Bernard Malgrange

Inégalité de Treves. Comparaison des opérateurs différentiels

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. nº 11, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A11_0>

INÉGALITÉ DE TREVES. COMPARAISON DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

par Bernard MALGRANGE

1. L'identité de Treves.

a. Reprenons d'abord la démonstration de l'inégalité de l'exposé 8, n° 1 : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{R}}$, et tout $k > 0$, on a :

$$(1) \qquad \int \exp(kx^2) \left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx \geq Ck \int \exp(kx^2) |\varphi|^2 dx$$

(dans l'exposé 8, on avait $C = 1$; ici on obtiendra $C = 2$, mais peu importe !). Il est commode de se restreindre au cas $k = \frac{1}{2}$, le cas général s'obtenant ensuite immédiatement par homothétie.

Posons $\psi = \exp(\frac{x^2}{4}) \varphi$, et considérons les noyaux A et $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ définis par :

$$A\psi = \frac{d\psi}{dx} - \frac{x}{2}\psi \ ; \qquad A^*\psi = -\frac{d\psi}{dx} - \frac{x}{2}\psi \quad .$$

Le premier membre de (1) s'écrit alors : $\|A\psi\|^2$, et notre inégalité résulte aussitôt de l'identité immédiate

$$(2) \qquad \|A\psi\|^2 = \|A^*\psi\|^2 + \|\psi\|^2$$ (que l'on peut aussi écrire : $[A^*, A] =$ identité)

b. L'identité de Treves est une généralisation de l'identité précédente : on considère $\underset{\sim}{R}^n_x$ muni de la norme $|x|$ définie par $|x|^2 = \sum x_i^2$ et du produit scalaire correspondant, noté $\langle x|y \rangle$.

Si $\mu \in \mathcal{E}'_{\underset{\sim}{R}^n}$ et $\varphi \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{R}^n}$, on notera le produit scalaire de μ et φ par la notation commode $\int \mu(x) \varphi(x) dx$; μ^* désignera la distribution $\mu^*(x) = \overline{\mu(-x)}$.

Enfin, pour $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \underset{\sim}{N}^n$, on posera $|k| = k_1 + \ldots + k_n$; $k! = k_1! \ldots k_n!$ A μ, on associe les deux noyaux $\in \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ $S(\mu)$ et $S(\mu)^*$ suivants :

$$S(\mu)\psi = \exp(\frac{|x|^2}{4})\left\{\mu * [\psi \exp(-\frac{|x|^2}{4})]\right\} \qquad (\psi \in \mathcal{D})$$

$$S(\mu)^*\psi = \exp(-\frac{|x|^2}{4})\left\{\mu^* * [\psi \exp(\frac{|x|^2}{4})]\right\} \quad .$$

Il est clair que $S(\mu)$ et $S(\mu)^*$ sont adjoints l'un de l'autre i. e. :

$\forall \psi \in \mathcal{D}, \chi \in \mathcal{D}$

$(S(\mu)\psi|\chi) = (\psi|S(\mu)^*\chi)$ ($(.|.)$ désigne le produit scalaire dans L^2, comme dans les exposés précedents)

Pour $\mu = \frac{d\delta}{dx}$ $(n = 1)$, on a $S(\mu) = A$, $S(\mu)^* = A^*$. Ceci dit, l'identité (2) se généralise de la manière suivante :

THÉORÈME 1. - Pour tout $\psi \in \mathcal{D}$, on a :

$$\|S(\mu)\psi\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{k!} \|S(x^k \mu)^* \psi\|^2$$

DÉMONSTRATION. - On a immédiatement :

$$\|S(\mu)\psi\|^2 = \int \exp\left[\frac{\langle x|y\rangle}{2} + \frac{\langle x|z\rangle}{2} - \frac{|y|^2}{4} - \frac{|z|^2}{4}\right] \mu(y)\overline{\mu(z)}\,\psi(x-y)\overline{\psi(x-z)}\,dx\,dy\,dz$$

en prenant comme nouvelles variables $u = x - y$, y, z, il vient

$$(3)\quad \|S(\mu)\psi\|^2 = \int \exp\frac{\langle y|z\rangle}{2} \exp\left[\frac{\langle u|y\rangle}{2} + \frac{\langle u|z\rangle}{2} + \frac{|y|^2}{4} - \frac{|z|^2}{4}\right] \mu(y)\overline{\mu(z)}\,\psi(u)\overline{\psi(u+y-z)}\,du\,dy\,dz\ .$$

On trouve de même :

$$\|S(\mu)^*\psi\|^2 = \int \exp\frac{-\langle y|z\rangle}{2} \exp\left[\frac{\langle u|y\rangle}{2} + \frac{\langle u|z\rangle}{2} + \frac{|y|^2}{4} - \frac{|z|^2}{4}\right] \mu(y)\overline{\mu(z)}\,\psi(u)\overline{\psi(u+y-z)}\,du\,dy\,dz\ .$$

Le théorème résulte alors de l'égalité

$$\exp\frac{\langle y|z\rangle}{2} = \exp\frac{-\langle y|z\rangle}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{k!} y^k z^k$$

(la série figurant au second mombre est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_z$, ainsi que les séries dérivées : on pourra donc permuter les signes $\sum$ et $\int$ dans (3)).

(Ce théorème a été démontré dans [3], chapitre 4, lorsque μ est une distribution à support l'origine ; puis dans [2], dans le cas général).

3. L'inégalité de Treves.

Notations relatives aux opérateurs différentiels (qui seront utilisées encore dans les exposés suivants, relatifs aux travaux de HÖRMANDER sur l'unicité du problème de Cauchy) :

$$\zeta = (\zeta_1 , \dots , \zeta_n) \in \mathbb{C}^n \qquad \zeta_j = \xi_j + i\eta_j \ , \ \zeta x = \sum \zeta_j x_j \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \quad .$$

P étant un polynôme en ζ , on désigne par $P(D)$ l'opérateur différentiel obtenu en substituant à ζ_j l'opérateur différentiel $-i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^n$ on pose (comme d'habitude)

$$D_\zeta^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial \zeta_1^{k_1} \dots \partial \zeta_n^{k_n}}$$

et $P^{(k)} = D_\zeta^k P$.

On a (calcul immédiat) :

$$x^k[P(D)\,\delta\,] = i^{|k|}\,P^k(D)\,\delta$$

et

$$P(D)\ \exp(i\zeta x) = P(\zeta).\exp(i\zeta x) \quad .$$

Rappelons enfin la "formule de Leibniz" :

$$P(D)(fg) = \sum \frac{1}{k!}\,D^k\,f.P^{(k)}(D)\ g \qquad (\ f\ ,\ g \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}) \quad .$$

(Les gens curieux peuvent chercher la raison, purement algébrique, de l'analogie qui existe entre cette formule et la théorème 1).

Appliquons alors le théorème 1 à $\mu = P(D)\delta$: il vient :

$$\|S[P(D)\,\delta\,]\,\psi\|^2 = \sum \frac{1}{k!}\,\|S[P^{(k)}(D)\,\delta\,]^*\ \psi\|^2$$

et, pour $\ell \in \mathbb{N}^n$, à $\mu = P^{(\ell)}(D)\delta$:

$$\|S[P^{(\ell)}(D)\,\delta]\psi\|^2 = \sum \frac{1}{k!}\,\|S[P^{(k+\ell)}(D)\,\delta\,]^*\ \psi\|^2 \quad .$$

Mais, si l'on désigne par m le degré de P , on a : $P^{(k)} = 0$ pour $|k| > m$; ce fait, joint aux deux égalités précédentes, nous donne, pour tout $\psi \in \mathcal{D}$

$$\|S[P^{(\ell)}(D)\,\delta\,]\,\psi\|^2 \leq \|S[P(D)\,\delta\,]\,\psi\|^2 \max_{|k+\ell| \leq m} \frac{(k+\ell)!}{k!}$$

$$\leq 2^m\,\ell\,!\,\|S[P(D)\,\delta\,]\,\psi\|^2$$

(d'après les propriétés bien connues des coefficients binomiaux ...).

Revenant à $\varphi = \exp(-\frac{|x|^2}{4}\psi)$, cette dernière inégalité s'écrit :

$$\int \exp(\frac{|x|^2}{2})|P^{(\ell)}(D)\varphi|^2\,dx \leq 2^m\,\ell\,!\int \exp(\frac{|x|^2}{2})|P(D)\varphi|^2\,dx$$

d'où, par une transformation linéaire convenable :

THÉORÈME 2. - (TREVES [3], chapitre 4). - P étant un polynôme de degré m, $t=(t_1, \ldots, t_n)$ un système de n nombres >0, et $\ell \in \mathbb{N}^n$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on a :

$$\int \exp[\frac{1}{2}\sum t_j\,x_j^2]|P^{(\ell)}(D)\varphi|^2\,dx \leq \frac{2^m\,\ell!}{t^\ell}\int \exp[\frac{1}{2}\sum t_j\,x_j^2]|P(D)\varphi|^2\,dx \quad .$$

REMARQUE. - La formule reste évidemment encore vraie si certains t_j sont égaux à 0, mais $t^\ell \neq 0$ (passage à la limite).

3. Comparaison des opérateurs différentiels.

NOTATION. - P étant un polynôme, on désigne par $\widetilde{P}$ la fonction $\geqslant 0$ définie par :

$$\widetilde{P}(\xi)^2 = \sum|P^{(k)}(\xi)|^2 \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n) \quad .$$

DÉFINITION. - Q, P_1, ..., P_N étant des polynômes, on dit que l'opérateur différentiel $Q(D)$ est majoré par le système $\{P_j(D)\}$ si pour tout compact $K \in \mathbb{R}^n$, il existe $C(K)>0$ tel que, $\forall\varphi \in \mathcal{D}_K$, on ait :

$$||Q(D)\varphi||^2 \leq C(K)\sum||P_j(D)\varphi||^2 \quad .$$

EXEMPLE. - Il résulte aussitôt du théorème 2 que, pour tout polynôme P et tout $\ell \in \mathbb{N}^n$, $P^{(\ell)}(D)$ est majoré par $P(D)$ (ce fait avait été établi antérieurement au théorème 2 par LERAY (non publié) et par HÖRMANDER [1]).

La caractérisation des opérateurs majorés par un système donné est la suivante (HÖRMANDER, [1], chapitre 2):

THÉORÈME 3. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{cases} \text{a. } Q(D) \text{ est majoré par le système } \{P_j(D)\} \\ \text{b. } |Q(\xi)|^2 \leq C\sum\widetilde{P}_j(\xi)^2\,, \qquad \forall\,\xi \in \mathbb{R}^n \quad (C>0) \\ \text{c. } \widetilde{Q}(\xi)^2 \leq C'\sum\widetilde{P}_j(\xi)^2\,, \qquad \forall\,\xi \in \mathbb{R}^n \quad (C'>0) \end{cases} \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Evidemment, c.$\Longrightarrow$b. (leur équivalence est d'ailleurs facile à voir, mais nous n'en n'aurons pas besoin).

b. $\Longrightarrow$ a. d'après le théorème de Plancherel et l'inégalité de Treves (exemple ci-dessus).

Reste à démontrer : a. $\Longrightarrow$ c. Nous allons même affaiblir les hypothèses, et supposer seulement ceci : il existe $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ $\varphi_0 \neq 0$ et $C > 0$ tel que, $\forall \xi \in \underset{\sim}{R}^n$, $\varphi = \varphi_0 \exp(i \xi x)$ vérifie :

$$\|Q(D)\varphi\|^2 \leq C \sum_j \|P_j(D)\varphi\|^2 \quad .$$

D'après la formule de Leibniz, nous avons alors, pour tout $\xi \in \underset{\sim}{R}^n$

$$\sum_{k,\ell} \frac{1}{k!\,\ell!} (D^k \varphi_0 | D^\ell \varphi_0)\, Q^{(k)}(\xi)\, \overline{Q^{(\ell)}(\xi)}$$
$$\leq C \sum_{j,k,\ell} \frac{1}{k!\,\ell!} (D^k \varphi_0 | D^\ell \varphi_0)\, P_j^{(k)}(\xi)\, \overline{P_j^{(\ell)}(\xi)} \quad .$$

Pour passer de là à c., il suffit de montrer que la forme hermitienne

$$q(\lambda) = \sum \frac{1}{k!\,\ell!} (D^k \varphi_0 | D^\ell \varphi_0) \lambda_k \overline{\lambda_\ell} \quad (\lambda = (\lambda_k)\ ,\ \ |k| \leq \deg(Q)\ )$$

est définie positive ; or elle s'écrit aussi :

$$q(\lambda) = \left\|\sum \frac{1}{k!} D^k \varphi_0\, \lambda_k\right\|^2$$

et, par conséquent, elle est positive ; et elle ne peut pas s'annuler pour $\lambda \neq 0$ puisque φ_0, étant une fonction à support compact, ne peut satisfaire à aucune équation aux dérivées partielles à coefficients constants non nulle (immédiat par transformation de Fourier).

4. Comparaison des opérateurs différentiels aux différences finies.

THÉORÈME 4 (MALGRANGE, [2]). - *Soient* $a_1, \ldots, a_N$, N *points distincts de* $\underset{\sim}{R}^n$, *et* P_j N *polynômes differentiels. Pour tout compact* $K \subset \underset{\sim}{R}^n$, *il existe* $C(K) > 0$ *tel que,* $\forall \varphi \in \mathcal{D}_K$ *on ait* :

$$\sum_1^N \|P_j(D)\varphi\|^2 \leq C(K)\, \left\|\sum P_j(D)\varphi(x - a_i)\right\|^2$$

(l'inégalité inverse étant évidente, cela signifie que l'opérateur différentiel aux différences finies $\varphi \longrightarrow \mu * \varphi$ $\mu = \sum P_j(D)\,\delta_{a_j}$ est "équivalente" au système $\{P_j(D)\}$, en un sens analogue à celui du numéro 3, qu'on laisse au lecteur le soin de préciser).

DÉMONSTRATION. - Il suffit de démontrer que l'on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K \ : \ \|P_1(D)\,\varphi\|^2 \leq C'(K)\,\|\mu * \varphi\|^2 \qquad ;$$

par translation, on peut supposer $a_1 = 0$. Nous allons raisonner comme au numéro 2 :

Soit $R(x)$ un polynôme tel que $R\mu = P_1(D)\delta$ (l'existence d'un tel R est immédiate). Appliquons le théorème 1 à μ et $R\mu$; pour tout $\psi \in \mathcal{D}$, on a :

$$\|S(\mu)\,\psi\|^2 = \sum \frac{1}{k!}\,\|S(x^k\mu)^*\,\psi\|^2 \tag{4}$$

et

$$\|S(R\mu)\,\psi\|^2 = \sum \frac{1}{k!}\,\|S(x^k R\mu)^*\,\psi\|^2 \tag{5}$$

Dans la série qui figure au second membre de (5), tous les termes sont nuls dès que $|k| > \deg(P_1)$; et chacun des autres termes est majoré par une combinaison linéaire finie, indépendante de ψ, des termes du second membre de (4) ; par conséquent, il existe $C > 0$ tel que, $\forall \psi \in \mathcal{D}$, on ait

$$\|S(R\mu)\,\psi\|^2 \leq C\,\|S(\mu)\,\psi\|^2 \qquad .$$

Posons $\psi = \exp(\frac{|x|^2}{4})\varphi$, et revenons à la définition de S ; on obtient :

$$\int \exp(\frac{|x|^2}{2})\,|P_1(D)\,\varphi|^2\,dx \leq C \int \exp(\frac{|x|^2}{2})\,|\mu * \varphi|^2\,dx$$

e qui entraîne immédiatement l'inégalité cherchée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (Lars). - On the theory of general partial differential operators, Acta Math., t. 94, 1955, p. 160-248.

[2] MALGRANGE (Bernard). - Sur une inégalité de F. Treves, Math. Z., t. 72, 1959, p. 184-186.

[3] TREVES (François). - Relations entre opérateurs différentiels, Acta Math., t. 101, 1959, p. 1-139.