , celle de F par σ .

LEMME 3. - <u>Soit</u> $A(u)$ <u>une fonction entière sur</u> E^* <u>de type exponentiel</u> $\alpha(A)$. <u>Si</u> $B(t) = (A \circ i^*)(t)$, B <u>est entière de type exponentiel</u> $\alpha(B) = \alpha(A)$. <u>Réciproquement, toute fonction entière</u> $B(t)$ <u>de type exponentiel</u> $\alpha(B)$, <u>constante sur les classes modulo</u> $i^{*-1}(0)$ <u>peut être mise sous la forme ci-dessus</u>.

DÉMONSTRATION. - Soit $K > \alpha(A)$. Alors on a une majoration $|A(u)| \leq H \exp[K.\rho^*(u)]$, d'où $|B(t)| \leq H \exp[K\rho^*(i^*(t))]$, ou, $|B(t)| \leq H \exp[K\sigma^*(t)]$, d'où $\alpha(B) \leq \alpha(A)$. Nos espaces sont de dimension finie, donc , t étant donné, il existe t_0 tel que $i^*(t) = i^*(t_0)$ et $\sigma^*(t_0) = \rho^*(i^*(t))$. Donc, si on a une majoration

$$|B(t)| \leq L \exp[M\sigma^*(t)] \quad ,$$

on en déduit une majoration

$$|A(u)| \leq L \exp[M\rho^*(u)]$$

d'où $\alpha(A) \leq \alpha(B)$, d'où l'égalité.

LEMME 3'. - <u>On a</u> : $\sup\limits_{\substack{u \\ \rho^*(u)=1}} [\alpha(A , u)] = \sup\limits_{\substack{t \\ \sigma^*(t)=1}} [\alpha(B , t)]$.

<u>Si</u> $\sigma^*(t) = 1$, $\rho^*(i^*(t)) \leq 1$, <u>donc il existe</u> $\lambda \geq 1$ <u>tel que</u> $\rho^*[i^*(\lambda t)] = 1$, $i^*(\lambda t)$ <u>est un des</u> u <u>tels que</u> $\rho^*(u) = 1$ <u>d'où</u> :

$$\sup_{\substack{u \\ \rho^*(u)=1}} [\alpha(A , u)] \geq \sup_{\substack{t \\ \sigma^*(t)=1}} [\alpha(B , t)] \quad ,$$

Mais pour tout u tel que $\rho^*(u) = 1$, il existe t tel que $\sigma^*(t) = 1$ avec $i^*(t) = u$. Alors, on en déduit :

$$\sup_{\rho^*(u)=1} [\alpha(A , u)] \leqslant \sup_{\sigma^*(t)=1} [\alpha(B , t)] \quad ,$$

ce qui entraîne le lemme 3'.

Nous nous donnons maintenant un espace de Banach complexe E de dimension finie, une fonctionnelle analytique Ψ sur E telle que $\mathcal{F}\Psi$ soit de type exponentiel α, et nous notons par B^* la boule unité de E^*. Quel que soit $0 < \eta < 1$ il existe un nombre fini de points $u_1 , \ldots , u_r$ (r est une fonction non constante de η en général) tels que, si Γ^* désigne le polyèdre qu'ils engendrent, on ait : $B^* \supset \Gamma^* \supset (1 - \eta).B^*$. Soit τ^* la norme définie par Γ^*. D'après le lemme 2, il existe une isométrie i entre E muni de la norme τ et un sous-espace d'un C^N. Soit Θ l'image de Ψ par i. D'après le lemme 3, et le choix de Γ^*, on a :

$$(1) \qquad \alpha \leqslant \alpha(G) \leqslant \frac{1}{1 - \eta}\alpha \quad , \quad G = \mathcal{F}\Theta$$

et aussi, d'après le lemme 3' :

$$(2) \qquad \sup_{\substack{\delta \\ \rho^*(\delta)=1}} \alpha(\mathcal{F}\Psi , \delta) \leqslant \sup_{\substack{t \\ \sum_i |t_i|=1}} [\alpha(G , t) \leqslant \frac{1}{1 - \eta}. \sup_{\substack{\delta \\ \rho^*(\delta)=1}} \alpha(\mathcal{F}\Psi , \delta) \quad .$$

D'après le théorème 1 de l'exposé précédent Θ est portable par le produit des disques de rayon $\alpha(G)$ dans C^N, mais Θ est strictement portable par $i(E)$, donc Θ est, d'après le théorème 3 de cet exposé, portable par le compact $\alpha(G).i(\Gamma)$, dans C^N et dans $i(E)$. Donc Ψ est portable par $\frac{\alpha}{1 - \eta}.B$, et η étant arbitraire, Ψ est portable par $\alpha.B$.

LEMME 4. - <u>Si</u> Ψ <u>est portable par la boule</u> $\beta.B$, <u>alors</u> $\alpha(\mathcal{F}\Psi) \leqslant \beta$.

DÉMONSTRATION. - Pour tout ε, il existe une mesure μ de support inclus dans la boule de rayon $(\beta + \varepsilon)$, qui représente Ψ. D'où :

$$|\mathcal{F}\Psi(u)| = |\int \exp(\langle z , u \rangle).d\mu_z| \leqslant \|\mu\|.\exp[(\beta + \varepsilon)\rho^*(u)] \quad ;$$

le lemme 4 conjugué au résultat qui le précède achève la démonstration du théorème 1.

Si on admet le théorème 2 pour un polydisque, alors (1) conjugué à (2) et à :

$$(3) \qquad \alpha(G) = \sup_{\Sigma|t_i|=1} [\alpha(G , t)]$$

donne

$$(1 - \eta).\alpha \leqslant \sup_{\rho^*(\delta)=1} [\alpha(\mathfrak{F}\Psi , \delta)] \leqslant \frac{1}{1-\eta}.\alpha \quad ,$$

et η étant arbitraire, $\alpha = \sup_{\rho^*(\delta)=1} [\alpha(\mathfrak{F}\Psi , \delta)]$.

2. Démonstration du théorème 2 dans le cas d'un polydisque.

C^ℓ est toujours, pour nous, muni de la norme $\|t\|_\infty = \sup_{k\leqslant \ell} |t_k|$. $(C^\ell)^*$, désigne l'espace vectoriel C^ℓ muni de la norme $\|t\|_1 = \sum_{k=1}^{\ell} |t_k|$.

Soit $F(t_1 , \dots , t_\ell)_\ell$ une fondtion de type exponentiel sur $(C^\ell)^*$, $\Theta = (\theta_1 , \dots , \theta_\ell)$, $\sum_{h=1} |\theta_h| = 1$; on peut développer F en série entière,

$$F(t_1 , \dots , t_\ell) = \Sigma\, a_{i_1;\dots,i_\ell}.t_1^{i_1} , \dots , t_\ell^{i_\ell}$$

d'où

$$\Phi_\Theta(\zeta) = F(\zeta.\theta_1 , \zeta.\theta_2 , \dots , \zeta.\theta_\ell)$$

c'est-à-dire :

$$\Phi_\Theta(\zeta) = \sum_k \zeta^k.(\sum_{i_1+\dots+i_\ell=k} a_{i_1,\dots,i_\ell}.\theta_1^{i_1}.\theta_2^{i_2}\dots\theta_\ell^{i_\ell})$$

ou encore :

$$\Phi_\Theta(\zeta) = \sum_k \zeta^k.P_k(\Theta)$$

où P_k est un polynôme homogène des ℓ variables $\theta_1 , \theta_2 , \dots , \theta_\ell$. On a :

$$\alpha(F , \Theta) = \overline{\lim_k}\ \frac{k}{e}|P_k(\Theta)|^{1/k} \quad .$$

Notons par $\beta(F)$ le nombre $\sup_{\substack{\Theta\\ \|\Theta\|_1=1}} \alpha(F , \theta)$. Soit $M_k = \sup_{\substack{\Theta\\ \|\Theta\|_1=1}} |P_k(\Theta)|$. Si nous montrons que :

$\beta(F) = \overline{\lim_k} \frac{k}{e} M_k^{1/k}$ le résultat sera atteint. En effet, soit alors

$$\beta > (\beta(F) = \overline{\lim_k} \frac{k}{e} M_k^{1/k}) \quad ,$$

on a :

$$|\Sigma \zeta^k . M_k| \leqslant H.\exp(\beta . |\zeta|)$$

d'où $|\Phi_\Theta(\zeta)| \leqslant H.\exp(\beta . |\zeta|)$, et $|\zeta| = \|t\|_1$

d'où $|F(t)| \leqslant H.\exp\beta \|t\|_1$, et $\alpha(F) \leqslant \beta(F)$

mais l'inégalité en sens inverse est claire. Tout revient donc à démontrer que

$$\sup_\Theta \left[\overline{\lim_k} \frac{k}{e} | P_k(\Theta)|^{1/k}\right] = \overline{\lim_k} \frac{k}{e} [\sup_\Theta |P_k(\Theta)|]^{1/k} \quad .$$

Mr LELONG nous a signalé que dans le cas d'un cercle (plus généralement dans le cas d'un ensemble non effilé en aucun de ses points) cas auquel nous allons en gros nous ramener, ce résultat pourrait se déduire des considérations de [2] et de [3]. Nous donnons ici une démonstration directe, indépendante de la théorie fine du potentiel, grâce au lemme suivant :

LEMME 1. - Soit $F_n(z_1 , \dots , z_\ell)$ une fonction $\geqslant 0$, enveloppe supérieure d'une famille de modules de polynômes de ℓ variables, et de degrés inférieurs ou égaux à n , et soit $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_\ell$ un produit de cercles, μ la mesure produit des mesures linéaires des Γ_i ; quel que soit $\sigma > 0$, l'ensemble des points de Γ où $F_n(z_1 , \dots , z_\ell) \geqslant M_n . \exp(-\sigma . n)$, $[M_n = \sup_{z \in \Gamma} |F_n(z)|]$, a une mesure supérieure à $k(\sigma , \Gamma)$, $k(\sigma , \Gamma)$ une constante strictement positive.

Du lemme 1 résulte que $\overline{\lim_n} M_n^{1/n} = \sup_{z \in \Gamma} \overline{\lim_n} |F_n(z)|^{1/n}$. En effet, soit n' une suite extraite de la suite des entiers telle que

$$\lim_{n'} M_{n'}^{1/n'} = \overline{\lim_n} M_n^{1/n} \quad ,$$

et soit $\omega_{n'}$ l'ensemble des points où $F_{n'} > M_{n'} . \exp(-\sigma . n')$, alors on sait que l'ensemble des points communs à une infinité des $\omega_{n'}$ a une mesure supérieure ou égale à $k(\sigma , \Gamma)$. Soit z_0 un tel point ; en z_0 on a :

$$\overline{\lim_{n'}} (F_{n'}(z_0))^{1/n'} \geqslant (\overline{\lim_n} M_n^{1/n}) . \exp(-\sigma)$$

C. Q. F. D.

[On a même démontré $\|\overline{\lim}|F_n(z)|^{1/z}\|_\infty = \overline{\lim}\, M_n^{1/n}$] $M_n = +\infty$ n'est pas exclu de ces considérations. On déduit de ceci le corollaire suivant :

COROLLAIRE. - Soit $P_n(\eta_1 , \dots , \eta_{\ell+1})$ une suite de polynômes homogènes définis sur $(C^{\ell+1})^*$, P_n de degré total n, et soit Δ la frontière de la boule $|\eta_1| + \dots + |\eta_{\ell+1}| = 1$; alors, si $M_n = \sup_{\eta\in\Delta}|P_n(\eta)|$ on a : $\overline{\lim}\, M_n^{1/n} = \sup_{\eta\in\Delta}|P_n(\eta)|^{1/n}$

DÉMONSTRATION. - Posons $t_1 = \dfrac{\eta_1}{\eta_{\ell+1}}$, ... , $t_\ell = \dfrac{\eta_1}{\eta_{\ell+1}}$ (éventuellement $t_i = \infty$). On a :

$$1 = \|\eta\|_1 = |\eta_{\ell+1}| \cdot \|(t_1 , t_2 , \dots , t_\ell , 1)\|_1 ,$$

d'où, posant :

$$Q_n(t_1 , \dots , t_\ell) = P_n(t_1 , \dots , t_\ell , 1)$$

il vient :

$$|P_n(\eta_1 , \dots , \eta_{\ell+1})| = \frac{1}{\|(t_1,\dots,t\ ,1)\|_1^n} \cdot |Q_n(t_1 , \dots , t_\ell)| ;$$

$|P_n|$ prend son module maximum M_n en un point

$$v^n = (v_1^n , v_2^n , \dots , v_{\ell+1}^n) ,$$

correspondant à $(t_1^n , \dots , t_\ell^n) = t^n$. Soit n'' une suite extraite de la suite des entiers, telle que $\lim_{n''} M_{n''}^{1/n''} = \overline{\lim}_n M_n^{1/n}$. On peut extraire de cette suite une sous-suite n' telle que $t^{n'}$ converge vers un point t^0. Si $t^0 \in \infty$, puisque

$$t_i^0 = \frac{\eta_i^0}{\eta_{\ell+1}^0}$$

et que les η_i sont bornés dans leur ensemble, c'est que $\eta_{\ell+1}^0 \to 0$. Changeant de carte, nous pouvons donc toujours supposer que $t^0 \notin \infty$ ($\Sigma|\eta_i| = 1$, donc les η_i ne s'annulent pas tous simultanément). Soit $\theta^0 = (\theta_1^0 , \dots , \theta_\ell^0)$ pris tel que $\theta_i^0 > |t_i^0|$ pour tout i, et soit

$$\mu_n = \sup_{|t_\alpha|=\theta_\alpha^0} |Q_n| \qquad (\alpha = 1 , 2 , \dots , \ell) .$$

Par le principe du module maximum, on a :

$$\mu_n \geqslant \sup_{|t_i|=t_i^{n'}} |Q_n| \qquad (i = 1 , 2 , \dots , \ell)$$

d'où

$$M_n^{1/n} \geqslant \frac{1}{\|(\theta_1^0,\dots,\theta_\ell^0,1)\|_1} \cdot \mu_{n'}^{1/n'} \geqslant \frac{\|(t_1^{n'} , t_2^{n'} , \dots , t_\ell^{n'} , 1)\|_1}{\|(\theta_1^0 , \dots , \theta_\ell^0 , 1)\|_1} \cdot M_{n'}^{1/n'}$$

et on a vu que

$$\overline{\lim_{n'}} \frac{1}{\|(\theta_1^0 , \dots , \theta_\ell^0 , 1)\|_1} \cdot \mu_{n'}^{1/n'} \leqslant \sup_{\substack{|\eta_\alpha|=\theta_\alpha^0\cdot|\eta_{\ell+1}|,\eta_{\ell+1} \\ (\alpha = 1 , 2 , \dots , \ell)}} \overline{\lim_n} |P_n(\eta)|^{1/n} ,$$

d'où

$$\overline{\lim_n} M_n^{1/n} \geqslant \sup_\eta \overline{\lim_n} |P_n(\eta)|^{1/n} \geqslant \frac{\|(t_1^0 , \dots , t_\ell^0 , 1)\|_1}{\|(\theta_1^0 , \dots , \theta_\ell^0 , 1)\|_1} \cdot \overline{\lim_n} M_n^{1/n} .$$

Le rapport des deux normes pouvant être pris aussi voisin de 1 qu'on le désire, ceci achève la démonstration du corollaire et du théorème 2, une fois le lemme 1 démontré.

Soit $f(z)$ une fonction d'une variable complexe, holomorphe hors du cercle unité (∞ compris), continue sur le cercle, n'admettant qu'un nombre fini de zéros (on peut très largement étendre les hypothèses).

LEMME 2. - On a l'inégalité

$$\sup_\theta |f(Re^{i\theta})| \leqslant \left(\frac{R}{R-1}\right)^h \cdot \left(\int_\theta |f(e^{i\theta})|^{1/h} \frac{d\theta}{2\pi}\right)^h , \qquad \text{si } h > 1 .$$

DÉMONSTRATION. - On peut écrire f sous la forme $f(z) = b(z).g(z)$ où $b(z)$ est le produit de Blashke extérieur des zéros de f . Alors $|f(z)| \leqslant |g(z)|$ si $|z| \geqslant 1$, $|f(z)| = |g(z)|$ si $|z| = 1$. Soit $k(z)$ une racine h-ième de g , $g = k^h$, qui existe puisque g n'a pas de zéros hors du cercle unité. On a :

$$k(Re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(e^{i\alpha}) \frac{Re^{i(\theta-\alpha)} . d\alpha}{Re^{i(\theta-\alpha)} - 1} \qquad (R > 1)$$

d'où, par l'inégalité de Hölder :

$$\|k(Re^{i\theta})\|_\infty \leqslant \|k\|_1 \cdot \frac{R}{R-1}$$

d'où

$$\|f(Re^{i\theta})\|_\infty^{1/h} \leqslant \|g(Re^{i\theta})\|_\infty^{1/h} \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta})|^{1/h}.d\theta\right).\frac{R}{R-1}$$

C. Q. F. D.

LEMME 3. - Soit $P_n(z)$ un polynôme d'une variable complexe, et $h > 1$. On a, posant $\alpha = n/h$ où n est le degré de P, l'inégalité :

$$\sup_{|z|=1} |P_n(z)|^{1/h} \leqslant \left(\frac{R}{R-1}\right).R^{\alpha}.\int_{|z|=1} |P_n(z)|^{1/h}.\frac{|dz|}{2\pi}$$

DÉMONSTRATION. - On pose $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{z^n}$ et on remarque que

$$\left(\sup_{|z|=R} \left|\frac{P_n(z)}{z^n}\right| = \frac{1}{R^n}.\sup_{|z|=R} |P_n(z)|\right) \geqslant \frac{1}{R^n}.\sup_{|z|=1} |P_n(z)|$$

LEMME 4. - Soit F_n une fonction du type décrit dans le lemme 1, alors sur Γ (produit des cercles unité), on a l'inégalité :

$$\|F_n\|_\infty^{1/h} \leqslant \left(\frac{R}{R-1}\right)^{\ell}.R^{\alpha\ell}.\int_\Gamma |F_n|^{1/h}.\frac{d\mu}{(2\pi)^{\ell}} .$$

DÉMONSTRATION. - Supposons l'inégalité du lemme 4 démontrée pour les polynômes à ℓ variables. Soit $F_n(\Theta) = \sup_\beta |P_{n,\beta}(\Theta)|$. Alors on a sur Γ :

$$|P_{n,\beta}(\Theta)|^{1/h} \leqslant \sup_{\Theta\in\Gamma} |P_{n,\beta}(\Theta)^{1/h}$$

d'où :

$$\sup_{\Theta\in\Gamma} |F_n(\Theta)|^{1/h} \leqslant \sup \left[\sup_{\Theta\in\Gamma} |P_{n,\beta}(\Theta)|^{1/h}\right] ,$$

et tenant compte du lemme 4 admis pour les polynômes

$$\sup_{\Theta\in\Gamma} |F_n(\Theta)|^{1/h} \leqslant \left(\frac{1}{R-1}\right)^{\ell}.R^{\alpha\ell}.\sup_\beta \int_\Gamma |P_{n,\beta}(\Theta)|^{1/h}.\frac{d\mu}{(2\pi)^{\ell}}$$

et

$$\sup_\beta \int_\Gamma |P_{n,\beta}(\Theta)|^{1/h}.\frac{d\mu}{(2\pi)^{\ell}} \leqslant \int_\Gamma \sup_\beta |P_{n,\beta}(\Theta)|^{1/h}.\frac{d\mu}{(2\pi)^{\ell}}$$

($+\infty$ n'est pas exclus dans ces calculs), donc l'inégalité est aussi vraie pour les enveloppes supérieures de modules de polynômes de degré $\leqslant n$. Supposons alors le lemme 4 démontré pour $\ell - 1$ variables.

Soit $F_n(z_1, \dots, z_{\ell-1}) = \sup_{|z_\ell|=1} |P_n(z_1, \dots, z_\ell)|$. On a, par l'hypothèse de récurrence :

$$(4) \quad \|P_n\|_\infty^{1/h} = \|F_n\|_\infty^{1/h}$$

$$\leqslant \left(\frac{R}{R-1}\right)^{\ell-1} . R^{\alpha(\ell-1)} . \int_{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{\ell-1}} \int |F_n(z_1, \dots, z_{\ell-1})|^{1/h} \frac{|dz_1| \dots |dz_{\ell-1}|}{(2\pi)^{\ell-1}} .$$

Mais :

$$(5) \quad |F_n(z_1, \dots, z_{\ell-1})|^{1/h} \leqslant \frac{R}{R-1} . R^{\alpha} \int_{\Gamma_\ell} |P_n(z_1, \dots, z_{\ell-1}, z_\ell)|^{1/h} . \frac{|dz_\ell|}{(2\pi)}$$

d'après le lemme 3. Utilisant (5) dans le membre de droite de (4), on obtient le lemme 4 pour un polynôme de ℓ variables, donc pour une enveloppe supérieure de modules de tels polynômes. L'hypothèse de récurrence passe donc de $\ell - 1$ à ℓ , et elle est vraie pour $\ell = 1$ d'après le lemme 3 et le début du raisonnement du lemme 4

C. Q. F. D.

Maintenant, soit ω la mesure de l'ensemble des points où $F_n > M_n . \exp(-\sigma . n)$ (on peut se ramener au cas où M_n est fini). Utilisant l'inégalité du lemme 4 il vient :

$$M_n^{1/h} \leqslant \left(\frac{R}{R-1}\right)^{\ell} . R^{\alpha.\ell} [M_n^{1/h} [\omega + (1-\omega) \exp(-\sigma, \alpha)]] \quad ,$$

soit :

$$1 \leqslant \left(\frac{R}{R-1}\right)^{\ell} . R^{\alpha\ell} . [\omega + (1-\omega) \exp(-\sigma.\alpha)]$$

ou

$$\frac{\left(\frac{R-1}{R}\right) . R^{-\alpha\ell} - \exp(-\sigma.\alpha)}{1 - \exp(-\sigma.\alpha)} \leqslant \omega \quad .$$

σ étant donné, on peut prendre R assez voisin de 1 pour que $0 < \ell . \log R < \sigma$, donc prenant alors α assez grand, on aura

$$\left(\frac{R-1}{R}\right)^{\ell} . R^{-\alpha\ell} - \exp(-\sigma.\alpha) > 0$$

C. Q. F. D.

3. Une application.

Soit E_R un espace vectoriel réel de dimension ℓ, E_c son complexifié.

THÉORÈME 4. - *Soit Ψ une fonctionnelle analytique, définie sur E_c, admettant un support réel, et de la forme $\Psi_1 * \Psi_0$, où Ψ_0 a pour support l'origine. Alors Ψ_1 admet un support réel, et l'enveloppe convexe de ce support est égale à l'enveloppe convexe du support réel de Ψ.*

DÉMONSTRATION. - Dire que Ψ_0 a pour support l'origine, c'est dire que $\mathfrak{F}\Psi_0$ est de type exponentiel zéro. Ψ_0 a dans ce cas un support convexe.

LEMME 1. - *Soit Ψ une fonctionnelle analytique définie sur E_c, si Ψ est portable par tout polydisque $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_\ell$ où Γ_i contient un segment réel L_i, alors Ψ est portable par $L_1 \times \dots \times L_\ell$.*

DÉMONSTRATION. - Soit V un voisinage arbitraire de $L = L \times \dots \times L_\ell$. V contient un voisinage de L de la forme $\prod_{i=1}^{\ell} V_i$ où V_i est un voisinage de L_i. Soient Δ_i et Δ'_i deux disques tels que $\Delta_i \cap \Delta'_i \subset V_i$. Faisons l'hypothèse de de récurrence : *quels que soient les disques $\Gamma_\alpha \supset L_\alpha$, $\alpha > \alpha_0$, Ψ est portable par* $(\Delta_1 \cap \Delta'_1) \times (\Delta_2 \cap \Delta'_2) \times \dots \times (\Delta_{\alpha_0} \cap \Delta'_{\alpha_0}) \times \Gamma_{\alpha_0+1} \times \dots \times \Gamma_\ell$. Par hypothèse, ceci est vrai si $j = 0$. Supposons que c'est vrai jusqu'à $j - 1$. Alors Ψ est portable par :

$$(\Delta_1 \cap \Delta'_1) \times (\Delta_2 \cap \Delta'_2) \times \dots \times (\Delta_{j-1} \cap \Delta'_{j-1}) \times \Delta_j \times \Gamma_{j+1} \times \dots \times \Gamma_\ell$$

et par :

$$(\Delta_1 \cap \Delta'_1) \times (\Delta_2 \cap \Delta'_2) \times \dots \times (\Delta_{j-1} \cap \Delta'_{j-1}) \times \Delta'_j \times \Gamma_{j+1} \times \dots \times \Gamma_\ell$$

quels que soient les disques $\Gamma_\alpha \supset L_\alpha$ $\alpha \geqslant j + 1$. La réunion de ces deux compacts est polynomialement convexe, donc Ψ est portable par leur intersection, c'est-à-dire par

$$\Big(\prod_{i \leqslant j} \Delta_i \cap \Delta'_i\Big) \times \Gamma_{j+1} \times \dots \times \Gamma_\ell \qquad ,$$

l'hypothèse de récurrence passe de $j - 1$ à j. Finalement, Ψ est portable par $\prod_{\alpha=1}^{\ell} (\Delta_\alpha \cap \Delta'_\alpha) \subset V$; V étant arbitraire, Ψ est portable par L,

C. Q. F. D.

Prenons comme boule unité dans E_R un polydisque $\Delta = \prod_i \Delta_i$; ρ désigne la norme associée à Δ . Le ρ^*-type exponentiel de $\mathcal{F}\Psi$ est donné par

$$\alpha(\mathcal{F}\Psi) = \sup_{\rho^*(t)=1} \alpha(\mathcal{F}\Psi , t) \quad .$$

Mais $\Phi(\zeta.t) = \Phi_1(\zeta.t).\Phi_0(\zeta.t)$ ($\Phi(\zeta.t) = \mathcal{F}\Psi(\zeta.t)$, etc.) et on sait, ([1], page 191), Φ_0 étant de type exponentiel zéro que $\alpha(\mathcal{F}\Psi , t) = \alpha(\mathcal{F}\Psi_1 , t)$, d'où $\alpha(\mathcal{F}\Psi) = \alpha_1(\mathcal{F}\Psi)$, donc si $\alpha \leq 1$, on a $\alpha_1 \leq 1$. Ou encore : si Ψ est portable par un produit de disques Δ , Ψ_1 est portable par Δ . Or, si le support réel de Ψ est inclus dans un produit $L = L_1 \times \dots \times L_\ell$ de segments, Ψ est portable par tout produit de disques $\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_\ell$ où $\Gamma_\alpha \supset L_\alpha$ ($\alpha = 1 , 2 , \dots , \ell$). Donc Ψ_1 est aussi, d'après le lemme, portable par $L_1 \times \dots \times L_\ell$. D'autre part, il est clair que l'enveloppe convexe du support réel de Ψ_1 est incluse dans celle du support de $\Psi (\Psi_{\mu_1} \star \Psi_{\mu_2} = \Psi_{\mu_1 \star \mu_2})$.
D'où l'égalité annoncée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOAS (Ralph Philip). - Entire functions. - New-York, Academic Press Publishers, 1954 (Pure and applied Mathematics, 5).

[2] DENY (Jacques) et LELONG (Pierre). - Étude des fonctions sous-harmoniques dans un cylindre, Bull. Soc. math. France, t. 75, 1947, p. 89-112.

[3] LELONG (Pierre). - On a problem of M. A. Zorn, Proc. Amer. math. Soc., t. 2, 1951, p. 12-19.

[4] Séminaire Cartan, t. 4, 1951/52 : Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. - Paris, École Normale Supérieure (multigraphié).