André Martineau

Troisième partie : fonctions analytiques et distributions. Supports des fonctionnelles analytiques

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n° 19, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A19_0>

Troisième partie : FONCTIONS ANALYTIQUES ET DISTRIBUTIONS

SUPPORTS DES FONCTIONNELLES ANALYTIQUES

par André MARTINEAU

1. Généralités et premières définitions.

Soit V une variété analytique complexe ; $H(V)$ désigne l'espace vectoriel topologique des fonctions holomorphes sur V muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

DÉFINITION 1. - On appelle fonctionnelle analytique sur V toute forme linéaire continue sur $H(V)$.

L'ensemble des fonctionnelles analytiques sur V sera noté $H'(V)$ et muni de la topologie $\mathcal{T}_C$ ([6]) de la convergence uniforme sur les parties compactes de $H(V)$.

Soient V_1 et V_2 deux variétés analytiques complexes et h une application analytique de V_1 dans V_2 . L'application ${}^t h$ de $H(V_2)$ dans $H(V_1)$ définie par ${}^t h(f) = f \circ h$ $(f \in H(V_2))$ est continue donc admet une application transposée, que nous noterons h à nouveau, définie de $H'(V_1)$ dans $H'(V_2)$. Si $\psi \in H'(V_1)$, $h(\psi)$ sera dite, l'image de ψ par l'application analytique h .

DÉFINITION 2. - Soient Ω un ouvert de V , et i l'application identique de Ω dans V ; les éléments de $H'(V)$ image par i de quelque élément de $H'(\Omega)$ sont dits fonctionnelles analytiques sur V portables par Ω .

DÉFINITION 3. - Soient W une sous-variété de V , et i l'application identique de W dans V ; les éléments de $H'(V)$ image par i de quelque élément de $H'(W)$ sont dits fonctionnelles analytiques sur V strictement portables par W .

$H(V)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique de $\mathcal{C}(V)$ (ou de $\mathcal{E}(V)$, ou de $\mathcal{D}'(V)$, etc.). Si π désigne ce plongement de $H(V)$ dans $\mathcal{C}(V)$, ${}^t\pi$ est un homomorphisme de $\mathcal{C}'(V)$ sur $H'(V)$ (resp. $\mathcal{E}'(V)$ sur $H'(V)$; $\mathcal{D}(V)$ sur $H'(V)$; etc). ψ étant une fonctionnelle analytique sur V , et μ une mesure à support compact telle que ${}^t\pi(\mu) = \psi_\mu = \psi$, on dira que μ représente ψ : si $f \in H(V)$, $\psi(f) = \int_V f \, d\mu$; alors

(2') : Pour que ψ soit portable par Ω , il faut et il suffit qu'il existe μ à support compact dans Ω telle que $\psi_\mu = \psi$.

(3') : <u>Pour que</u> ψ <u>soit strictement portable par</u> W , <u>il faut et il suffit qu'il existe</u> μ , <u>mesure à support compact dans</u> W , <u>telle que</u> $\psi(f) = \int_V f.d\mu$, (si $\operatorname{rest}_W f$ désigne la restriction d'une fonction de $H(V)$ à W , on a aussi $\int_V f\, d\mu = \int_W \operatorname{rest}_W f.d\mu$).

DÉFINITION 4. - <u>Soit</u> K <u>un compact de</u> V , ψ <u>sera dite portable par</u> K <u>si elle est portable par tous les voisinages de</u> K <u>dans</u> V .

On dira aussi que K peut porter ψ . $H(K)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de K . Soit $\mathcal{F}$ la famille des ouverts contenant K (on dira $\alpha \leq \beta$ si $\alpha \subset \beta$ pour $\alpha , \beta \in \mathcal{F}$) et soit $P_{\alpha,\beta}$ l'application de $H(\alpha)$ dans $H(\beta)$ définie par $P_{\alpha,\beta}(f) = \operatorname{rest}_\beta (f)$. Les $H(\alpha)$ et les $P_{\alpha,\beta}$ forment un système inductif. On peut identifier $H(K)$ à la limite inductive de ce système. On munit alors $H(K)$ de la topologie localement convexe de la limite inductive des topologies des $H(\alpha)$. On sait ([4], chapitre 2, page 57) que $H(K)$ est un espace $\mathcal{D}.\mathcal{F}$ nucléaire. L'injection i de $H(V)$ dans $H(K)$ est par définition continue, donc ${}^t i$ peut être définie de $H'(K)$ dans $H'(V)$. On voit aisément que

(4') : <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que</u> ψ <u>soit portable par</u> K <u>est que</u> $\psi \in {}^t i(H'(K))$; <u>ou encore que</u> ψ <u>soit continue pour la topologie induite par</u> $H(K)$ <u>sur</u> $H(V)$.

(4) est a priori plus faible que (4'). Mais ces deux définitions sont équivalentes si V est une variété de Stein. On doit montrer que si ψ satisfait à (4), elle peut être prolongée par continuité à $H(K)$. Désignons par $\tilde{K}$ l'enveloppe de K par rapport à la famille $H(V)$. ψ étant portable par tout voisinage de K l'est par tout voisinage de $\tilde{K}$; mais dans ce dernier cas, il est clair que ψ peut être prolongée à $H(\tilde{K})$. Pour conclure, il suffit de voir que $H(\tilde{K})$ s'identifie à un sous-espace fermé de $H(K)$. Ce dernier point résulte du

LEMME. - <u>Soit</u> $\mathcal{F}$ <u>une famille de fonctions holomorphes et bornées dans un voisinage fixe</u> V <u>de</u> K , <u>et prolongeables à</u> $\tilde{K}$. <u>Alors il existe un voisinage</u> W <u>de</u> $\tilde{K}$, <u>qui ne dépend que de</u> V , <u>dans lequel la famille</u> $\mathcal{F}$ <u>est prolongeable en restant bornée</u>.

Ce lemme, dans C^N, résulte d'un argument classique de CARTAN-THULLEN, et s'étend par plongement d'un voisinage de $\tilde{K}$ dans un polydisque, dans le cas d'une variété de Stein.

Soit $\mathcal{P}$ une partie de l'ensemble des compacts de V telle que, si A_α est une sous-famille totalement ordonnée de $\mathcal{P}$ pour la relation d'ordre définie par l'inclusion $\bigcap_\alpha A_\alpha \in \mathcal{P}$.

DÉFINITION 5. - Un compact K de $\mathcal{P}$ est dit un $\mathcal{P}$-support de Ψ, si Ψ est portable par K et si K est minimal dans la famille des éléments de $\mathcal{P}$ qui peuvent porter Ψ.

Il est clair que si Ψ est portable par un élément de $\mathcal{P}$, alors Ψ admet au moins un $\mathcal{P}$-support.

Si V_1 et V_2 sont deux variétés analytiques complexes, on peut identifier ([4], chapitre 2, page 81) $H(V_1 \times V_2)$ à $H(V_1) \hat{\otimes}_{\varepsilon,\pi} H(V_2)$, donc, si $\Psi_1 \in H'(V_1)$, $\Psi_2 \in H'(V_2)$, $\Psi_1 \otimes \Psi_2$ est identifié à une fonctionnelle analytique sur $V_1 \times V_2$. Il est clair que si $\Psi_1 = \Psi_{\mu_1}$, $\Psi_2 = \Psi_{\mu_2}$ on a $\Psi_1 \otimes \Psi_2 = \Psi_{\mu_1 \otimes \mu_2}$.
Si V est une variété de groupe, $H'(V)$ devient une algèbre à produit continu comme suit : soit $\Delta : f(\hat{z}) \longrightarrow f(\hat{z}\circ\hat{u})$ l'application diagonale de $H(V)$ dans

.../...

$H(V \times V) \simeq H(V) \hat{\otimes}_{\varepsilon,\pi} H(V)$ définie par la loi de groupe $\delta : (V \times V) \longrightarrow V$.

${}^t\Delta$ est une application linéaire continue de $H'(V) \hat{\otimes}_{\pi,\varepsilon} H'(V)$ dans $H'(V)$ donc définit une application bilinéaire continue

$$(\psi_1 , \psi_2) \rightarrow \psi_1 * \psi_2 \quad ,$$

appelée produit de composition, de $H'(V) \times H'(V)$ dans $H'(V)$. Le produit de composition est associatif, et commutatif si le groupe l'est.

2. La transformation de Fourier-Borel.

E désigne un espace vectoriel complexe de dimension n , E^* désigne son dual. Si ρ est une norme définie sur E , ρ^* désigne la norme duale. Si $z \in E$, $u \in E^*$, on note $u(z)$ par $\langle z , u \rangle$. Soit $e_1 , \dots , e_n$ une base de E ; on notera par $e_1^* , \dots , e_n^*$ la base duale $[e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}]$. Les composantes de z seront notées $(z_1 , \dots , z_n)$, celles de u $(u_1 , \dots , u_n)$. $H'(E)$ muni de son produit de composition est une algèbre commutative.

Soit ρ^* une norme sur E^* ; une fonction F entière sur E^* est dite de type exponentiel s'il existe une majoration

(1) $$|F(u)| \leq K \exp [A\rho^*(u)] \quad .$$

Toutes les normes sur E^* étant équivalentes, cette définition ne dépend pas de la norme choisie. Si ρ^* est choisi, la borne inférieure des nombres A tels que (1) ait lieu est dite le ρ^*-type exponentiel de F . L'ensemble des fonctions de type exponentiel forme un espace vectoriel topologique, noté $\mathrm{Exp}\,(E^*)$, de la façon suivante : une norme ρ^* étant fixée, soit Exp_A l'ensemble des F telles que :

$$\|F\|_A = \sup_{u \in E^*} |F(u) \exp (-A\rho^*(u))| < +\infty \quad .$$

C'est un espace de Banach quand on le munit de la norme $\|F\|_A$. On munit $\mathrm{Exp}\,(E^*)$ de la topologie localement convexe de la limite inductive des $\mathrm{Exp}_A \subset \mathrm{Exp}\,(E^*)$.

Soit $\psi \in H'(E)$: pour tout $u \in E^*$, on peut calculer

$$\psi(\exp (\langle \hat{z} , u \rangle)) = \mathcal{F}\psi(u) \quad .$$

$\mathcal{F}\psi(\hat{u})$ est dite la transformée de Fourier-Borel de ψ . E étant muni d'une base, on désigne par $\mathcal{P}_1$ la famille des compacts de la forme

$$|z_e| \leq a_e , (e = 1 , 2 , \dots , n) \qquad (a_e \in R^+) \quad .$$

THÉORÈME 1.([5]) - <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction</u> F <u>soit la transformée</u> $\mathcal{F}\psi$ <u>de Fourier-Borel d'une fonctionnelle analytique de</u> $\mathcal{P}_1$<u>-support</u> $(|z_1| \leq A_1 , \ldots , |z_n| \leq A_n)$ <u>est que, quel que soit</u> ε, <u>on ait une majoration</u>

$$(2) \qquad |F(u)| \leq K(\varepsilon) \exp\left[(A_1 + \varepsilon)\,|u_1| + \ldots + (A_n + \varepsilon)\,|u_n|\right]$$

<u>aucun des</u> A_i <u>ne pouvant être diminué</u>.

DÉMONSTRATION. - Si ψ est portable par le compact K,

$$K = (|z_1| \leq A_1 , \ldots , |z_n| \leq A_n) ,$$

alors, quel que soit ε, d'après la définition 4, il existe une mesure à support compact dans l'ouvert $K_\varepsilon(|z_i| < A_i + \varepsilon)$ $(i = 1 , 2 , \ldots , n)$ telle que $\psi(f) = \int f\, d\mu$. Donc $\mathcal{F}\psi(u) = \int_E \exp(\langle z , u\rangle)\, d\mu_z$. On a

$$\langle z , u\rangle = \sum_{e=1}^{n} z_e . u_e$$

d'où

$$\sup_{z \in K_\varepsilon} |\langle z , u\rangle| \leq \sum_{e=1}^{n} |A_e + \varepsilon| . |u_e| .$$

Si $\|\mu\|$ est la masse totale de μ, on a :

$$|\mathcal{F}\psi(u)| \leq \|\mu\| . \exp\left(\sum_{e=1}^{n} |A_e + \varepsilon| . |u_e|\right)$$

qui est (2). Réciproquement, supposons (2) vrai. Soit $f \in H(E)$. E étant muni d'une base, on peut identifier f à une fonction des n variables $z_1 , z_2 , \ldots , z_n$. $f(z) = \sum_\alpha a_\alpha . z^\alpha$ avec les notations $\alpha = (\alpha_1 , \ldots , \alpha_n)$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} . z_2^{\alpha_2} . \ldots . z_n^{\alpha_n}$ et $f = \lim_{n \to \infty} \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha . z^\alpha$. Donc

$$\psi(f) = \lim_{n \to \infty} \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha . b^\alpha$$

où $b^\alpha = \psi(z^\alpha)$. D'autre part $\exp\langle z , u\rangle = \sum_\alpha \frac{z^\alpha . u^\alpha}{\alpha!}$ $(\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n!)$. D'où

$$\mathcal{F}\psi(u) = \sum_\alpha \frac{b^\alpha . u^\alpha}{\alpha!} .$$

Si on a la majoration (2), comme par la formule de Cauchy :

$$\frac{b^{\alpha}}{\alpha!} = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma} \frac{\mathcal{F}\psi(u)}{u^{(\alpha+1)}}\, du \qquad \begin{cases} du = du_1 . du_2 . \ \ldots \ . du_n \\ (\alpha + 1) = (\alpha_1 + 1 , \alpha_2 + 1 , \ldots , \alpha_n + 1) \\ \Gamma = \prod_{j=1}^{n} \Gamma_j \end{cases}$$

Γ_j étant un cercle centré à l'origine et de rayon R_j ; on en déduit

$$\frac{|b^{\alpha}|}{\alpha!} \leq \frac{K(\varepsilon) \exp \left(\sum_{j=1}^{n} (A_j + \varepsilon) R_j\right)}{R^{\alpha}}$$

$\dfrac{\exp (A_i + \varepsilon) R_i}{R_i^{\alpha_i}}$ est minimum pour $R_i = \left(\dfrac{\alpha_i}{A_i + \varepsilon}\right)$, d'où

$$\frac{|b^{\alpha}|}{\alpha!} \leq K(\varepsilon) . \left[\frac{(e.A + \varepsilon)}{\alpha}\right]^{\alpha} .$$

Si $f(z)$ est holomorphe au voisinage du polydisque de rayon $(A_1 , \ldots , A_n)$, on a

$$a_{\alpha} = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_H \frac{f(z).dz}{z^{(\alpha+1)}} \qquad H = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$$

où H_i est un cercle de rayon S_i , $S_i > (A_i + \varepsilon)$ $dz = dz_1\, dz_2 \ldots dz_n$. D'où :

$$|a_{\alpha}| \leq \frac{M_f}{S^{\alpha}} , \quad \text{où} \quad M_f = \sup_{z \in H} |f(z)| \quad ,$$

alors

$$|a_{\alpha} . b^{\alpha}| \leq \frac{\alpha!\ e^{|\alpha|}}{\alpha^{\alpha}} \left(\frac{A + \varepsilon}{S}\right)^{\alpha} .M.K(\varepsilon)$$

et si $\left(\dfrac{A + \varepsilon}{S}\right) < (1 , 1 , \ldots , 1)$ la série de terme général $a_{\alpha} . b^{\alpha}$ converge. La convergence étant uniforme pour les fonctions holomorphes au voisinage de H et bornées par M sur H ,

(3) $$f \to \sum_{\alpha} a_{\alpha} . b^{\alpha}$$

va définir une fonctionnelle analytique ψ , de transformée de Fourier-Borel $\mathcal{F}\psi(u) = \sum_{\alpha} \dfrac{b^{\alpha}.u^{\alpha}}{\alpha!}$, prolongeable par continuité à K (par la formule (3)).

COROLLAIRE. - $\psi \leftrightarrow \mathcal{F}\psi$ <u>est un isomorphisme vectoriel topologique entre</u> $H'(E)$ <u>et</u> $\mathrm{Exp}\,(E^*)$.

DÉMONSTRATION. - Elle résulte de la démonstration du théorème 1, $\mathrm{Exp}\,(E^*)$ étant défini à partir de

$$\rho^* : \quad (u \longrightarrow \rho^*(u) = \sum_{i=1}^{n} |u_i|)$$

(la topologie de Exp (E^*) est indépendante de la norme choisie; mieux, toute topologie du type $(\mathcal{L}.\mathcal{F})$ comparable à la topologie défihie à partir du ρ^* ci-dessus lui est identique ([4], introduction, page 17, théorème B)).

3. Eléments de géométrie des $\mathcal{P}$-supports.

Si $n = 1$, et si $\mathcal{P}_C$ désigne la famille des compacts convexes, toute fonctionnelle analytique admet un $\mathcal{P}_C$-support unique, qui est, on le vérifie aisément, le compact dont la frontière est l'indicatrice de croissance de Polya ([2], page 74) de sa transformée de Fourier-Borel.

Dès que $n = 2$, il n'en est plus rien, mais par analogie on pourrait dire qu'"une indicatrice de croissance" d'une fonction de type exponentiel est donnée par la frontière d'un $\mathcal{P}_C$-support de la fonctionnelle qu'elle définit.

EXEMPLE. - E est un espace vectoriel complexe à deux dimensions, E^* son dual, (e_1, e_2) une base dans E. Considérons la courbe

$$\Gamma : \quad (x_1^2 + x_2^2 = 1) \quad (x_i \in R \; ; \quad i = 1, 2)$$

et

$$\psi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(x_1, x_2) \, ds \quad (ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2) \quad .$$

Alors,

$$\mathcal{F}\psi(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \exp\,(x_1 . u_1 + x_2 . u_2)\, ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u_1^2 + u_2^2)^n}{(n!)^2} = J_0(ir)$$

si $r^2 = u_1^2 + u_2^2$.

Effectuons dans E le changement de base :

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{2}(e_1 + ie_2) \\ f_2 = \frac{1}{2i}(e_1 - ie_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1^* = e_1^* - ie_2^* \\ f_2^* = ie_1^* - e_2^* \end{cases}$$

Les nouvelles composantes d'un point de E sont notées (y_1, y_2), d'un point de E^* (t_1, t_2). D'où :

$$\mathcal{F}\psi(t) = \sum_n \frac{(4it_1 t_2)^n}{(n!)^2} \quad .$$

Donc Ψ est portable, d'une part, par la courbe Γ , d'autre part, par les produits de disques :

$$|y_1| \leq \rho \ , \quad |y_2| \leq \frac{1}{4\rho} \qquad (0 < \rho < +\infty)$$

comme il résulte des calculs du théorème 1.

Si on appelle "réel" l'ensemble des z de la forme $x_1 . e_1 + x_2 . e_2$ $(x_i \in R)$, la trace d'un tel polycylindre sur le réel est $|x_1^2 + x_2^2| \leq \inf [\rho^2 , (\frac{1}{4\rho})^2]$ donc peut être arbitrairement petite. Même quand Ψ provient d'une mesure réelle, il n'existe pas de plus petit $\mathcal{O}_C$-support (sinon, toujours d'après le théorème 1, le $\mathcal{O}_C$-support de Ψ devant être réduit à $\{0\}$, $J_0(ir)$ serait de type exponentiel 0). Par régularisation, on pourrait même supposer que Ψ provient d'une fonction indéfiniment dérivable. Mais on a le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soient, (pour fixer les idées), V une variété de Stein, et Ψ une fonctionnelle analytique sur V portable par les compacts K_1 et K_2 ; si $K_1 \cup K_2$ est $H(V)$-convexe, alors Ψ est portable par $K_1 \cap K_2$.

DÉMONSTRATION. - Pour la notion de $\mathcal{F}$-convexité, où $\mathcal{F}$ est une famille de fonctions holomorphes, et pour les résultats de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes que nous utilisons, nous nous référons essentiellement à [7], exposés n° 8, 9, 19. On a le lemme suivant :

LEMME 1. - Sous les hypothèses du théorème 2, une fonction holomorphe au voisinage de $K_1 \cap K_2$ est différence d'une fonction holomorphe au voisinage de K_1 et d'une fonction holomorphe au voisinage de K_2 .

Soit $\mathcal{Q}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes au voisinage de $K_1 \cup K_2$; d'après [3] (pages 219-220), il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow E_2^{0,1} \longrightarrow H^1(K_1 \cup K_2 \ ; \mathcal{Q}) \longrightarrow E_2^{1,0} \longrightarrow 0$$

où $E_2^{1,0}$ est le quotient de $H^0(K_1 \cap K_2 \ ; \mathcal{Q})$ par le sous-groupe formé des classes de cohomologie qui sont différence de deux classes induites par des classes de cohomologie de K_1 et de K_2 . Mais ([7], exposé 19), $H^1(K_1 \cup K_2 \ ; \mathcal{Q}) = 0$ puisque $K_1 \cup K_2$ est $H(V)$-convexe. Donc $E_2^{1,0} = 0$, ce qui est le lemme.

REMARQUE. - On a facilement plus. Dans $H(K_1 \cap K_2)$, toute suite convergente est l'image par $d : (f_1 , f_2) \longrightarrow (f_1 - f_2)$ d'une suite convergente de $H(K_1) \times H(K_2)$.

Soit maintenant Ψ_1 (resp. Ψ_2) un prolongement par continuité de Ψ à $H(K_1)$ (resp. à $H(K_2)$) . Si $f \in H(K_1 \cap K_2)$, nous définissons $\Psi(f)$ par

$\Psi(f) = \Psi_1(f_1) - \Psi_2(f_2)$ où $f_1 \in H(K_1)$, $f_2 \in H(K_2)$, $f_1 - f_2 = f$ au voisinage de $K_1 \cap K_2$. Cette définition est cohérente. En effet, si on a $f = g_1 - g_2$, alors :

$$\Psi_1(f_1) - \Psi_2(f_2) - \Psi_1(g_1) + \Psi_2(g_2) = \Psi_1(f_1 - g_1) - \Psi_2(f_2 - g_2)$$

et

$$(f_1 - g_1) - (f_2 - g_2) = 0$$

dans $H(K_1 \cap K_2)$; il reste à montrer que si h_1 et h_2 sont tels que $h_1 - h_2 = 0$ dans $H(K_1 \cap K_2)$ on a :

$$\Psi_1(h_1) - \Psi_2(h_2) = 0 \quad .$$

Mais h_1 et h_2 définissent par recollement une fonction h de $H(K_1 \cup K_2)$ et comme $K_1 \cup K_2$ est $H(V)$-convexe, $H(V)$ est dense dans $H(K_1 \cup K_2)$ ([7] (exposé 19)). Donc il existe une suite ℓ_i de fonctions de $H(V)$ telle que $\ell_i \longrightarrow h$ dans $H(K_1 \cup K_2)$. Alors $\ell_i \longrightarrow h_1$ dans $H(K_1)$ et $\ell_i \longrightarrow h_2$ dans $H(K_2)$, d'où :

$$\Psi_1(h_1) = \lim_{i \to \infty} \Psi(\ell_i) = \Psi_2(h_2) \quad .$$

$H(K_1 \cap K_2)$ est bornologique, aussi pour vérifier la continuité de Ψ , il suffit de la vérifier avec des suites, ce qui se fait avec la remarque suivant le lemme et termine la démonstration.

Soit E_R un espace vectoriel réel, et E_C son complexifié. Nous dirons d'un compact de E_C qu'il est réel s'il est inclus dans E_R . $\mathcal{P}_R$ va désigner la famille des compacts réels.

COROLLAIRE 1. - <u>Si</u> Ψ <u>est portable par un compact réel,</u> Ψ <u>admet un seul</u> $\mathcal{P}_R$<u>-support</u>. (Nous appellerons ce $\mathcal{P}_R$-support le <u>support réel de</u> Ψ).

DÉMONSTRATION. - Ψ admet des $\mathcal{P}_R$-supports. Soient K_1 et K_2 deux tels $\mathcal{P}_R$-supports. Si nous montrons que Ψ est portable par $K_1 \cap K_2$ nous aurons montré que $K_1 = K_1 \cap K_2 = K_2$. Pour cela, nous appliquerons le théorème 2, grâce au lemme 3 qui va suivre.

LEMME 2. - <u>Tout compact convexe est polynomialement convexe.</u>

Il résulte, par exemple de [2], que si F est un hyperplan complexe de E , et si Ω est l'ouvert étoilé maximal par rapport à un point $\omega \notin \Omega$, ne contenant pas F , Ω est un ouvert de Runge (approximation par les polynômes).

En conséquence, pour montrer qu'un compact étoilé est polynomialement convexe, il suffira de montrer que par tout point extérieur à ce compact, on peut faire passer un hyperplan complexe ne le rencontrant pas. Si K_3 est un compact convexe, et si $z_0 \notin K_3$, il existe un hyperplan réel passant par z_0 et ne rencontrant pas K_3, et cet hyperplan contient un hyperplan complexe ; le lemme 2 est démontré.

LEMME 3. - Tout compact réel est polynomialement convexe.

DÉMONSTRATION. - Soit K_4 un compact réel. Si $z_0 \notin E_R$, alors z_0 n'appartient pas à l'enveloppe convexe de K_4, donc d'après le lemme 2, il existe un polynôme $P(z)$ tel que $|P(z_0)| > \sup_{z \in K_4} |P(z)|$. Si $z_0 \in E_R$, $z_0 \notin K_4$, il existe une fonction continue f qui vaut 1 en z_0 et 0 sur K_4. Le théorème d'approximation de Weierstrass assure qu'il existe un polynôme Q tel que

$$|Q - f| < \frac{1}{2} \qquad \text{sur } K_4 \cup \{z_0\} ,$$

donc

$$|Q(z_0)| > \sup_{z \in K_4} |Q(z)| .$$

Le lemme 3 est démontré.

Soit $E_R = R^n$, alors $E_C = C^n$. Nous dirons qu'un compact K_0 du corps des complexes C est R-saturé si : $(K_0 \cap R) \supset$ (projection sur R de K_0). Si K est un compact de $\mathcal{C}^n$, nous noterons sa projection sur la i-ième composante réelle par $\underset{i}{\mathrm{pr}}\, K$.

LEMME 4. - Soit K un compact convexe de C^n produit de compacts K_i R-saturés L un compact réel de C^n produit de segments L_i, tels que $L_i \supset [\underset{i}{\mathrm{pr}}\, K]$, alors $K \cup L$ est polynomialement convexe.

DÉMONSTRATION. - Si $z_0 \in R^n$, $z_0 \notin K \cup L$, alors z_0 n'appartient pas à l'enveloppe convexe de $K \cup L$. On peut donc appliquer le lemme 2. Soit $z_0 \notin R^n$, $z_0 \notin K \cup L$. Il existe un indice ℓ tel que $z_{0,\ell} \notin K_\ell$ et un indice k tel que $z_{0,k} \notin L_k$. Si $z_{0,\ell}$ n'est pas réel, l'hyperplan d'équation $z_\ell - z_{0,\ell} = 0$ ne rencontre pas $K \cup L$. Si $z_{0,\ell}$ est réel, on considère l'hyperplan F d'équation

$$a(z_k - z_{0,k}) + b\,(z_\ell - z_{0,\ell}) = 0 , \qquad a , b \in R .$$

Soit, en équations réelles,

$$(F)\ \begin{cases} a(x_k - x_{0,k}) + b(x_\ell - x_{0,\ell}) = 0 \\ a(y_k - y_{0,k}) + b(y_\ell - y_{0,\ell}) = 0 \end{cases} \qquad (z_h = x_h + iy_h) \quad .$$

Les points réels de F satisfont à $-ay_{0,k} = 0$. Donc, comme le cas ($y_{0,k} = 0$ pour tout k) a été éliminé, nous pouvons supposer $y_{0,k} \neq 0$, et F n'a pas de points réels si $a \neq 0$. On peut maintenant choisir a et b en sorte que $a \neq 0$, et que la droite d'équation $a(x_k - x_{0,k}) + b(x_\ell - x_{0,\ell}) = 0$ ne rencontre pas le convexe $M = (\mathrm{pr}_k K) \times (\mathrm{pr}_\ell K)$ dans le plan des (x_k , x_ℓ) , car K_k et K_ℓ étant R-saturés $(x_{0,k} , x_{0,\ell}) \notin M$. Enfin $K \cup L$ est étoilé par rapport à tout point de $K \cap L$.

Soit $\mathcal{P}_\delta$ la famille des polydisques centrés dans R^n .

COROLLAIRE 2. - <u>Soit Ψ une fonctionnelle analytique définie sur C^n , portable par un compact réel. Alors Ψ a un plus petit $\mathcal{P}_\delta$-support : sa trace sur R^n est le plus petit pavé contenant le support réel de Ψ .</u>

DÉMONSTRATION. - Si Ψ a un support réel, alors Ψ est portable par un produit L de segments choisis assez grands. Si K est un $\mathcal{P}_\delta$-support de Ψ , $K \cup L$ est polynomialement convexe d'après le lemme 4, donc Ψ est portable par $K \cap L = K \cap R^n$. $K \cap R^n$ contient donc le support réel de Ψ , donc aussi le plus petit pavé P contenant ce support. Mais le compact de $\mathcal{P}_\delta$ de trace P sur R^n peut porter Ψ . Donc il est identique à K ,

C. Q. F. D.

Ce corollaire admet la conséquence suivante :

THÉORÈME 3. - <u>Soit Ψ définie sur C^n portable par une suite décroissante de bandes d'intersection R^n , alors Ψ admet un support réel.</u>

DÉMONSTRATION. - Nous désignons par bande un ensemble ouvert défini par des inégalités $|y_e| < a_e$ ($e = 1 , 2 , \dots , n$) , $0 < a_e < +\infty$. Par hypothèse, Ψ est portable par une bande B_0 définie par ($|y_e| < a_{0,e}$, $a_{0,e} < +\infty$, ($e = 1 , 2 , \dots , n$) .

Considérons l'application analytique I de C^n dans C^n définie par (les nouvelles variables sont notées par w) :

$$w_e = \mathrm{th}\left(\frac{\pi}{4a_{0,e}} z_e\right) \qquad (e = 1 , 2 , \dots , n) \quad .$$

Elle transforme la bande B_0 dans le polydisque $|w_1| < 1 , \ldots , |w_n| < 1$. Si B_n est une suite de bandes $\ldots \subset B_{n+1} \subset B_n \subset \ldots \subset B_0$, $\bigcap_i B_i = R^n$, alors $\overline{I(B_n)} = \beta_n$ est un compact dans $\overline{I(B_0)}$ et $\bigcap_n \beta_n = K_0$ où K_0 est défini par $|Rw_1| \leq 1 , \ldots , |Rw_n| \leq 1$, $\operatorname{Im} w_1 = \ldots = \operatorname{Im} w_n = 0$. Donc $I(\psi)$ est portable dans l'espace des w par le compact réel K_0 , mais aussi $I(\psi)$ est portable par un produit de disques $|w_e| \leq r < 1$ $(e = 1 , 2 , \ldots , n)$ par hypothèse, donc d'après le corollaire 2, $I(\psi)$ est portable par le compact réel $\operatorname{Im} w_1 = \ldots = \operatorname{Im} w_n = 0$

$$|Rw_1| \leq r < 1 , \ldots , |Rw_n| \leq r < 1 ,$$

donc ψ par l'image réciproque, dans B_0 , de ce compact réel,

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEHNKE (H.). - Généralisation du théorème de Runge pour des fonctions multiformes de variables complexes, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables [1953. Bruxelles] ; p. 81-96. - Liège, G. Thone ; Paris, Masson, 1953 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[2] BOAS (Ralph Philip). - Entire functions. - New York, Academic Press, 1954 (Pure and applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks, 5).

[3] GODEMENT (Roger). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 13).

[4] GROTHENDIECK (Alexander). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Mem. Amer. math. Soc., 16).

[5] MALGRANGE (Bernard). - Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 274-355 (Thèse Sc. math. Paris. 1955).

[6] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 7, 1957, p. 1-141.

[7] Séminaire Cartan, t. 4, 1951/52 : Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. - Paris, École Normale Supérieure (multigraphié).