Séminaire Schwartz

André Martineau

Analyse de la méthode de Carleman par Hörmander

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n° 13, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A13_0>

9 février 1960

ANALYSE DE LA MÉTHODE DE CARLEMAN PAR HÖRMANDER [1] (fin)

par André MARTINEAU

NOTATIONS. - Elles sont les mêmes que dans l'exposé précédent.

Le but de cet exposé est de démontrer une réciproque de la proposition 1 de l'exposé précédent. On commence par réduire le problème, grâce au théorème 1 ci-dessous, à la démonstration d'une inégalité de Carleman entre P et les $P^{(\alpha)}$. Cette dernière question pour l'ensemble de tous les opérateurs différentiels est résolue par l'inégalité de Treves généralisée.

1. Réduction du problème au cas de Treves.

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Soit Ω un domaine borné de R^n et $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$. Nous supposons de plus que, pour tout $x \in \Omega$, on ait la relation :

$$\tau^{\gamma} |Q(\xi + i\tau N)|^2 \leq C \sum_{(\alpha)} |P^{(\alpha)}(\xi + i\tau N)|^2 \tau^{|\alpha^*|}$$

où $N = \varphi'(x)$ et C est une constante indépendante de x, ξ et de τ. Dans ces conditions, on peut écrire pour tout $u \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\tau^{\gamma} \int |Q(D)\, u|^2 \exp(2\tau\varphi)\, dx \leqslant C \sum_{(\alpha)} \tau^{|\alpha^*|} \int |P^{(\alpha)}(D)\, u|^2 \exp(2\tau\varphi)\, dx \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Celle-ci se fera en plusieurs étapes. Supposons d'abord la fonction φ linéaire c'est-à-dire $\varphi = N_0 + \langle x , N \rangle$.

La relation de Parseval nous permet d'écrire (pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$) :

$$\tau^{\gamma} \int |Q(D + i\tau N)\, v|^2\, dx \leqslant C \sum_{(\alpha)} \tau^{|\alpha^*|} \int |P^{(\alpha)}(D + i\tau N)\, v|^2\, dx \quad .$$

Pour faire apparaître les opérateurs $P^{(\alpha)}(D)$ et $Q(D)$ il suffit de l'appliquer à $v = u \exp(\langle x , \tau N \rangle)$. On obtient ainsi :

$$\tau^{\gamma} \int |Q(D)\, u|^2 \exp(2\tau \langle x , N \rangle)\, dx \leqslant C \sum_{(\alpha)} \tau^{|\alpha^*|} \int |P^{(\alpha)}(D)\, u|^2 \exp(2\tau \langle x , N \rangle)\, dx$$

ou encore, en multipliant les deux membres par $\exp(2\tau N_0)$,

$$(1) \quad \tau^{\gamma}\int |Q(D)\ u|^2 \exp(2\tau\varphi)\ dx \leq C\sum_{(\alpha)}\tau^{|\alpha^*|}\int |P^{(\alpha)}(D)\ u|^2 \exp(2\tau\varphi)\ dx$$

C. Q. F. D.

Il reste à la démontrer en toute généralité.

A cet effet, donnons-nous une fonction $\omega \in \mathcal{D}$, $\omega \geqslant 0$ et $\omega \neq 0$ en tout point du cube $|x_i| < 1/2$ $(i = 1 , 2 , \ldots , m)$ et telle que de plus, le support de ω soit inclus dans le cube $|x_i| < 1$.

Posant alors

$$\theta(x) = \frac{\omega(x)}{\sum_{(g)}\omega(x - g)}$$

où $g = (g_1 , \ldots , g_m , 0 , \ldots , 0)$ et $g_i \in Z$, on obtient la relation $\sum_{(g)} \theta(x - g) = 1$.

Nous utiliserons également la fonction $u_g(x) = u(x)\ \theta(\frac{x - \varepsilon g}{\varepsilon})$ (avec $\varepsilon > 0$). Si x_g est choisi dans le support de u_g et que $N_g = \varphi'(x_g)$ on peut écrire (puisque $\varphi \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$)

$$|\varphi(x) - \varphi(x_g) - \langle x - x_g , N_g\rangle| \leqslant K|x - x_g|^{*2}$$

où K est une constante indépendante de x_g . Comme tout point (x_i) du support de u_g est tel que $|x_i - x_{gi}| < 2\varepsilon$, pour $i \leqslant m$, cette relation devient aussitôt, quel que soit x dans ce support,

$$(2) \quad |\varphi(x) - \varphi(x_g) - \langle x - x_g , N_g\rangle| \leqslant 4K\varepsilon^2 \quad .$$

La fonction $\psi_g(x) = \varphi(x_g) + \langle x - x_g , N_g\rangle$ étant linéaire, on peut lui appliquer la relation (1) :

$$\tau^{\gamma}\int(|Q(D)\ u_g|^2 \exp(2\tau(\varphi(x_g)) + \langle x - x_g , N_g\rangle))\,dx$$
$$\leqslant C\sum_{(\alpha)}\tau^{|\alpha^*|}\int |P^{(\alpha)}(D)\ u_g|^2 \exp(2\tau\psi_g)\ dx \quad .$$

Tenant compte de (2), on obtient

$$\tau^{\gamma}\int |Q(D)\ u_g|^2 \exp(2\tau\varphi)\ dx \leqslant C\exp(16K)\sum_{(\alpha)}\tau^{|\alpha^*|}\int |P^{(\alpha)}(D)\ u_g|^2 \exp(2\tau\varphi)\ dx$$

(à condition d'avoir fixé ε de manière à ce que $\varepsilon^2\tau = 1$).

Puisque $u(x) = \sum_{(g)} u_g(x)$, l'inégalité de Cauchy nous permet d'écrire :

$$|Q(D)\ u|^2 \leq \sum_{(g)} |Q(D)\ u_g|^2 \quad .$$

Par conséquent, tenant compte de ce qu'en tout point x de Ω 2^m fonctions u_g au plus sont différentes de zéro, il vient :

$$\tau^{\gamma} \int |Q(D)\ u|^2 \exp(2\tau\varphi)\ dx$$
$$\leq 2^m\ C \exp(16K) \sum_{(\alpha),(g)} \tau^{|\alpha^*|} \int |P^{(\alpha)}(D)\ u_g|^2 \exp(2\tau\varphi)\ dx \ .$$

Reste donc à majorer la somme du second membre de cette inégalité,

$$P^{(\alpha)}(D)\ u_g = P^{(\alpha)}(D)(u\,\theta(\frac{x - g\varepsilon}{\varepsilon}))$$
$$= \sum_{(\beta)} P^{(\alpha+\beta)}(D)(u).\tau^{|\beta^*|/2} \frac{1}{\beta!}(\frac{d}{d(\frac{x - g\varepsilon}{\varepsilon})})^{\beta}\ \theta(\frac{x - g\varepsilon}{\varepsilon})$$
$$\tau^{\frac{|\alpha^*|}{2}}.P^{(\alpha)}(D)\ u_g = \sum_{(\beta)} P^{(\alpha+\beta)}(D)(u).\tau^{|(\alpha+\beta)^*|/2}\ \frac{\theta^{(\beta)}(\frac{x - g\varepsilon}{\varepsilon})}{\beta!}$$

Si $C'' = \sup_x \sum_{(\alpha)} |\frac{\theta^{(\alpha)}(x)}{\alpha!}|^2$, alors :

$$\tau^{|\alpha^*|} |P^{(\alpha)}(D)\ u_g|^2 \leq C'' \sum_{(\beta)} \tau^{|(\alpha+\beta)^*|}\ |P^{(\alpha+\beta)}(D)\ u|^2 \quad .$$

Soit alors $N = 2^m - k$ où k désigne le nombre maximum de sommations dans $\sum_{\alpha} \sum_{\delta \geq \alpha}$.

$$\sum_{(\alpha)(g)} \tau^{|\alpha^*|}\ |P^{(\alpha)}(D)\ u_g|^2 \leq NC'' \sum_{(\alpha)} \tau^{|\alpha^*|}\ |P^{(\alpha)}(D)\ u|^2 \quad .$$

La thèse est désormais triviale.

Pour obtenir une inégalité de Carleman entre P et Q il reste donc à démontrer des inégalités de Carleman entre P et les $P^{(\alpha)}$.

2. Inégalité de Treves généralisée et conséquences.

Nous appellerons inégalité de Treves généralisée (par HORMANDER) une inégalité de Carleman entre P et un $P^{(\alpha)}$, φ étant un poids uniformément convexe. En effet, nous vérifierons plus loin que l'inégalité de Treves [2] entraîne bien une telle inégalité de Carleman, et d'autre part, nous allons voir qu'elle est en un certain sens, la plus générale des inégalités de ce type grâce au théorème 2.

THÉORÈME 2. - Supposons qu'on ait l'inégalité (pour $|\alpha| = 1$)

$$(1') \qquad \tau^{|\alpha^*|} \int |P^{(\alpha)}(D)\, u|^2 \exp(2\tau\psi)\, dx \leq C \int |P(D)\, u|^2 \exp(2\tau\psi)\, dx \quad .$$

pour $\begin{cases} \text{tous les polynômes différentiels du premier ordre } P(D) \\ \text{toute fonction } u \in \mathcal{D}(\Omega) \\ \text{tout nombre } \tau > 1 . \end{cases}$

La fonction ψ est alors uniformément convexe dans Ω .

Soit une fonction $V \in \mathcal{D}$. Appliquons la relation (1') à la fonction $u = V(\frac{x}{\varepsilon}) \exp(\langle x , \tau N \rangle)$ (où nous choisirons ε suffisamment petit pour que $u \in \mathcal{D}(\Omega)$). Posons encore $P(D) = \langle D - i\tau N , y \rangle$ (où y est fixé tel que $|y^*| \neq 0$) ; alors $P^{(\alpha)}(D) = y_i$ (si $|\alpha| = 1$).

La fonction ψ peut s'écrire

$$\psi = \psi_0 + \langle x , N \rangle + A(x) + O(x^2) \quad .$$

$$\tau |y^*|^2 \int |V(\tfrac{x}{\varepsilon})|^2 \exp(2\tau(A(x) + O(x^2)))\, dx$$
$$\leq C \int |\langle D , y \rangle V(\tfrac{x}{\varepsilon})|^2 \exp(2\tau(A(x) + O(x^2)))\, dx \quad .$$

Effectuons le changement de variables défini par $x \rightarrow x\varepsilon$. Le déterminant fonctionnel $(= \varepsilon^n)$ se simplifiera, et il suffira de poser $\varepsilon^2 \tau = 1$ pour avoir :

$$|y^*|^2 \int |V(x)|^2 \exp(2A(x) + 2\varepsilon O(x^2))\, dx$$
$$\leq C \int |\langle D , y \rangle V(x)|^2 \exp(2A(x) + 2\varepsilon O(x^2))\, dx \quad .$$

Faisons tendre ε vers 0 , on obtient

$$(2') \quad |y^*|^2 \int |V(x)|^2 \exp(2A(x))\, dx \leq C \int |\langle D , y \rangle V(x)|^2 \exp(2A(x))\, dx \quad .$$

Cette inégalité implique $A(x) \geq 0$.

En effet, appliquons (2') à la fonction :

$$V(x) = V_0(x)\, f(\varepsilon x)$$

où V_0 est une solution de l'équation différentielle $\langle D , y \rangle V_0 = 0$, supposée à support compact dans l'hyperplan orthogonal à la direction y et $f \in \mathcal{D}$ tel que $f(0) = 1$.

Il vient, en posant $g(x) = \langle D , y \rangle f(x)$:

$$(3)' \qquad |y^*|^2 \int |V_0|^2\, |f(\varepsilon x)|^2 \exp(2A(x))\, dx \leqslant C\varepsilon^2 \int |V_0|^2\, |g(\varepsilon x)|^2 \exp(2A(x))\, dx \quad .$$

Si $A(x)$ était strictement négatif, la fonction $|V_0|^2 \exp(2A(x))$ serait sommable. Faisant tendre ε vers 0, le premier membre tendrait vers $|y^*|^2 \int |V_0|^2 \exp(2A(x))\, dx$. Quant au membre de droite, il tend vers 0, ce qui est absurde. Supposons donc $A(x) \geqslant 0$. S'il existe un vecteur isotrope y, alors quel que soit le scalaire t, on a $A(x + ty) = A(x)$. Considérant à nouveau l'équation du premier ordre $\langle D , y \rangle = 0$, effectuant la construction (3)' nous obtenons une inégalité où le membre de gauche tend vers $+\infty$ avec $\frac{1}{\varepsilon}$ et où le membre de droite tend encore vers zéro [$(\frac{1}{\varepsilon})$ est de l'ordre du volume d'intégration]. Nous obtenons une contradiction, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

L'inégalité de Treves, c'est l'inégalité ([2]) :

$$t^{2\alpha} \int |P^{(\alpha)}(D).u|^2 \exp(t_1^2.x_1^2 + \dots + t_n^2.x_n^2).dx \leqslant C. \int |P(D).u|^2 \exp(t_1^2.x_1^2 + \dots + t_n^2.x_n^2).dx \quad .$$

Sur Ω, $|x_i| \leqslant B_i$, pour $i \geqslant m + 1$. On fait pour $i \geqslant m + 1$ $t_i = \frac{1}{B_i}$. Il vient alors :

$$(t^{\alpha^*})^2. \int |P^{(\alpha)}(D).u|^2 \exp(t_1^2.x_1^2 + \dots + t_n^2.x_n^2)\, dx \leqslant C. \int |P(D).u|^2 \exp(t_1^2.x_1^2 + \dots + t_n^2.x_n^2)\, dx \quad .$$

On remplace u par $u \exp(\langle x , \eta \rangle) = u \exp(- i \langle x , - i\eta \rangle)$ et $P(D)$ par $P(D + i\eta)$, ce qui donne :

$$(1'') \qquad (t^{\alpha^*})^2. \int |P^{(\alpha)}(D).u|^2.\exp(2\langle x , \eta \rangle + \sum_{i\leqslant m} t_i^2.x_i^2).dx \leqslant C \int |P(D).u|^2.\exp(2\langle x , \eta \rangle + \sum_{i\leqslant m} t_i^2.x_i^2).dx \quad .$$

Si φ est un polynôme quadratique tel que $A(x)$ ne dépende que de $x_1 , \dots , x_m$, et tel que :

$$|A(x)| \geqslant c(x_1^2 + \dots + x_m^2) , \qquad c > 0$$

alors il existe aussi C tel que $C(x_1^2 + \dots + x_m^2) \geqslant |A(x)|$ et on a, tenant compte de (1") :

(2") $$\tau^{\alpha^*} \int |P^{(\alpha)}(D).u|^2.\exp(2\tau\varphi).dx \leq C \int |P(D)\ u|^2.\exp(2\tau\varphi).dx \quad .$$

On démontrera l'inégalité (2") dans le cas général, $\varphi \in \mathcal{C}^3(\bar{\Omega})$ et φ strictement convexe (i. e. la partie du second ordre de son développement de Taylor satisfait à la condition sus-indiquée pour $A(x)$, uniformément sur $\bar{\Omega}$), en se ramenant au cas d'un polynôme du second degré par une partition de l'unité analogue à celle du théorème 1 (on fait $\varepsilon^3\tau = 1$).

(2") conjugué avec le théorème 1 conduit au théorème suivant :

THÉORÈME 3. - <u>Si dans</u> $\bar{\Omega}$, <u>il existe</u> $\varphi \in \mathcal{C}^3(\bar{\Omega})$ <u>telle que, pour tout</u> N <u>de la forme</u> $\varphi'(x)$, $(u \in \Omega)$ <u>on ait</u> :

$$\tau^{\gamma}|Q(\xi + i\tau N)|^2 \leq C.\sum_{(\alpha)} |P^{(\alpha)}(\xi + i\tau N)|^2.\tau^{|\alpha^*|}$$

<u>où</u> C <u>est indépendant de</u> N <u>et</u> τ , <u>alors si</u> φ <u>est de plus uniformément convexe, on a l'inégalité à la Carleman</u> :

$$\tau^{\gamma}\int |Q(D)\ u|^2.\exp(2\tau\varphi).dx \leq C \int |P(D)\ u|^2 \exp(2\tau\varphi).dx \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (Lars). - On the uniqueness of the Cauchy problem, Math. Scand., t. 6, 1958, p. 213-225.

[2] MALGRANGE (Bernard). - Inégalité de Treves. Comparaison des opérateurs différentiels, Séminaire Schwartz, t. 4, 1959/60, n° 11.